CAROLI RENALDINII
DE RESOLVTIONE, & Compositione Mathematica.

CAROLI RENALDINII

SERENISS. MAGNI PRINCIPIS ETRVRIÆ
PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI.

OLIM IN PISANA ACADEMIA PHILOSOPHIAM ORDINARIO LOCO PROFITENTIS.

NVNC IN PATAVINO LYCEO PHILOSOPHI PRIMÆ SEDIS.

De Resolutione, & Compositione Mathematica.

LIBRI DVO.

EMINENTISS. ET REVERENDISS.

LEOPOLDO S. R. E.
CARDINALI MEDICEO
MAGNI ETRVRIÆ DVCIS FRATRI

D. D.



PATAVII, MDCLXVIII.

Typis, ac Impensis Heredum Pauli Frambotti Bibliopolæ.
SVPERIORVM CONSENSV.

Eminentiſsimo & Reuerendiſsimo

LEOPOLDO S·R·E·
CARDINALI MEDICEO

CAROLVS RENALDINIVS F.



SAPIENTER admodum, atque perbelle Te Eminentiſsime Princeps, ſępeſępius enunciaſſe, in memoria firmiter, ac penitus hæſit, longè præſtantius, atq; etiam vtilius eſſe res Geometricas ea ratione tractare, vt introſpecta Reſolutricis Artis natura Præceptiones tradantur, à quibus vnuſquiſque paratus, quicquid libuerit, haud Muſis inuitis, perficere mirificè poſſit; quàm aſſerta nullo ferè comprehenſa numero, etſi demonſtrationibus munita, in vnum congerendo, plures, ac plures exarare Codices, ingentia concinnare Volumina; Cùm illud ſit ingenij ſolertis, penèque Diuini; hoc autem laboris improbi munus; illud nullis adminiculis prouinciam ſuſcipere, atque adeo proprio ſplendore nitere; hoc autem aliorum inuentis vti, ac proinde aliunde lumine mutuato ſplendeſcere. Hoc equidē, Eminentiſſime Princeps, Oraculi loco ſemper habui. Commentarios propterea de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica, quos tibi nuncupatos iure, ac merito volui, te haud parui facturum exiſtimo. Erat profectò, cur inſigniri tui nominis inclyti fulgore prodirent in lucem; tum quia Geometricis literis eruditus de his ferre iudicium valebis; perſpectum habens, num ſic argumentum verſauerim, vt oleum, operamque perdiderim, quod nolim; an potiùs feliciter ſcopum attigerim, quod velim; tum quia tibi compertum eſt, quantum officij ſuſtineam, & quàm magna, & quàm multa ſint beneficia, quibus me deuinxiſti; præſertim quòd meis humillimis precibus, quibus tecum iamdudum, quàm poſſem, diligentiſſimis egi; ſecretiora Naturę myſteria experimentis operoſiſſimis aggreſsus es. Vnde Academiam hac de re, veritatis inquirendæ gratia, ſummos labores perferendo, ſumptus ingentes ſuſtinendo non ſine magno tui nominis ſplendore inſtituiſti; Sic multorum mentes in celebrioribus totius Orbis Ciuitatibus à ſomniculoſa quadam, ad hanc ſolertem philoſophandi rationem excitaſti; vt Veterum inſtitutis multa dicta ſalute, hoc vnum addiſcendi genus arripuerint,

puerint. Atque demum qui vel animi quodam sublimioris impulsu, vel vnius veritatis cupidine prolectati, ad res cognoscendas sunt vehementer accensi; hunc sapientiæ cultum retinendum duxerunt. Vnde mihi licuit de rebus naturâ constantibus securiori, quàm hactenus viâ philosophari, nimirum Geometriâ, vbi rei natura patitur, accersitâ. Ita nunc agente me suppliciter tecum, Astronomiam generosè admodum promouere contendis, Organis egregijs, Instrumentis elegantissimis, Machinamentis sumptuosissimis, quæ fieri, tua, qua polles, incomparabili munificentia, curaui; vt ijs, si Deo placuerit, quàmproximè Cælestium corporum dimensiones assecuti; Cœlum ipsum opitulatione Celsitudinis tuæ conscendisse quodammodo videamur. Verumeniniverò eruditione, qua exornaris, quaque sic omnium peritorum lumen obscuras, vt Sol Cælestium corporum claritatem obtenebrat, ne metiaris quæso Clementissime Princeps meos qualescunque conatus ingenij; exiguos enim illos videri necesse foret; sed potiùs tenui, ac ferè nulla, quam è Veterum Monumentis hac de re licuit haurire, notitiâ. Non enim te præterit, Antiquos Sapientiæ proceres in Mathematicis Disciplinis huius Artis opitulatione Herculeos pertulisse labores, eaque perpetrasse, singulis de rebus inita ratione, vt æternis, Diuinisque laudibus efferri promeruerint, & apud posteros immortalem sint gloriam adepti haud citra Posteritatis inuidiam. Hæ literariæ, quibus Veteres affluebant, diuitiæ, præstantissima sunt animi bona, quæ nos hæreditario Iure consecuti, prægaudio gestientes conspiceremur; nisi temporis edacis iniuriâ, non sine mœrore abdicati, molestiæ plurimum, oneris multum in sacratioribus detegendis arcanis, veritateque perquirenda sustinere miserrimè cogeremur. Summa necessitas igitur adegit, coniecturis, vt ita dixerim, eorum resolutricem Artem rediuiuam reddere, quod operis exigui non fuit. Eam verò, quam huius ætatis industria in summum veritatis quæstum, & commodum Reipublicæ literariæ peperit, ita tractare, vt eò tandem, quò spectabat, & Mentis acies, & Ingenij solertia, perueniret. At hoc in munere si minùs egregiè Eminētissime Princeps me gessisse cognoueris; tuæ quidem erit excelsæ virtutis perpendere, num æquum sit, aliqua eos ornari laude, qui ad res præclaras animum adijciunt, etsi, quod velint, minùs assequantur, quod te facturum pro tua clementia confido. Interim si lucubrationes qualescunque meas Tibi voluptati fuisse perspexero; in id omnibus viribus incumbam, omnesque ingenij neruos contendam, vt posthac præclariora tuo Nomini sacrata videns, intelligas omne studium, omnemque conatum à me libentissimè gratia Celsitudinis Tuæ susceptum fuisse. Vale.

CA-



CAROLI RENALDINII

SERENISS. MAGNI PRINCIPIS ETRVRIÆ PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI.

Et in Patauino Lyceo Philosophi primæ Sedis.

De Resolutione, & Compositione Mathematica

LIBER PRIMVS.

PRÆFATIO.



Ræstantiores Artifices Matheseos partem summoperè commendant, ampliſsimiſque laudibus proſequuntur, quæ Demonſtrationes benè, facilèque docet adinuenire; ea quidem eſt, quæ de Analyſi, & Syntheſi, hoc eſt de Reſolutione, & Compoſitione Mathematica ediſſerit; nec id ab ijs iniuria factum exiſtimes, quandoquidem expedita methodus ad contexendas Demonſtrationes magnum habet momentum; non enim in huiuſmodi Diſciplinis quicquam indemonſtratum proferre licet, nec probabili tantùm ratiocinatione diſſerere ijs, qui præclariſsimum hoc verſant argumentum, conceditur; quinimo vt cæteris commendatiſsimi ſint, firmiſsimis demonſtrationibus Propoſitiones munire coguntur, nec aliter oblatæ Quæſtioni ſatisfeciſſe exiſtimantur. Opus planè arduum, vtpotè difficultatibus implicatum; quamobrem Ars, quæ ad id magnopere conducit, erit in primis expetenda; nec mirum, ſiquidem vt Veteres memoriæ, literiſq; prodidere, non diuinando, ſed methodicè procedendũ in Mathematicis eſt; priori etenim inquiſitionis via caſu potiùs, quàm Arte veritatem aſſequimur, ſecunda verò non ita, ſed firma, certaque ratione comparamus. Longè propterea videtur eſſe præſtantius, atque præclarius reſolutiuam potentiam adeptũ fuiſſe, quàm multas particulares demonſtrationes comparaſſe: quamobrem non immeritò Marinus antiquus ille Geometra pronunciauit. Quantam porrò vim obtineat in Mathematicis diſciplinis, & quæ ad illas proximè accedunt Optica, Canonica, reſolutus Locus; alio loco dictum eſt à nobis, tum quod Reſolutio demonſtrationis inuentio eſt, tum quod in ſimilibus ad demonſtrationis inuentionem multum conferat, tum quod longe præſtantius ſit potentiam reſolutiuam nanciſci, quàm multas particulares demonſtrationes poſsidere. Propterea non ignobilis harum Diſciplinarum magiſter frequenter id vſurpabat, Mathematica multi ſciunt, Matheſin autem pauci; cùm non idem ſit aliquot propoſitiones noſſe, & ex ijs quaſdam ſatis obuias elicere caſu potiùs, quàm aliqua diſſerendi Arte; non idem ſit inquam, ac ipſius ſcientiæ naturam, atque

Matheſeos pars, de Analyſi & Syntheſi tractat magnopere commendanda.

Eſt tamen ardua plenaque difficultatib.

Marini Geometræ ſententia.

Præſtantiſsimi Geometræ dictum.

atque Indolem habere perspectam, vt ad sacratiora quidem admissus, vniuersalibus sit instructus praeceptis, quibus Problemata, ac Theoremata innumera excogitet, meditetur, inquirat, eademque summa facilitate demonstret; Nec vnquam animum ea potui informare sententia, vt crederem, esse Sapientis, euolutis aliorum monumentis, quadam eorum imitatione Propositiones effingere; sed potius ita esse instructum, & ab huiusmodi studijs paratum, vt quicquid sibi libuerit, excogitare queat, ne aliorum vestigijs inhaerendo, veritatem persequi, & alienis inuentis, tanquam prototypo indigere videatur; Propterea Matheseos hanc partem iugiter excoluerunt Veteres, vt eorum monumenta versanti perspicuum erit; & quidem testis est Pappus Alexandrinus, apud quem legimus, ita Veteres in hac Arte fuisse versatos, & de Resolutionis, Compositionisque methodo fuisse sollicitos, vt ipsius Resolutionis gratia multa congesserint, multaque compilauerint; simulque commemorat Libros de Datis Euclidis, De proportionis sectione, De spatij sectione, De determinata sectione, De fractionibus, De Porismatibus, &c., alijsque ad locum resolutum pertinentibus, atque non aliam ob causam id ab Antiquis factum fuisse, nisi vt oblato Problemati certa quadam ratione occurrerent, ac satisfacerent; proinde post Elementa, operae esse pretium arbitrabantur in hanc Artem incumbere, vt facilitas in Problematibus resoluendis, compararetur; non est autem cur quis sibi persuadeat ijs sic fuisse veritatis amplissima spatia perquisita, vt posteritati nullatenus liceat per aliqua inuia ipsis, excurrere; quinimò sic eorum resolutionis rationis ratio per nos ditior euasit, vt haud multa dicenda superesse videantur, Recentiorum uerò tot est inuentis adaucta, ut aequè de utraque fortasse nobis gloriari liceat, unde non immeritò quispiam animo foret ancipiti, num ipsi nobis, an nos ipsis inuidere debeamus. Ordo autem hic erit, ut primus Liber totus sit in explicatione Methodi, qua Veteres in resoluendo, componendoque utebantur, ubi praecepta tradimus, & exempla afferimus tam pro Theorematum, quàm Problematum resolutionibus. Secundus uerò liber occupatus est in explicanda Recentiorum Arte Resolutrice, ubi ad id uarias methodos afferimus, quarum qualibet licet Artifici sub quocunq; genere infinita Problemata, ac Theoremata resoluere; praesertim autem eo Artem deduximus, ut etiam Problemata solida artificiosè resoluere possimus. Quod cumulatiùs persequemur in proximo subsequenti Tractatu, cui titulus est. Geometra Promotus *; ubi uariarum linearum ortum tradidimus, quarum praesidio licet difficillimis Problematibus satisfacere, nedum scilicet Problematum effectiones praescribendo, quod hac in re magni momenti est; sed etiam dictando demonstrationem earundem effectionum, quamuis ascensu facto ad immaginarias quantitates, repetitis Analyseos uestigijs, quod à nemine factum hucusque cuique perspicuum esse potest. Omnia uerò contendimus ea claritate tractare, ut quisque etsi in puluere Mathematico parùm uersatus, dummodo harum Disciplinarum Elementa praelibauerit, Theoremata, & Problemata certa differendi Arte excogitare, ac adinuenire queat; proinde resoluendo, componendoque quicquid libuerit moliri, perficereque possit.*

Qua de causa Veteres aetate Analyticam plurimùm excoluerint.

Ordo huius Tractatus.

Quid in primo Libro.

Quid in secũdo agatur.

Auctor multa alia eadem de re se tractaturum in suo Geometra promoto pol. licetur.



DE LOCO RESOLVTO.



Resolutio ad quid pertineat. Locus resolutus quid. lib. 7. Mathem. Collec.

ESOLVTIO porrò ad Locum pertinet Resolutum; Resolutus autem Locus propria materies est, vt ait Pappus Alexandrinus, post communium Elementorum constitutionem ijs parata, qui in Geometricis sibi comparare volunt vim, ac facultatem inueniendi Problemata, quæ ipsis proponuntur, cuius gratia tantùm inuenta est.

Quid Locus Geometricus. In primum Euclidis.

Vt autem ab vniuersalioribus exordium desumamus. Locus Geometricus generatim, vt ait Proclus, est lineæ, vel superficiei situs, qui vnum, idemque symptoma efficit.

Ex Theorematibus quidem alia vniuersalia alia particularia, alia simplicia, alia composita alia localia, & alia non localia.

Ex Theorematibus quidem alia vniuersalia, alia particularia, alia simplicia, alia composita, præsertim tamen prout ad præsens attinet institutum, alia localia, & alia non localia. Localia sunt, quibus symptomata in toto quodam loco accidunt; at verò Localium alia quidem in lineis constituuntur, alia autem in superficiebus.

Linearũ alia plana, alia solida.

Quoniam verò linearum aliæ sunt planæ, aliæ solidæ, planæ quidem, quarum simplex est intelligentia in plano; solidæ verò, quarum ortus ex quadam solidæ figuræ sectione apparet, vt cylindricæ, helices, conicarumque linearum; ita fit vt ex localibus Theorematibus, quemadmodum ex Problematibus, alia quidem planum, alia verò solidum habere locum dicantur.

Theorema Locale erit, vt propositio trigesima quinta primi Elementorum. *Parallelogramma super eadem basi constituta, & inter easdem parallelas sunt inter se æqualia*. Locale quidem, sed planum. Locale est, cùm totum illud spatium idem symptoma efficiat; planum autem, quoniam in lineis simplicissimis est, nimirum rectis.

Theorema etiam locale illud est. *Rectangula comprehensa interceptis hyperboles perimetro, & asymptotis æqualia sunt*, Locale quidem est, quoniam totum illud spatium idem efficit symptoma; solidum autem, quoniam hyperbole solida linea est.

Ex Theorematibus planis quedã in lineis rectis, quedam in curuis.

Ex Theorematibus planis quædam in lineis rectis, vt superiùs allatum, quædam in lineis curuis, vt *In eodem circuli segmento Anguli constituti sunt inter se æquales*.

Problema locale aliud planum, aliud solidum.

Problema verò locale aliud quidem planum, aliud autem solidum. Planum, vt *Si recta linea secta sit vtcumque, ab extremitatibus eius duas rectas inflectere, quæ inter se rationem habeant, vt partes lineæ sectæ*. Locale profectò est, cùm tota circuli peripheria descripta quidem idem symptoma efficiat, at verò planum, quoniam in simplicissimis lineis est, vt recta, & curua.

Problema autem locale solidum est, ad quod efficiendum requiritur linea quædam solida, ita vt sit locale, quoniam totum aliquod spatium idem symptoma efficit, solidum verò, quoniam in lineis est solidis. vt.

Datis punctis, & linea recta, in plano per vtrumque ducto, aliud punctum inuenire, à quo binæ rectæ, altera quidem ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ sibi inuicem sint æquales. Problema locale est, quoniam infinita sunt huiusmodi puncta, quæ Problemati satisfaciunt, ac ob id totum spatium vnius lineæ idem symptoma efficit; est autem solidum, quoniam huiusmodi linea, est vna è sectionibus conicis, nempe Parabole.

Non idem est Problema solidum, ac locale solidum.

Non idem tamen est Problema Solidum, ac est Locale solidum; siquidem ad primum requiritur tantummodò, vt ad eius constructionem sit opus lineam solidam adhibere, quæcumque sit illa siue Parabole, siue Ellipsis, siue Hyperbole; at ad secundum requiritur, vt totum aliquod spatium idem symptoma efficiat.

A Quam-

Problema tripartitũ apud Geometras, aliud planum, aliud solidũ, aliud lineare.

Quamobrem apud omnes tum Veteres, tum recentiores Geometras tripartitum Problema est, cum aliud sit Planum, aliud solidum, aliud denique Lineare.

Planum Geometricum Problema quid.

Planum Geometricum Antiqui dixerunt, quod per circulum, & lineas rectas solui potest, plana autem hæc appellantur Problemata.

Solidum Problema quid

Solidum dicitur illud, quod enodatur assumpta in constructionem aliqua ex sectionibus conicis, hæc solida dicuntur, quod in eorum solutionem solidæ adhibeantur lineæ.

Lineare quid.

Lineare denique dicitur, quod ad sui effectionem lineas illas exposcat, quæ varium, ac transmutabilem ortum habent, quæque ex inordinatis, implicatisque motibus fiunt, cuiusmodi sunt Helix, Quadratix, Conchoides, Cissoides, Cycloides &c.

Apud plerosque nõ est Problema Geometricum, nisi quod per rectam, & circularem perficitur.

Plerisque tamen illud Problema, ad cuius effectionem assumitur solida linea, minimè Geometricum videtur, multòque minùs si genus aliquod aliud lineæ præter rectam, & circularem adhibeatur. Num autem ratione compulsi, an potiùs aliorum auctoritate subacti in hanc sententiam abierint, satis profectò non liquet.

Auctoris hac in re sententia.

Ipse quidem nunquam animum induxi, vt crederem solum illud Geometricum esse Problema censendum, cuius effectio per circulum, lineamque rectam perficitur; quinimò semper mihi toto aberrasse cælo sunt visi, quos noui tam religiosè de Geometria sentire, vt id in Problemate Geometrico desiderarent; longè propterea aliter sese habere rem compulsus ratione sum arbitratus. Non tamen inficias ibo lineis rectæ, & circulari in re, de qua agimus, primas deberi partes. Illud tamen ab omni prorsus ratione alienum puto, nimirum Geometram duabus illis lineis debere esse contentum, propterea quod eatenus hęc, vel illa Geometrica effectio vnam, vel aliam sibi lineam adsciscit, quatenus illi quædam inest proprietas, quam illa quidem effectio requirit; at, quod neminem latere crediderim, huiusmodi lineæ, de quibus existimant Geometram tantummodò debere esse sollicitum, non omnes sibi affectiones, ac proprietates vendicant, ac proindè per illas tantummodò licebit effectiones absoluere, quibus illarum proprietates accommodatæ sunt. Si Problema igitur construendum fuerit, & ad id circuli proprietas non conducat, fateor, mihi incompertum esse, cur ad circulum confugiendum sit, cùm aliud lineæ genus satisfacere possit proprietate sua; & certè quod per quatuor lineas continuè proportionales perfici natura contendit, per tres vtique fieri non patietur; quamobrem subijt animum admiratio, quòd Veterum plerique ad alicuius Problematis effectionem elaborandam circulum assumere vellent, etsi ijs foret satis obuium sine quatuor continuè proportionalibus lineis inuita natura perfici non posse, cum tamen per circulum tres tantum adinuenire concedatur: quod si res ità se habet, nemini licebit tantummodo rectam lineam, & circularem pro Geometricis effectionibus adstruere.

Geometræ officiũ est quodcumque linearum genus sua persequi contemplatione.

Illud quoque hac in re plurimum videtur habere momenti, quod Geometræ sunt partes quodcumque linearum genus persequi contemplatione sua; neminem tamen præterit quamlibet Disciplinam contemplatricem sic rem propositam considerandam assumere, vt naturam eius perscrutetur, ac proprietates inquirat. Primum Definitionibus iuxtà Artis præcepta elaboratis; secundum verò rectâ disserendi ratione, demonstrationeque consequitur; Si itaque linearum contemplatio adeò est Geometræ propria (si tamen ipsæ prout induunt rationem mensuræ, & mensurabilis spectentur) vt alterius Artificis hæc non sit meditatio; non dubito, quin cuique debeat exploratum esse, omne linearum genus ad Geometram pertinere, adeò nimirum vt non solum Definitionibus vniuscunque lineæ intrà limites tamen ipsius Matheseos explicari debeat natura, sed etiam Demonstrationes de proprietatibus ipsarum contexantur. Quòd si proprietas aliqua nullum habeat cum circuli natura commercium, qui fieri poterit, vt in illius demonstratione circulus assumatur? Quantumuis enim illum partitus fueris ductis rectis lineis, hisque etiam diuisis secundum rationes diuersas, continget vt nihil his cum lineæ proprietate commune sit; Insulsum propterea foret circuli naturam perquirere, variasque sectiones instituere illius proprietatis gratia, vt perficiatur effectio.

Considerãtur rationum momenta.

Agedum perpendamus rationum momenta, quę plerisque plurimum negotij facessunt. Primum autem occurrit, quod plerique magni faciunt argumentum, nimirum ideò Problema Geometricum esse, quoniam ipsius effectio Geometrica est; hanc verò dicunt esse, in qua nihil determinatur, aut nulla iubetur fieri operatio, nisi per rectam lineam, vel curuam,

Id insuper addunt, scilicet Problematis Geometricæ solutioni non officere, quod in eorum demonstrationibus assumantur lineæ solidæ, sectionesque conicæ, vel earum proprietates demonstratæ, aut in ipsa demonstratione ostendantur cuncta per rectas lineas aut rectangula Geometricè in constructione determinata esse quidem ad Ellipsim, Parabolen, vel Hyperbolen, dummodò constructio lineis haud solidis, sed rectis, atque circumferentia peracta sit, quò non iniuria Apollonij Problemata censeri Geometrica debent; quoniam etsi de lineis solidis per solam lineam rectam tamen, atque circumferentiam constructa sunt. *Confirmatio.*

Hi profectò amplissimo contemplationis Oceano, cuiusmodi est Geometria, fines angustissimos præscribunt, & nulla ratione tam seueras leges promulgant, quod nimirum circulus vnico circini circumductu describatur, & recta linea citrà laborem simplicissima norma ducatur. *Reiicitur superior sententia.*

Sed vide quantum dedecoris præstantissimis, peneque Diuinis Disciplinis inurant, quasi videlicet hæ tractandum argumentum Mechanicis Machinamentis assumant: Geometra enim neque lineas, neque figuras papyro consignatas sua persequitur contemplatione, cum ea potius tantummodo meditetur prout vel in Diuina resident Mente, vel in humano intellectu relucent; alioquin neque lineam ducere, nec figuræ genus vllum describere, nobis natura permisit. Quod si problema iubet aliquid construi; non sic illud vsurpandum, quasi aliquo ex Mechanicis instrumentis, siue id circinus sit, siue aliud quidpiam, vti debeamus, sed intellectu potius, quo aliquid fieri concipiendum est. *Occurritur difficultatib.*

Neque Problema, vt vulgo creditur, quidquam operandum præscribit, vt nos videlicet illud perficere debeamus; quis enim audet vel lineam, vel circulum, vel aliquod aliud figuræ genus describere? sed potiùs vt intelligamus illas linearum interfectiones, quæcumque sint ipsæ lineæ, & inde figuras, vel aliud quidpiam enasci concipiamus, adeout Problema sit propositio, in qua alicuius sectionis, aut figuræ ortum, vel idgenus alia doceamur. *Problema quo sensu aliquid operandum præscribat.*

Ad hæc illud accedit quod si desideretur adhuc aliqua constructio circuli descriptioni persimilis; organa quidem non desunt, quibus eleganter atque concinnè linearum hæc alia genera summa facilitate perficere nobis licet, vnde non obscuri nominis Geometræ Veterum sententiam damnant, atque contemnunt.

Nec multum negotij nobis facessit aliorum ratio quod Geometrica dicantur illa Problemata, in quorum effectione tantummodò lineæ rectæ, circulique peripheriæ, vel circuli ipsi adhibentur, propterea quod simplicissimæ sint quantitates; hoc enim nullius roboris est argumentum; numquam enim id mihi persuadere potui Geometram tantum in contemplatione simplicissimæ quantitatis occupari, cum potius communi Sapientum calculo eius credantur esse partes quantitatem continuam quæcumque illa sit prout sibi rationem mensuræ, & mensurabilis vendicat sua persequi contemplatione: quo non fine magno veritatis lucro nobis Geometriam ipsam promouere licuit, eandemq; rebus Physicis innumeris aptare, dummodò mensuræ, mensurabilisque rationem obtineant. *Alteri occurritur difficultati.*

Multoque minus videntur scitè locuti, qui propterea detestantur lineas, quas magni fieri contendimus, quoniam Geometria à motu præscindit, atque adeo fieri non poterit, vt in linearum meditatione versetur, quæ ab implicato motu alicuius puncti originem trahunt, vt Conchoides, Helica, Cissoides, &c., atque etiam aliæ, quæ profectò certo numero minimè comprehenduntur; hoc autem nullius est momenti; quinimò licet cum Satyrico exclamare. O quantum est in rebus inane. Nec mirum, cum id ad pauca respicientes pronuncient. Nonne aduertunt circuli ortum huiusmodi esse, vt lineæ rectæ extremo vno fixo, ac immoto, alterum autem in orbem vertatur? Nonne etiam fatentur Sphæram solidam esse figuram procreatam ex semicirculi reuolutione circa stantem diametrum, cui nomen axos inditum est, donec eo redeat, vnde discesserat? Nonne etiam conum, atque cylindrum per motum explicare consueuere, dicentes illum procreari si rectus fuerit, ex motu trianguli rectanguli circa latus vnum immotum adeo, vt ab hypotenusæ motu conica superficies procreetur, perpendiculo stante tanquam axi, & eiusdem trianguli basi circumuoluta ipsius coni basis, nempe circulus oriatur? Quod si scalenus extiterit eodem modo etiam per motum generatur. *Improbatur alia ipsorum interpretatio.*

Perperam verò interpretantur ab omnibus receptum effatum; nimirum Geometram

Quo sensu Geometria à motu dicatur præscindere.

à motu perscindere, non enim sic illud vsurpes velim, quasi nunquam considerandum motum assumat. Vniuersa quidem Mathesis motum respuere dicetur, si tamen pro vt id cum veritate consentit, explicetur, vel enim nullatenus in contemplatione motus versatur, vt cum ex. gr. trianguli proprietates inquirit, sed etiam tametsi motum sua contemplatione persequatur, illum tamen considerandum assumit prout rationem mensuræ, & mensurabilis induit, quamobrem ab effectrice, ac fine, abstinet de quibus disserere Physici est, ità vt etiam Astronomia in contemplatione cælestium corporum occupata dici quodammodo possit à motu præscindere; cum non motus naturam quo pacto causam effectricem, ac finem respicit, à quorum consideratione Mathematicus animum auertit, sed potius in ratione mensuræ, ac mensurabilis illum sua contemplatione persequitur; Quinimò illud etiam addendum, nec ipsam rationem mensuræ, ac mensurabilis secundum propriam naturam considerare, sed quatenus motum in partes dispescimus, & secundum diuersas partitiones diuersa quoque symptomata meditamur.

Cognitio Physico Mathematica.

Non dissimulabo tamen illud, scilicet cognitionem, quæ non puram quantitatem ab omni materiæ concretione seiunctam perscrutatur, non tam Mathesin, quàm Physico-Mathesin esse dicendam.

Cur Problematum planorum solutiones Geometricæ dicantur aliæ non ita.

Cæterum superest adhuc inquisitione dignum, cur planorum Problematum solutiones Geometricæ dicantur, aliæ verò non item; id verò non inde putes originem ducere, quoniam rectæ lineæ, itemque, & circularis in Geometricis Elementis Definitiones traduntur, cum tamen conicarum linearum nulla quidem commemoratio habeatur, alioquin, vt placuit etiam Souero nihil præter Elementa Geometricum foret, quod absurdum æque putandum, ac illud, nihil præter Elementa Physicum esse. Nec etiam, vt superius aduertimus, quoniam circuli vnico circumductu circini determinantur, quod in sectionibus conicis non permittitur, propterea quod instrumenta non desunt, quibus ne dum Parabole, quam organicè describere iam Eutocius docuerat, cuiusdam instrumenti beneficio, cuius inuentionem Isidoro Milesio magistro suo refert acceptam, sed cæteræ quoque conicæ sectiones describuntur.

Causa iuxta Auctoris sententiam.

Non aliam propterea causam mihi suadeo, ob quam Planorum Problematum solutiones Geometricæ sunt nuncupatæ, quoniam operationes factæ per rectas lineas omnium primæ, ac simplicissimæ sunt, vndè Geometricæ dicuntur, non quod aliæ non ita sint, sed quia præ alijs ità dicendæ ob eam, quam attulimus causam.

Soueri sententia reijcitur.

Nec de his bene sentit Souerus dicendo Ellipsim, Parabolen, Hyperbolen æquè, ac Circulum in plano describi posse, vnde Problemata earum beneficio soluta æque ac alia dicenda sint plana; nulla profectò consecutio, cum plana non dicantur Problemata, quoniam circulus, per quem soluuntur in plano describitur, sed potius quoniam ex plano suũ ducit ortum, cum videlicet alicuius lineæ rectæ vno extremo manente extremum alterum in gyrum agatur, at verò sectiones conicæ ex ipsius coni sectione à plano factæ originem trahunt, & earum perimetri non in plano, sed in conica superficie existunt. Quamuis autem huiusmodi lineæ in plano describi possint id nihil est; cum hoc sit earum origine posterius, nec Geometricè perficiuntur nisi ex illarum proprietatibus, quas ex cono deprompsimus, vndè Problematum solutiones per rectas lineas, & circulum factæ Geometricæ dicendæ sunt, non minus tamen, quæ per alia linearum genera.

Præoccupatio obiectionis.

Nec est cur vrgeas dicendo circulum etiam ex solidis enasci, cum ex sphæra, cono, cylindro per sectiones oriatur, quinimò triangulum, quod coni sectione per axem plano transeunte fit, vt parallelogramum sectione cylindri acto plano per axem, circulus enim ex solidis ortum non ducit, tametsi enim sphęræ, coni, & cylindri sectione exhiberi possit, tamen hoc est posterius natura, posterius inquam generatione illa, quam in plano consequitur, quod euidentissimum deprehendes cum sphæra ex circumuolutione ipsius circa axem producatur.

Cur Aduersarij decepti sint.

Eos tamen fefellit, vt opinor minus accurata consideratio, cum ad aliam disciplinam pertinere non posse reliqua linearum genera preter rectam scilicet, & circularem sectiones conicas, & alias ab implicato motu alicuius puncti nascentes, ac reliquas ordinis persimilis, quàm ad ipsam Geometriam non aduertissent, nec operæ pretium de illis tractationem inire considerassent; cum tamen vtrumque sit exploratum, linearum enim omnium Geometrica consideratio est, & cum singulæ sua habeant attributa, quę Geometrica diffe-

differendi ratione oſtendi, demonſtrarique poſſunt, quo nihil prohibet in Problematum effectionibus adhiberi; tametſi enim innumera Problemata ſint, quibus fit ſatis opitulantibus lineis recta, & circulari, tamen non omnia quidem eius ſunt indolis, cum potius nullo ſint numero comprehenſa, quę ad ſui effectionem aliarum linearum ſymptomata requirant.

Nec ſatis quorundam conſilium mihi probatur, quibus adeò ariſit Geometrica effectio ab interſectione lineæ rectę cum circulari petita, vt aliam omnem exploſerint, alicui ſiquidem lineæ ſic attributa conueniunt, vt alterius naturę minimè ſint accommodata, quo neceſſe eſt Problemata quędam ità illi eſſe addicta, vt per aliud lincę genus reſolui non poſſint. *Reijcitur quorundam conſilium.*

Quamobrem non ſemel admiratione ſum captus, quòd plerique tam pertinacem laborem pertulerint in quorundam Problematum effectionibus, vt eas per minus proprium lineę genus perficere niterentur; ità profectò qui triſectionem anguli rectilinei mediantibùs circulo, lineaque recta abſoluere contenderunt, & qui inter duas datas, duas alias medio loco proportionales in continua ratione eadem via reperire conati ſunt; non ſecus ac per rectam, & circularem cuicumque Problemati fieri ſatis poſſet. *Quorundam inſcitia.*

Mirum autem in modum commoueor, quod apud quoſdam Problematis illa partitio locum obtinuerit in Mathematicum, & Mechanicum μηχανὴ Gręcis idem eſt, ac artificium, ſiue mauis adminiculum, quo quis ad aliquid efficiendum vtitur, & ſi etiam accipi poſſit pro machina, μηχανικὸς fabricandarum machinarum peritus dicitur, quamobrem μηχανικὴ τέχνη. Ars mechanica dici conſueuit; propterea generatim μηχανικὸς opifex dicitur, eorum, quę ingenio ſimul, & manu perficiuntur, atque μηχανητικὸς dicitur machinas fabricandi peritia pręditus, at ſi rem, in cuius conſideratione verſamur, ſedula meditatione perpendamus nil minus in ea μηχανῆς adinueniri comperiemus, circulum enim, de quo Geometra tractationem inſtituit, nec vllum figuræ genus, cuius conſiderationc detinetur, nec lineam vllam, in cuius meditatione eſt occupatus, deſcribere, vel perficere nobis licet. Mechanicum quidem eſt hæc opitulante circino moliri, ſed non ea ſunt, in quorum contemplatione ſe ſe Mathematicus labor exercet; plauſu quidem excipitur circinus, vtpotè machinula ſatis expedita, cuius pręſidio circulum in plano deſcribere cuique licet, ſed mirum eſt quantum inconſideratè voces effutiant; Geometra quidem negligit circulum illum, quo tantum vtitur ad facilius, ac promptius animi ſenſus promendos, cum aliàs intellectu omne linearum, omneque figurę genus deſcribendum velit; nec admittendum ab vniuerſa Matheſi quamlibet conſtitutionem ſolo rectarum, & circulorum ductu, hoc eſt, vt aiunt, ſola circini, & regulæ opera perfici. *Refutatio partitionis Problematis in Mathematicum & Mechanicum.*

Parum verò perturbat animum Plutarchi auctoritas, quod in Marcelli vita Problema nondum mechanicè ſolutum appellet ἄλογον, quod nondum rationes numericas exhibet, vndè nequit ἐπιλογίζεσθαι, vt contra λογικων και πραγματικων αποδιξιν, nimirum Epilogiſmum, & numerorum rationes ſecum ferat, id quidem mechanicum eſt pręſtare, ſed non magis, quàm circulum deſcribere circino, & vel ſectà diametro ipſius circuli ex puncto in eà aſſumpto rectam perpendicularem ad peripheriam ducendo tres adinuenire proportionales magnitudines dato extremarum aggregato, vt igitur illud, ita & hoc mechanicum Plutarco eſſe debuiſſet; ſed vt mechanicè non ille dicitur Problema ſoluere, in cuius effectione circulum adhibet, quia non is eſt circulus, qui circini opitulatione perficitur, nec recta linea, quam regula deſignamus, cum de his Mathematicus ſuam non inſtituat tractationem; ſic nec mechanicè ſolutum Problema dicas in effectione, cuius aliquod aliud lineę genus pręter circuli peripheriam adhibetur. *Occurritur Plutarchi auctoritati.*

Quod ſi Plato, vt accepimus, machinulas odio habebat, non ideò profectò, quia cęterа linearum genera negligenda putaret, ſed quia timebat, ne poſteritas huiuſmodi machinulis contenta greſſum ad altiora, ſublimioraque remoraretur; ſecus autem ſentientibus errandi quidem occaſio fuit, vt ſibi perſuaderent id à Mathematicis conſiderandum aſſumi, quod manibus, vel inſtrumentis cuiuſque generis non ſola mente, ac imaginatione perficitur. *Platonis conſilium explicatur.*

Illud itidem in hoc multum habet momenti, quod ijs Problema videbatur Propoſitio, in qua quidem moliri aliquid docemur, & tamen longè aliter ſagacioris Philoſophi ſentire eſt, cum inter Theorema, ac Problema diſcriminis illud intereſſe videatur, quod etſi *Quorundam deceptio.*

vtraque

vtraque Propositio sit, in qua veritas demonstratione comparatur, tamen in Problemate veritas sic ostenditur, vt ortum, vel alicuius figuræ, vel sectionis quantitatis, rerumque similium ostendat, generationis modum declarans; secus Theorema, quod veritatem respiciens in ea ita sistit, vt generationis modus intra limites Mathematicos tamen indè non constet, ita sit vt Problema quoque cognitio sit contemplatrix, nec practici rationem obtineat, cum nobis inferuire nequeat veluti norma ad operandum, si quidem id operari nobis denegauit natura, quod si practici rationem sibi adhuc vendicare notitiam putes tametsi nobis desit operandi facultas dummodò notitia illa apta sit sui natura ad operandum dirigere; falsum profectò supponis, propterea quod cognitio esse non potest de modo, quo nos operationem aliquam exerceamus, si modus hic nobis desit, pratica tamen dicetur Mathesis secundum partem, in qua eo modo, quo nobis licet operari dirigimur ad operandum.

Qua ratione aliqua demõstratio dicatur Mechanica. At Mechanicum, non semper defectum, vel vitium designat sed aliquando Mechanica nobilissimam disciplinam significat, quæ Geometriæ, non secus ac Optica, &c. subiungitur, & vt vulgò dicitur, subalternatur; atque huius est Architectonices præscribere, ac demonstrare effectum, qui intenditur necessariò ex præscriptorum executione consequi. Plerumque idem nomen significat Artes famulatrices, quæ nimirum dominæ subseruiunt, quo pacto ammittit non nihil decoris, illiberale quidpiam denotans. Verùm illud est animaduersione dignum, nimirum demonstrationem aliquam dici posse Mechanicam, & Geometricam, priori modo, si in ipsa fuerint assumpta principia illius scientiæ, quæ Mechenica dicitur, cuiusmodi sunt principia æquiponderantium, quatenus in ea admirabiles effectus ostenduntur; huiusmodi enim demonstratio, vtpote illa, quæ innititur principio desumpto ex Disciplina Mechanica, non secus ac aliqua demonstratio diceretur Musica in qua principia Musica forent assumpta, vel Optica si in ipsa assumerentur Optica principia. At verò Geometrica demonstratio erit, in qua principia Geometrica assumuntur.

Archimedis ratiocinium explicatur. Quando igitur. Archimedes contexit demonstrationes de quadratura paraboles mediante principio Mechanico nempe pertinente ad disciplinam de æqueponderantibus, dicitur procedere Mechanicè; non quod vtatur instrumentis, atque machinamentis, atque adeo demonstratiuè non procedat; sed quia demonstrationes illas perficit deductas ex principijs pertinentibus ad scientiam de æquiponderantibus, ac proinde ad scientiam Mechanicam. Quod si hæc non tam Mathematica, quam Physico-Matematica dicenda fuerit, etiam demonstratio, atque adeo tractatio integra inde deducta, huiusmodi dicenda erit.

Illud tamen cuique sit exploratum in his disciplinis notitiam quamcumque demonstratione comparatam scientiæ rationem obtinere, vndè de rebus, quibus insunt symptomata, vel per causam, vel per aliquid illis concomitantia coniunctum, vel per proprietatem, demonstrentur.

Omnia ferè Problemata in Geometria aliqua præparatione egent. Ceterum omnia ferè Problemata in Geometricis proposita quadam præparatione indigent, qua facta si quispiam naturali quadam ingenij alacritate, dexteritate, atque solertia, aut facultate, vsu, exercitationeque comparata consequentiarum seriem protrahere feliciter valeat, vndè fuerit id consecutus quod ad effectionem Geometricam conducat, non erit cur ad hanc differendi Artem confugiat, cum effectionem ipsam per Elementa haud operosè demonstrare possit; at si longam illam consecutionum seriem protrahere eousque non possit, donec Geometricæ effectionis notitiam assequatur, statim hanc Matheseos partem adeat, eiusque vtatur præsidio, tunc primò cum illa consecutionum series defecerit. Præcipuum quidem Analytices Artis munus hucusque creditum est constructionem, non demonstrationem præscribere, quòd nimirum Artifex suis vteretur præceptis, vt Problematis constructionem assequeretur, deindè neglectis Analyseos vestigijs demonstrationem habitis per Elementa iam medijs, contexeret. Verùm hoc nos non exigui laboris experti sumus; propterea omnes ingenii neruos contendimus, vt vtrumque suppeditetur ab Arte, quod in nostro Promoto Geometra apertè constabit.

Propositionum cuiusque generis artificiosa tractatio cuiusmodi sit. Verùm in propositionum cuiusque generis artificiosa tractatione siue Theorema, siue Problema sit, potissima demonstrandi methodus, & via est, quæ dictante natura sit obuia, qua videlicet à principijs, & elementis cuiusque disciplinæ proprijs per consequentias deductas componendo, Syntheticè progrediendo ad propositi confirmationem proceditur; vndè compositiua methodus appellari consueuit. Verùm sæpe, ac sæpius vsu venire solet,

vt

vt Artifex in Problematum resolutione, præsertim eorum, quę fortuitò resoluenda exhibentur medijs ad resolutionem, ac demonstrationem conficiendam idoneis destitutus à disciplinę principijs, ac Elementis synthetica via ad Problematis resolutionem ratiocinatione comparandam gressum facere non possit, propterea cum id perpetuò ferè contingat, necessitate adactus retrogradam, naturalique contrariam capessit viam; siquidem initio ducto ab ignota quadam, ac incerta quantitate ad ipsum Problema conducente veluti nota, & manifestè assumpta plurium consecutionum serie in resoluendo progreditur, quoad in assumptę quantitatis illius, veluti datę quomodocumque ea sit, cum quantitate certa, ac data ęqualitatem incidat, vndè artificiosè hunc in modum ea quidem inuenta, de qua quęritur quantitas, vel per se manifestè prodeat, vel vlteriori quadam industria demum eruatur, atque tandem oblato Problemati factum sit satis; hęc verò methodus est, quę ἀναλυτικὴ hoc est Resolutiua nuncupatur, ad quam oportet ab ijs esse paratum, quę in Elementis traduntur.

Redeamus vndè discessimus. Locorum alij quidem sunt ἐφεκτικοί, hoc est in se ipsis tantum consistentes, vndè puncti locus dicitur punctum, superficiei superficies, solidi solidum. *Locorum partitio.*

Alij verò dicuntur διεξοδικοί, hoc est se se extrà tendentes, vndè puncti locus est linea, lineę superficies, superficiei solidum. *Loci in seipsis consistentes.*

Locorum rursus, qui in resoluto Loco, alij quidem positione dati ἐφεκτικοὶ dicuntur, alij verò plani, & solidi, & lineares. *Loci se se extra tendentes.*

Loci διεξοδικοὶ sunt punctorum alij, & alij ad superficiem ἀναστροφικοὶ quidem punctorum loci dicuntur διεξοδικοὶ autem linearum, Plani autem Loci sunt quicumque sunt rectę lineę, vel circuli. *Loci positione dati. Alij plani solidi, & lineares loci alij sunt punctorū alij ad superficiem.*

Solidi verò Loci quicumque sunt conorum sectiones, Parabole, Ellipsis, vel Hyperbole. *Solidi Loci.*

Lineares Loci quicumque sunt neque rectę, neque circuli, neque aliqua dictarum coni sectionum. *Lineares Loci.*

De Demonstratione, qua Resolutio perficitur.

ET quoniam de Resolutione agitur; prestabit ob id nònnihil perpendere naturam demonstrationis, qua Analysta vtitur in resoluendo, quod vt assequi nobis liceat iuuabit inquirere medium, quo Artifices atque adeò Mathematicus in suis demonstrationibus perficiendis vtuntur. Qua in re consulendi sunt Dialectici, quorum doctrinam prout ad pręsens attinet institutum paucis perstringemus. In dicendorum gratiam redigere in memoriam oportet vniuersę Philosophię partitionem, quam duplicem Veteres fecerunt; Prima est, qua in Naturalem, Moralem, & Dialecticā distribuitur, vbi Naturalis fusa quadam significatione, vndè nomen consequitur, nedum Phisiologiam, sed etiam Methaphysicā, & Mathematicas Disciplinas complectitur; Hęc Platoni commendata est Philosophię partitio, quòd ad humanam felicitatem ipsa dirigatur, quę in actione virtuti consentanea partim, & partim in veritatis contemplatione posita est; quamobrem ex Disciplinis vnam esse oportet, quę honesti rationem contineat, & ad virtutem, ac morum probitatem humanum animum erudiat, quę Moralis dicitur; item & aliam, quę Naturę sacratiora mysteria perscrutetur, ac in solius veritatis indagandę studium incumbat, rerumque causas perquirat, vt quę, & qualis res ipsę sint declaret; hęc verò Physica nuncupatur. At cum intellectus humanus commemoratas Disciplinas disserendo adipiscatur, ob sui autem imbecillitatem, dum id conatur perficere, non rarò deceptus errore minus benè sua munera obeat; erat proindè operę pretium, vt Ars quędam institueretur solerter prouidens, ne veritas falsitati succumberet; hęc Rationalis est, quam Dialecticam appellant. *Vniuersa Philosophia partitio. Qua Platoni esset plausibilis.*

Alia quoque partitio Philosophię contemplatricis inualuit, qua scilicet ipsa in Methaphysicam, Phisiologiam, & Mathematicas Disciplinas diuiditur, hęc tamen sint persunctoriè dicta; Ad scientiam consequendam nobis demonstratio inseruit, quarum vna per causam proximam, & adęquatam, veluti per medium ad conclusionem demonstrandam procedit; altera, quę non ità, sed vel per effectum causam esse demonstrat, siue effectus cum causa sua reciprocetur, vbi ex negatione, vel affirmatione ipsius causam negare, vel affirmare licet; siue fuerit effectus, qui non reciprocetur cum causa, sed vel à causa exce- *Alia contemplatricis Philosophię partitio.*

dit,

Multiplex demonstratio. ditur, atque tunc ipso effectu ad affirmatiuam demonstrationem contexendam vtimur; ad negatiuam autem non ità. Vel causa ab effectu exceditur, atque tunc demonstratio negatiua per effectum, veluti per medium conficitur. Hoc idem demonstrationis genus per causam remotam contingit, ità vt non per propriam effectus ostendatur; Remota verò causa dicitur quæ inadæquata est, & quidem dum excedit effectum à negatione causæ negationem effectus colligere licet. Si verò exceditur ab effectu affirmatiuè à positione causæ ad positionem effectus concluditur; non præteribo tamen remotam causam bifariam vsurpari, vel vt ab immediata, & proxima distinguitur, ità tamen vt adæquata sit conuertibilis cum effectu; vel vt contra distinguitur ab inadæquata, & non conuertibili.

Huiusmodi demonstrationis genus explicatur. Contingit prætereà huiusmodi genus demonstrationis cum perficitur medio illo quod necessariò connectitur cum alio, ità vt se mutuò consequantur; non tamen se habet, vt causa, & effectus, dicique consueuit à concomitanti; vt si quis ex intellectu voluntatem inferat, ad hunc demonstrandi modum spectare videtur inductio, nempè progressio à particularibus sufficienter enumeratis ad vniuersale, vbi particularia posteriora sunt, vniuersale verò natura prius. Demonstratio autem ad impossibile conducens videtur ad vtrumque demonstrationis Genus reuocari posse pro conditione, quo vtitur medij. Cæterum demonstratio per causam nos docet propter quid res sit, cum alia faciat nos tantummodò scire, quod res ipsa sit.

Proponuntur consideranda demonstrationis principia. Consideranda sunt autem ipsarum demonstrationum principia, est autem demonstratio per causam procedens proximam, & adæquatam vtque alij addunt per propriam, & immediatam causam, sed per propositionem notam ex terminis conclusionem ostendens bipartitò definita, primò enim dicitur Syllogismus faciens scire, vbi per scientiam intelligi debet proprijssima, per causam verò intelligenda est illa, quæ in essendo dicitur, aliàs Definitio posset aptari demonstrationi procedenti ab effectu, huiusmodi verò causa siue sit propria, quarum vna Physica dicitur, alia Metaphysica, siue virtualis, quæ propriè causa non est, sed sic se habet in ordine ad aliud, quod si illud causaretur, non nisi ab illa causa proueniret, vt incomprehensibilitas Dei ab eius infinitate dicitur proficisci, est igitur causa, de qua loquimur, in essendo quæ etiam in cognoscendo est. Dicitur quoque Syllogismus constans ex veris, primis, & immediatis prioribus, notioribus, & causis conclusionis; siue hæc sit Definitio, siue conditionum enumeratio, illud perspicuum est sic se habere demonstrationem, quæ per causam procedit, etsi aliæ quoque conditiones requirantur, vt quod præmissæ sint necessariæ de omni per se, & secundum quod ipsum, de quibus hic nonnulla dicenda, cumque demonstrationis principia sit operepretium explicare, primò de eorum necessitate discurrendum.

Demonstrationis principiū. Principium demonstrationis est Propositio Immediata, qua scilicet alia prior non est per quam demonstretur, sic se habet hæc propositio, Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt æqualia. Duplex est verò propositio Immediata, quarum vna dicitur Dignitas: altera verò nuncupatur Positio; duplex igitur est demonstrationis principium, nempè Dignitas, & Positio, Dignitas est Propositio immediata, & indemonstrabilis, quam præcognoscere oportet ad aliquam scientiam addiscendam, ita se habent Propositiones per se notæ; dicuntur autem Dignitates, quoniam propter maximam euidentiam suam dignæ sunt, vt ab omnibus tanquam veræ concedantur; dicuntur quoque Maximæ, quoniam ad quamplures Propositiones ostendendas inseruiunt, sic in Metaphysica se habet illa, De quolibet verum est affirmare, vel negare, de nullo ambo, vt cuicumque perspicuum est. In Physica Deus, & Natura nihil frustrà molitur, in Mathematicis omne totum est maius sua parte; *Exempla ad id opportuna.* vbi illud aduerte è principijs quædam esse communia, & quædam propria, principium siquidem generatim sumptum Propositio est vera, & necessaria indemonstrabilis, vel absolutè, vel saltem in ea scientia, vbi tanquam principium recipitur; sub hoc autem continetur, velut sub genere principium proprium, & commune, proprium est illud, quod principium est tantummodò in vna scientia, quæ potest pluribus aptari, ut autem communia principia Dignitates vocantur, ita propria in Suppositiones, ac Definitiones diuiduntur, quæ quidem ambæ positiones appellantur, Positio enim Propositio est, quam non oportet antea scire, sed sufficit vt in ipsa scientia tradatur, suntque duæ ipse subiecti prenotiones, de subiecto siquidem prenoscendum est quod sit, & quid sit, vt verò subiectum est proprium ipsius scientiæ, ità quidem eiusdem hæc esse principia propria necesse

necesse est, ita in Geometria. Principium proprium erit. Punctum esse, Lineam esse, &c. estque suppositio subiecti in Geometria, vt in Arithmetica vnitatē esse; quoniam verò suppositio non solùm accipit rem esse, vel non esse, quo pacto dicitur suppositio, & pręcognitio incomplexa, siue simplex, sed etiam accipit interdum in subiecto aliquid inesse, diciturque suppositio, & pręcognitio complexa, vt in Geometriâ, omnes anguli recti sunt inter se æquales, & lineæ rectę productę ad eandem partem in qua anguli sunt minores duobus rectis, tandem concurrunt. Definitio accipit quid res sit, vt in Geometria Linea recta est, quæ ex æquo sua interiecet puncta. Principium commune dicitur, quod pluribus scientijs inseruire potest, cuiusmodi est illud, Si ab æqualibus ęqualia demas, quæ remanent sunt æqualia. Omne totum est maius suâ parte, Impossibile est idem esse, & non esse, & id genus alia. Huiusmodi principia communia ad varias scientias contrahuntur, si videlicet vsurpentur contracta ad materiam vnius, vel alterius scientiæ. Ita planè Geometra vtitur hoc principio; Omne totum est maius suâ parte, contrahendo illud ad quantitatem continuam, eodemq; vtitur Arithmeticus per contractionē ad quantitatem discretā. Principium autem proprium diuidi consueuit in Suppositionem, Petitionem, Quęstionem, & Definitionem. Quid suppositio sit constat ex dictis. Suppositionis autem nomen ignorationem in auditore significat; ideò siquidem Doctor aliquid supponit, quia putat discipulū ignorare; non enim necessario hęc suppositio nota est discenti; qui igitur docet ignorans num discipulo id perspectum sit, vel non, illud supponit, ne si negetur ad disciplinam illam sine fructu accedatur. Est etiam animaduersione dignum, quod si huiusmodi fuerit principium, vt statim atque à docente proponitur discipulus præstet assensum, tunc propriè suppositio dicitur; quandoque contingit, vt discipulus audiens non statim assentiatur, sed vel in ancipiti versetur, vel in contrariam sententiam sit propensus, tunc principium dicitur Petitio, siue Postulatum, Doctor enim postulat, vt id credatur, cum absque eius admissione nullus addiscenti pateat ad disciplinam aditus; vndè facilè constat differentiam inter suppositionem, & petitionem, non quidem in re, sed in nobis esse constitutam, eadem enim Propositio respectu discipuli annuentis, appellatur Suppositio, respectu verò non annuentis Petitio nuncupatur; nihil tamen prohibet Suppositionem, ac Petitionem ipsam in alia scientiâ demonstrari, etsi non in illâ, in quâ tanquam principium assumitur, vt in Geometriâ constat, de postulato huiusmodi, A quouis puncto ad quoduis punctum lineam rectam duci posse; quamuis enim Geometra illam non probet, sed postulet, vt sibi concedatur, in Physicis tamen ostenditur. Quæstio est Propositio demonstrabilis, licet non demonstretur, & à discipulo non conceditur, imò negatur quousque illi demonstrata fuerit. Definitio explicat rei naturam, & quamuis Propositio non sit, siquidem ex genere, & differentiâ absque copula constat, tamen oratio est indicans, & explicans rei naturam, diciturque Positio, vt superius traditum est, siquidem initio scientiæ ponitur. Sed cuiusmodi Principia esse debeant demonstrationis, videamus.

Scientiarum principia declarentur.

Principium cōmune quid.

Principiū proprium in quę diuidatur Suppositio, Petitio, Quęstio, Definitio.

Suppositio.

Petitio.

Quęstio.

Definitio.

Primò igitur demonstrationis principia (de complexis verò sermo est), necessaria esse debent, ut aliter se habere non possint, atquè adeò sempiternę sint veritatis, conclusio enim, ac scientia de necessarijs cum sit, principia quoque huiusmodi esse debent; tametsi enim ex falsis pręmissis contingat aliquando colligi veram conclusionem, & ex non necessarijs necessariam; tamen id fit non tanquam ex falsis, & non necessarijs, alioquin effectus foret nobilior causâ, vel eo quod se habet veluti causandi ratio, non inquam colligi contingit velut ex falsis, & non necessarijs, sed propter ratiocinandi formam.

Qualia esse debeant demōstrationis principia.

Tres recensentur necessitatis gradus, quorū primus est Propositionis, quam Logici de omni nuncuparunt, quæ quidem est, in qua prædicatum dicitur de quolibet contento sub subiecto, & pro quolibet tempore; vt cum dicitur Omnis homo est coloratus, non sic se habet hęc, Omnis homo disputat, cū nō de omni contento sub homine dicatur, nempè de quolibet indiuiduo, seu singulari humanę naturę; Ita pariter hęc propositio, Omnis homo comedit destituta est huiusmodi necessitatis gradu, cum non pro quolibet tempore verificetur.

Secundus gradus necessitatis est propositionis, quę dicitur per se, huiusmodi autē illa est, in qua pręedicatum subiecto conuenit per se, & non ex accidenti; In cuius gratiam aduerte duplicem esse pręedicationem, quarum vna directa, & naturalis dicitur, eaque contingit, cum id, quod à parte rei subijcitur, est etiam propositionis subiectum, & quod illi inest in re, in ipsâ propositione locum obtinet pręedicati, vt hęc se habet, Homo est animal; alia

verò eſt prædicatio indirecta, & non naturalis, quæ videlicet oppoſito ſe habet modo, vt ſi quis diceret, animal eſt homo.

Primus modus neceſſariæ prædicationis ſecundus.

Primus neceſſariæ prædicationis modus eſt, cum prædicatum eſt definitio, vel ingrediens definitionem ſubiecti, vt cum diuinus, Homo eſt animal rationis particeps, vel Homo eſt animal. Secundus eſt cum ſubiectum eſt de definitione prædicati, huiuſmodi tamen eſſe debet, vt non pars ſit eſſentialis, ſed ſe habeat, vt additum, & inter illa ſit habitudo cauſæ ad effectum, non quidem cauſæ materialis, ſed efficientis, non cuiuſcumque, ſed illius, quæ per emanationem nuncupatur; ità cenſetur ſe habere ſubiectum reſpectu propriæ paſſionis, vt homo reſpectu riſibilitatis; paſſio quoque de inferioribus proprij ſubiecti affirmatur, vt cum generis affectio de ſpecie, vel ſpeciei de indiuiduis enunciatur; at verò non licet inferioris paſſionem per ſe de ſuperiori enunciare, ità fit, vt hæc Propoſitio Animal eſt riſibile, Numerus eſt par, Linea eſt recta, non ſit per ſe; Verum enim verò paſſiones inferiorum ſub diſiunctione per ſe prædicantur in ſecundo modo de ſuperiori, vndè rectè dicimus Numerus, vel eſt par, vel impar, Linea vel eſt recta, vel curua.

Tertius.

Tertius verò modus dicendi per ſe, qui etiam modus per ſe eſſendi dici conſueuit, variè ſolet explicari; ſi enim ſumatur, vt excludat modum eſſendi in alio, velut in ſubiecto, ſiue actu, ſiue aptitudine, ſubſtantiæ tantummodò conuenit; quod ſi excludatur modus eſſendi in alio, velut in inferiori, conueniet tantummodò primæ ſubſtantiæ.

Quartus.

Quartus modus dicendi per ſe eſt potiùs modus per ſe cauſandi, quàm per ſe prædicandi, enumeraturque inter modos per ſe cauſandi, hiſque contingit cum in ſubiecto includitur proxima ratio inhærentiæ prædicati, etſi inter ipſum ſubiectum, & prædicatum non ſit neceſſaria habitudo, ſed ſit potiùs contingens, vt cum dicitur voluntas vult, iugulatus interijt; Triſariam autem contingit, primò cum effectus formalis prædicatur de ſubiecto mediante ſuâ causâ formali, vt cum dicimus Homo eſt albedine albus, albus enim eſt formalis effectus albedinis, quâ mediante de homine prædicatur; Secundò quando actus egrediens à ſuâ causâ formali, de formali effectu prædicatur illius cauſæ eâ mediante, vt cum dicimus album albedine diſgregat; interfectum interfectione interijt; eſt enim interire actus interfectionis; quemadmodum diſgregare eſt actus albedinis, & effectus interfectionis eſt eſſe interfectum, vt eſſe album eſt formalis effectus albedinis. Tertiò cum effectus de ſui immediato principio prædicatur, vt cum dicimus intellectus intelligit.

Quot modi dicendi per ſe, totidem dicendi per accidens.

Quot autem modi dicendi ſunt per ſe, totidem modi ſunt dicendi per accidens; Primus cum prædicatum non facit ad eſſentiam, atque naturam ſubiecti; vt ſi quis dicat Homo eſt riſibilis; quamuis enim hæc propoſitio dicatur per ſe in ſecundo modo, non tamen in primo, ſed per accidens. Secundus cum prædicatum non ſolum non facit ad ſubiecti naturam, ſed nec eius eſt proprietas, ſeu attributum, vt cum dicitur Homo eſt albus; Tertius quando de accidenti prædicatur eſſe, ſitque propoſitio de ſecundo adiacente, vt albedo eſt. Quartus, cum effectus non prædicatur de ſuâ per ſe causâ, ſed de aliquo illi accidentariè coniuncto, vt ſi quis dicat Muſicus ædificat, accidit enim ædificatori vt ſit muſicus. Tertius neceſſitatis gradus eſt, quod Propoſitio non ſolum ſit de omni, & per ſe, ſed quòd vniuerſaliter prædicetur; vbi illud occurrit animaduertendum, quod prædicatum vniuerſale vnum eſt, quod dicitur de omni per ſe, & ſecundum quòd ipſum, nempè quod primo conuenit ſubiecto, & ſecundum quod ipſum, ideſt adæquatè, & conuertibiliter; ſic ſe habet hæc propoſitio, Homo eſt riſibilis; riſibilitas enim adæquatè conuenit homini, & conuenit illi quatenus homo eſt, cum ipſo reciprocatur, ità vt omnis homo ſit riſibilis, omne riſibile ſit homo; non ſic ſe habet homo eſt ſenſibilis, cum ſenſibile non conueniat homini quatenus homo, ſed quatenus animal eſt; nec etiam hęc Homo eſt animal, cum animal non reciprocetur cum homine; commemoratę igitur propoſitiones non ſunt de prędicato ſecundum quod ipſum. Triſariam verò contingit errare circà prędicatum vniuerſale, ſeu ſecundum quod ipſum; Primò ſi exiſtente vno tantum indiuiduo alicuius ſpeciei putet quiſpiã prędicatũ per ſe, & vniuerſale ipſius ſpeciei conuenire indiuiduo quatenus tale eſt indiuiduũ, vt ſi quis ſibi perſuaderet huic Lunę quatenus hęc Luna eſt conuenire poſſe eclipſari. Reliqua nempè ſecundum, & tertium modum vide apud Dialecticos.

Quæ requiruntur ad principia demonſtrationis.

Commemorauimus igitur neceſſitatis gradus, quos Dialectici melioris nominis ad principia demonſtrationis requirunt; ſolum illud ſupereſt obſeruandum, nempè ſecundum & primum pręſupponi ab vltimo, propterea quod Propoſitio de pręsdicato vniuerſali

li est per se, & de omni, at verò secundus præsupponit primum, non contrà; illud præterea est animaduersione dignum, non omnes modos prędictos necessitatis demonstrationi inseruire, sed primum, & secundum tantummodò, in quibus videlicet prędicatum nunquam potest subiecto non inesse, inficiandum tamen non est aliquandò etiam quartum vtilem esse, tertium verò dumtaxat cum de subiecto existentia demonstratur, & quoniam omnis disciplina discursiua fit ex prçexistenti cognitione, nempè omnis cognitio illatę propositionis, & conclusionis prçsupponit cognitionem alterius Propositionis inferentis, vti sunt prçmissę, in quibus virtualiter conclusio continetur, siquidem discursus illatio est alicuius ignoti ex notiori; propterea ad consequendam notitiam conclusionis demonstratiuæ quædam præcognoscenda sunt, vt termini, prçmissæ, quæ ex ipsis componuntur; aliqua igitur sunt prçcognita, atque adeò de ipsis quædam præcognoscenda sunt, vbi aduertendum prçnotionem sumi posse, vel quatenus dicit cognitionem necessariò prçrequisitam ad notitiam alterius, vel quatenus est obiectum huiusmodi cognitionis, quo pacto ad rem facit in prçsentia, vndè significat modum, quo res aliqua ab intellectu cognoscitur, huiusmodi verò modi sunt numero quinque, nempè quid nominis; An res sit: Quid res sit: Qualis res sit: & propter quid res sit. Quorum posterior priorem supponit, quia verò modus præcedens comparatione subsequentis est prçcognitio, & qui sequitur est quæstio, propterea quid nominis semper erit prçcognitio, vltimus verò erit quæstio, & nunquam prçcognitio; ità fit, ut numero quattuor sint modi prçcognitionis, etsi ad duos facilè reuocentur, etenim quid est, & quod est pertinent ad primum modum, qui subdiuitur in quid est nominis, & quid est rei; secundus verò quod est diuiditur in quod est simplex, & incomplexum, quod significat esse rei, vel essentiæ, vel existentiæ, siue potentialis, siue actualis & in quod est compositum, atque complexum, idque significat propositionis veritatem. At verò præcognita tria sunt subiectum, passio, & principium, de his prçcognoscimus quæ diximus, nempè quid est, & quod est: & quidem de dignitate, siue principio prçcognoscendum est quod sit complexum, nimirum quod sit verum, de passione prçcognoscendum est quid nominis, & aliquando etiam quod sit incomplexum, hoc est eius existentia, denique de subiecto prçcognosci debet quid nominis, quod sit, & quid rei, propter quod rei definitio in potissima demonstratione medij rationem obtinet. Ad Philosophiæ partitionem superius allatam redeuntes quibus medijs vtatur Philosophia reliquum est, vt perpendamus quibus medijs vtatur naturalis Philosophia, itemque Philosophia Diuina, quæ prima dicitur, atque tandem Mathesis.

Ad primam illam, quod attinet nullus videtur ambigendi locus quin ipsa quatuor causarum genera adhibeantur tamquam media demonstrationum, quibus vtitur in veritatibus ostendendis, idque facilè cuique persuasum erit, si animaduertatur res naturâ constantes à quatuor causarum generibus dependere, vt igitur res se habet ad esse, sic etiam ad cognosci, quamobrem rectè licebit inferre quatuor illa causarum genera adhiberi in demonstrationibus contexendis de rebus naturalibus, cum res ipsę à quatuor illis generibus dependeant, atque adeò naturalem Philosophum commemoratis causis vti in demonstrando, siquidem res illas naturam habentes sua contemplatione persequitur, quod non ità vsurpandum, quasi in qualibet demonstranda conclusione singulas illas causas adhibeat, sed quoniam à toto genere vtitur quatuor illis causarum generibus, etsi non per quatuor ipsas causas singulas conclusiones ostendat; quamuis enim aliquando id prçster, id tamen non est opus cum conclusionem aliquam ad genus vnum, alteram per genus aliud ostendere commodissimè possit. *Philosophia naturalis quatuor vtitur causarum generibus.*

Ad primum Philosophum quod attinet in confesso est apud omnes ab eo considerari causam agentem, atque mouentem, non motam, itemque finalem causam, atque adeò hęc duo genera causarum ab eo adhiberi posse in demonstrationibus perficiendis; quoniam verò conceptus exprimens rei naturam formę rationem obtinet hoc sensu ab eodem formalem causam in demonstrando vsurpari non immeritò concedi poterit; non propterea tamen dicendus erit vti causa formali, quç à Philosopho naturali adhibetur; ità pariter & subiectum huiusmodi rationi formali respondens, medij apud ipsum in demonstratione locum obtinebit; cuiusmodi tamen non est illud, quo naturalis vtitur Philosophus, qualis est materia, quam etsi ille quoque, vt speciem contentam sub eo, quod adequatè sua persequitur contęplatione cōsiderat, non tamē vt principiū generationis pro vt induit mu- *Methaphysi. ex quibus medijs vtatur.*

 tationis

tationis rationem quo pacto sub naturali cadit contemplatione.

Demonstrationes Mathematicæ.

In Mathematicis Disciplinis longè magis; quàm in cæteris locum obtinet demonstratio, non exigua tamen est difficultas in explicando cuiusmodi sint eæ, quæ perficiuntur demonstrationes; non enim defuerunt, qui demonstrationes eas esse negarint, re tamen verà introspecta natura discursus, quo Mathematicus vtitur, facilè constabit quid sit hac in re sentiendum, & vt à certis, ac manifestis exordium ducamus, satis, vt opinor, cuique compertum esse potest non adhiberi à Mathematico quodlibet genus causæ in demonstrando, vt à Physico, sed tantùm illud genus causę, quod intrà limites proprię abstractionis coercetur; itaque demonstrationes contexit, vel per genus causę formalis, ad quod pertinet subiectę rei definitio, vel per genus causę materialis, ad quod reducitur pars integralis, vel tandem per aliquod concomitans, quod passim ab ipso fieri solet; Sic igitur se habent, quę in Mathematicis disciplinis adhibentur demonstrationes, directè concludentes, cum alioquin etiam in huiusmodi disciplinis locum habeat demonstratio ducens ad inconueniens; non est autem hic locus opportunus ad inquirendum num Mathematicę scientię rationem sibi vendicent, id enim alibi tractandum; interim supponendum ijs maximè ipsius scientię rationem conuenire; ac proinde in ipsis veras demonstrationes contexi.

Proponitur considerando diligenter Theorematis, & Problematis natura.

Quid intersit discriminis inter Theorema & Problema.

Quoniam verò plurimùm conducere ad ea, quę sequuntur, aduertimus diligenter introspicere Theorematis, ac Problematis naturam; propterea non erit abs re si de his nos aliqua in medium afferamus. Altiùs tamen hoc argumentum repetendum videtur, atque adeò operę pretium est adnotare quid intersit discriminis inter hęc. Illud autem cuique perspectum est Mathematicorum demonstrationem omnem ab antiquis diuisam fuisse in Problema, & Theorema. Problema quidem vocant illam demonstrationem, quę iubet, ac docet aliquid constituere, vndè si quis demonstrare contendat suprà finitam lineam rectam constitui posse triangulum ęquilaterum, huiusmodi demonstrationem Problema appellant, quoniam docet quà ratione triangulum ęquilaterum suprà rectam lineã finitam constitui debeat; hoc autem demonstrationis genus creditur dictum Problema ob similitudinem cum Problemate Dialectico; vt enim apud Dialecticos ipsos Problema dicitur quęstio, cuius vtraque pars contradictionis probabilis est, cuiusmodi est quęstio An mundus ex ęternitate sit, an in tempore productus, non dissimiliter quęsitum illud apud Mathematicos quo aliquid iubemur construere, & cuius etiam contrarium effici potest Problema nuncupare consueuerunt; vt si quis demonstrandum assumat supra lineam rectam finitam triangulum ęquilaterum constitui posse; propterea quod, & triangulum, nimirum isosceles, vel scalenum suprà eandem lineam constitui nihil prohibet; quemadmodum etiam, qui rectam lineam terminatam bifariam instituit diuidere nobis Problema exhibet, siquidem & recta ipsa linea diuidi quoque potest in partes non ęquales. Illud tamen inter hęc Problemata discriminis intercedit, quod Problematis dialectici vtrauis pars contradictionis suscepta probabilibus rationibus tantùm confirmetur, ità vt intellectus versetur in ancipiti, cui nam ex illis assensum prębeat, vtpote vexatus probabilibus argumentis vtrinque; vtra enim illarum ad veritatem propius accedat, ignorat; secus verò Problema Mathematicum se se habet; quęcumque enim fuerit pars demonstranda suscepta, ità firmis rationibus confirmatur, vt nulla supersit dubitandi ratio, nullusque dubitationi sit locus; vndè cum Geometra sibi proposuerit diuidendam lineam bifariàm; id quidem firmâ ratione perficiet, euidentique argumentatione comprobabit, nec dissimiliter se geret in diuidendo lineam aliquâ aliâ ratione, & non bifariàm.

Problema apud Dialecticos.

Problema apud Mathematicos.

Quid intersit inter Problema Dialecticum & Mathematicum.

Theorema Mathematicum.

At verò Theorema Mathematicis ea est demonstratio, quę solùm passionem, attributum, vel proprietatem vnius, vel plurium quantitatum simul perscrutatur; quęque per propriam causam de re proposita passionem ipsam ostendit; quamobrem erit quidem Theorema demonstratio illa, quà ostenditur triangulum constare tribus angulis, qui ęquales sunt duobus rectis; seu vniuscuiusque trianguli tres angulos ęquales esse duobus rectis; quandoquidem non iubemur quicquam construere per huiusmodi demonstrationem, sed tantummodò ab eà docemur causam propter quam triangulo prędictum insit attributum; vndè cum in ipsius veritatis contemplatione sistat; factum est vt Theorema dicatur, nomen enim istud Gręcis idem sonat quod Latinis contemplatio. Ex his autem intelliges facilè non idem in Theoremate, quod in Problemate contingere. In hoc enim,

vt

vt ſuperiùs animaduerſum fuit, nihil prohibet, quin vtraque contradictionis pars vera ſit; quinimò ſic per Problema iubemur aliquid conſtruere, vt etiam oppoſitum, atque contrarium effici etiam poſſit, quod ex hactenus dictis perſpicuum cuique eſſe poteſt; quamobrem ſi quis proponeret triangulum conſtituere, cuius duo latera reliquo ſint maiora quomodocunque aſſumpta; non Problema, ſed Theorema, etſi in formam Problematis proponeret; irridendus tamen propterea quod vtraque contradictionis pars vera eſſe non poteſt. Secus autem de Theoremate dicendum; ſi quis enim oſtenderit; Si duę rectę lineę ſe mutuò ſecuerint, angulos ad verticem ęquales inter ſe efficere, nullatenus fieri poterit, vt commemorati anguli, qui ſunt ad verticem, ſint inter ſe inęquales. Et ſi quis demonſtratione firmauerit triangulum illud ſibi vindicare attributum, quod habeat tres angulos ęquales duobus rectis, nunquam oppoſitum eueniet, videlicet vt huiuſmodi tres anguli ſint duobus rectis inęquales. Hęc autem adeò vera ſunt, vt in eorum confirmationem nil addendum ſuperſit. Solùm id ſilentio pretereundum non crediderim, quòd quę de Problemate diximus adeò ſunt vera, vt ſi Problema non ſic ſe haberet, rationem Problematis ammitteret, Theorematis induens naturam. Non me latet Problema etiam per modum Theorematis concipi, enunciarique poſſe; tunc autem ſic eſt enunciatio ipſa efformanda, vt non amplius vtraque contradictionis pars vera eſſe poſſit. Constructio enim Problematis ad modum Theorematis concipitur, ac demonſtratur; vndè in reſolutionibus Poriſma, quod peractâ Problematis reſolutione ex ipſâ reſolutione deducitur, in formam Theorematis proponi, demonſtrarique poteſt; vt ſi proponeretur *Datum latus ità ſecare, vt rectangulum ſub partibus aquale ſit ei, quod à differentia partium ſit quadrato,* Inſtitutâ reſolutione beneficio ſpecioſę Logiſtices, eaque peractâ Poriſma illud emergit. *Quadratum totius lateris ſecandi quintuplum eſt quadrati differentiæ partium* Quod per modum Theorematis enunciabitur. *Si latus ità ſecetur, vt rectangulum ſub partibus aquale ſit ei, quod à differentiâ partium ſit quadrato; quadratum totius quintuplum eſt quadrati differentiæ partium.* Id ſolum intereſt quod in reſolutione Problematis cum peruentum fuerit ad effectionem a poriſmate indè deducto pręſcriptam; compoſitio, ac demonſtratio retrogrado ordine procedit repetitis reſolutionis veſtigijs; quod ſi per modum Theorematis, vt dicebamus, ipſius Theorematis compoſitio, ac demonſtratio eodem ordine directo, quo reſolutio, perficitur. Quà de re plura nos infrà dicemus; interim tamen exploratum illud eſto, videlicet in Problemate partem vtramque contradictionis veram eſſe poſſe, at in Theoremate nequaquam. Illud porrò commune eſt vtrique, nempè propoſitio, quod vtrumque, ſiue Problema, ſiue Theorema ſit, nobis aliquid proponit.

Problema per modum Theorematis enunciari poteſt et contra.

Constructio Problematis ad modum Theorematis concipitur ac demõſtratur.

Exemplum ad idem.

Propoſitio deducta ex Poriſmate, per modum Theorematis enũciatur.

Hęc tamen ſi diligentiùs introſpiciamus comperiemus nondum ſatis explicata fuiſſe; proptereà quod tametſi problema conſtruendum aliquid pręcipere videatur, tamen cum Mathematicę Diſciplinę, & ſpeciatim de Geometriâ loquendo non ſit de lineis, vel figuris, quas nos deſcribimus, cum id potius fiat a nobis adiuvandę imaginationis gratiâ; non tam credendum eſt per problema aliquid conſtruendum pręcipi, quàm potius explicari ortum alicuius rei pertinentis ad id, de quo in illa Diſciplina diſſeritur; non enim nobis, vel lineam ducere, vel illam ſecare, vel idgenus alia perficere datum eſt; ac proindè ſatis intelligi non poteſt à problemate nobis iniungi rerum ſimilium conſtructionem, quę in noſtrâ poteſtate non eſt, ſed potius explicari ortum alicuius ſectionis, vel figure, & rerum conſimilium, ità vt perindè ſit, vt id aliquo nos illuſtremus exemplo, iniungi triangulum ęquilaterum ſuper terminatam lineam deſcribere, ac eſt proponi ortum ipſius trianguli ęquilateri inquirendum, adeò vt per huiuſmodi problema non doceamur triangulum ipſum ęquilaterum efficere ſuprà datam rectam lineam terminatam deſcriptis circulis, ductiſque lineis quemadmodum in primâ Elementorum explicatur propoſitione, ſed potius doceamur qui nam ſit ortus ipſius triãguli ęquilateri, quo pacto nimirum ſe habeat ortus trianguli ęquilateri ſuprà datâ rectam lineam terminatam, quod in problematibus omnibus licet obſeruare. Hoc igitur ipſius problematis proprium eſt; theorematis verò paſſionem, ac proprietatem de ſubiecto demonſtrare. Quod ſi aliquando contingat problema in formam theorematis concipi; tunc quidem cognitio ipſa non ſic erit circa ſuũ obiectum occupata, vt rei ad id genus pertinentis ortum explicet immediatè, ſed potius de re ſubiecta paſſionem, vel attributum oſtendat, ad eum modum, quo paulò ſuprà fuit breuiter à nobis inſinuatum, ita vt Theorema in rei alicuius quatenus aliquâ paſſione aſ-

Non dum hactenus dicta ſatis ab alijs explicata fuerunt.

De quibus Geometria diſputet.

Quid Problema præſtet.

Exemplum.

fectæ

fectæ contemplatione versetur, Problema verò prout res ipsa suum ortum subit.

Finis Problematis et Theorematis.

Ex his profectò licet intelligere finem Problematis constructionem, vel inuentionem esse sensu iam explicato; Theorematis verò cognitionem causæ proprietatis cuiusque, eius nimirum, quæ propositæ inest quantitati. Ad maiorem tamen explicationem non grauabimur hic ea subijcere, quæ à maioribus accepimus nonnulla afferentes in medium, è quibus haud mediocriter innotescunt, quæ superius attulimus. Obseruandum est igitur problema, vel theorema perfectum si fuerit sex constare partibus, cuiusmodi sunt Propositio, Expositio, Determinatio, Constructio, Demonstratio, Conclusio. Propositio dicit, atque proponit aliquo dato quid quæsitum sit. Et quidem perfecta Propositio ex his duobus constat, dato nimirum, & quæsito. Expositio ipsum per se datum assumens ad quæsitum præparat, atque disponit. Determinatio verò seorsum quæsitum ipsum, quod nam sit, explicat. Constructio ea, quæ dato desunt ad quæsiti peruestigationem, ac venationem, adijcit. Demonstratio peritè ex concessis, quod est propositum, colligit. Conclusio tandem ad propositionem rursus industriosè regrediens, confirmat, quod ostensum, ac demonstratum fuit. Problema itaque omne, omneque Theorema perfectum, expletumque suis partibus, omnibusque numeris absolutum commemorata hæc apud Mathematicos in se ipso habere in confesso est. Non hæc tamen omnia veluti necessaria prorsus in quocumque Problemate, vel Theoremate reperies. Sed quæ cuique ex ipsis necessariò insunt Propositio, Demonstratio, atque Conclusio sunt. Primùm enim oportet quæsitum cognoscere, deindè illud idem per media ostendere, atque demum ostensa concludere; horum igitur nihil, vt deesse potest, ità & reliqua, vt sæpè assumuntur sæpè verò cum nullam habeant vtilitatem adiunctam, ommittuntur; plurima siquidem Problemata extant, in quibus nec determinationem, nec expositionem vllam reperies. Nec pauca sunt Theoremata, in quibus constructionem adinuenire non liceat; cum satis, superque sit expositio nullà constructione, quæ alioquin præparatio dici consueuit, vt ex Datis propositum demonstretur. Id verò contingit, cum in propositione nullum est Datum, non enim propositio omnis tam necessariò ex dato, & quæsito constat, vt perpetuò id ità fit, cum potius plerumque solum quæsitum ipsum cognoscendum, atque comparandum dicat. Illud autem cauendum, quod aliquando Propositio quamuis explicitè ex dato, & quæsito non constet, implicitè tamen constat, in quo plerique videntur decepti non aduertentes Datum in aliqua propositione, quòd illud clarè non exprimatur, cum tamen si propositio ipsa accuratiùs introspiciatur, deprehendere liceat eam non solum quæsitum, sed etiam Datum in se se cohibere. Determinatio verò, ac expositio tunc planè contingit, cum propositio ipsa vtrumque illud habet, deficiente verò Dato, & Expositio deficiat necesse est, cum hæc ipsius sit Dati, vndè Determinatio eadem est, quæ Propositio, quamobrem omittitur, ne fiat eadem, quæ ipsa propositio. Passim verò in Arithmeticis huiusmodi occurrunt problemata, cuiusmodi foret illud; *Duos reperire numeros quadratos, quorum differentia sit numerus quadratus*, Itemque in Geometricis præsertim, vbi de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differitur. vt illud. *Duas rectas lineas potentià commensurabiles reperire, quæ medium comprehendant*. Quomodo autem aliquid datum esse dicatur suo loco de Datis agentes explicabimus; pluribus enim modis contingit, vel nimirum positione, vel proportione, vel magnitudine, vel specie; neque quicquid datur hisce omnibus modis intelligendum dari, cum aliquid positione dari possit, alijs verò modis non possit, vt punctum; de his tamen loco suprà citato disserendum. Illud porrò non prætermittam constructionem variari pro varietate positionis, illud insuper addendum, vt multiplex est Datum, & multiplicem quoque expositionem esse, vndè si quatuor modis Datum aliquid esse dicatur, & quatuor quoque expositionis modos necessariò esse, hoc est vt quadrifariàm Datum contingit reperiri, sic & expositionem quadrifariàm fieri posse necesse est, etsi quandoque duos, imò & tres modos complectatur. Demonstratio verò non rarò ex definitionibus medijs quæsitum ostendit, plerumque autem ex ijs, quæ naturæ lumine innotescunt, veritatem colligit. Ad hæc conclusio in duplici discrimine est, quarum vna particularis, altera verò vniuersalis dicitur; in dato siquidem conclusionem facientes ne particularia proposuisse videamur ad conclusionem vniuersalem gradum facimus.

Nonnulla efferuntur, quæ à maioribus tradita fuerunt.

Problema, vel Theorema, si perfectũ extiterit sex constat partibus.

Propositio è quibus cõstet.

Expositio.

Determinatio

Constructio.

Demõstratio.

Conclusio.

Supradicta non sunt omnia necessaria in omni Problemate, vel Theoremate.

Propositio plerumq; etsi non constet explicitè ex dato, & quæsito; constat tamen implicitè.

Determinatio, ac expositio, quando contingat.

Datum pluribus modis contingit.

Constructio variatur pro varietate positionis.

Quotuplex datum totuplex expositio.

Demonstratio qualis.

Conclusio duplex particularis vna, vniuersalis altera.

At si præter dicta de Problemate, ac Theoremate maioris eruditionis gratià licet in

medium

medium afferre; non erit illud dissimulandum Problematis partes has quidem esse dicendas, nimirum si fuerit aliquid datum; primam ipsius hypotheseos Explicationem; secundam Constructionem, seu quæsiti deprehensionem; tertiam etsi non necessariò, aliquandò tamen contingere, Præparationem ad ipsam demonstrationem contexendam, quintam Demonstrationem, quâ videlicet ostenditur methodo adhibitâ quæsitum necessariò adinueniri, sextam Conclusionem. Vt verò hæ sunt Problematis partes, itâ & quæ sequuntur Theorematis esse existimandæ sunt. Primam explicationem, siue Datorum hypothesin, secundam Explicationem quæsiti, tertiam etsi non necessariam plerumque tamen contingere Præparationem ad demonstrationem ipsam; quartam Demonstrationem, quâ manifestum fit passionem, ac affectionem de quâ quæritur inesse ijs, quæ proponuntur; quintam Conclusionem.

Problematis partes sex numerantur, ac explicantur.

Theorematis partes.

Ad hæc accedit Lemma, quod propriè sumptio dicitur, ac in Geometricis est propositio fide indigens; cum enim vel in constructione, vel in demonstratione sumimus aliquid eorum, quæ ostensa non sunt, ratione tamen indigent, tunc quod sumptum est veluti per se ambiguum inquisitione dignum arbitrati Lemma ipsum appellare consueuimus. Differt autem à Postulato, & Axiomate, cum hoc absque vlla demonstratione ad aliorum fidem faciendam per se quidem vsurpetur; illud autem non sumitur, nisi demonstratione firmatum, adhiberique solet ad ostendendam aliquam præmissam, vt Quæsiti demonstratio breuior euadat.

Lemma quid.

Datur etiam, & Casus, qui differentes constructionis modos, & positionis mutationem indicat transpositis nimirùm punctis, vel lineis, vel planis, vel solidis, vndè varietas ipsius propriè circà descriptionem versatur, & inde sumpsit propriam nomenclaturam, atque dictus est casus, quòd constructionis sit transpositio.

Casus quid.

Corollarium verò propriè dicitur, cum ex demonstratis aliquod aliud Theorema apparet, quod propositum non est, itâ dictum quòd sit veluti lucrum quoddam accedens ad demonstrationis propositum, vndè est consectarium quoddam ex peracta demonstratione tanquam aliquod lucrum, collectum.

Corollarium quid.

Porisma, vt huic simile quidpiam vsurpari consueuit, de hoc tamen infrà. *Porisma quid.*

Sequitur instantia, quæ cursum orationis impedit constructioni, vel demonstrationi occurrens non admittenda, sed remouenda, vt falsa. *Instantia quid.*

Deductio transitus est quidam à proposito Problemate, vel Theoremate ad aliud, quo cognito, atque comperto illud etiam, quod propositum est, apparet. *Deductio quid.*

Ad Porisma quod attinet, cuius paulò suprà meminimus, de quo tractationem huc distulimus; in confesso est apud omnes illud vsurpari pro eo, quod excogitatur, vt corollarium, seseque habeat veluti Theorema, quod obiter à priùs demonstratis resultat, & astruitur, ac veluti lucro apponitur τῆς ἀποδείξεως additamentum. De hoc nonnulla scribit Pappus initio Libri septimi dicens post tactiones sequi Euclidis Porismata tribus voluminibus, contenta, aitque opus esse artificiosissimum, ac perutile ad resolutionem obscuriorum Problematum.

Porisma explicatur.

Quid sit Resolutio, & quid Compositio Mathematica.
CAP. I.

Resolutio non eodem modò definiri solet. Apud Arist. 3. Ethic. c. 3. Resolutio est continuata causarum perscrutatio, & si eo in loco Philosophus de consultatione sermonem habeat, quæ posito fine, consultamus, & deliberamus de medijs; quod facimus resoluendo vsque ad vltimum medium, vltimum in resolutione, & primum in executione. Vnde Eustratio nil aliud videbatur Resolutio, quàm à fine ad principium ascensus; quando videlicet sumpta conclusione demonstrationis, primùm ea, quæ continenter, ac proximè ad hanc confirmandam adhibita fuerunt, assumimus; deinde ea, quæ ijs proximè antecedunt, tum superiora, alia, atque ita deinceps, donec ad principium ipsum ascendamus; ex quo rursus descendendo per eosdem gradus compositionem facimus, adeò vt, quod in vno progressu erat principium, in alio finis euadat. Hęc eadem dici quoque solet ab vltimo, ad initium progressus; Insuper inquisitio causarum veræ conclusionis

Resolutio varijs modis definiri solet.

clusionis propositę. Prętcrea eorum, quę secunda, & ex illis proficiscuntur ad superiora, & priora conuersio. Item ad id, quod est prius, & est causa compositionis, reflexio. Est tandem dissoluti o rei in ea principia, ex quibus dependet.

Resolutio, alia realis, & alia rationis.

Cęterum resolutio alia realis, alia rationis; Realis, quę fit in re per actionem aliquam realem, vt cum resoluitur realiter mixtum in quatuor elementa; Rationis, quę conuenit rebus per aliquam operationem intellectus; Vt si quis resoluat aliquid mente in ea, è quibus realiter constat; Itaut duplex sit resolutio, alia quidem naturę, alia verò mentis, seu rationis.

Resolutio rationis duplex altera practica, altera speculatiua. Resolutio speculatiua triplex Methaphysica, Mathematica, & Logica.

Resolutio rationis duplex altera practica, altera speculatiua. Practica est, quę proposito fine operabili, eousque media inquirit ad illum finem conducentia, quousque ad aliquod primum à nobis efficiendum perueniamus; & hęc propriè consultatio, seu deliberatio dicitur. Resolutio speculatiua, quę non terminatur ad opus, sed solùm ad cognitionem. Triplex autem censetur Metaphysica, Mathematica, & Logica. Metaphysica est, quę à formis sensibilibus ad intelligibiles procedit, quę Platoni resolutio amatoria dicebatur. Resolutio Mathematica est conclusionis in principia, à quibus pendet. Logica est, qua resoluitur syllogismus in suas pręmissas. Mathematica autem illa dicitur resolutio, non quia sola fit apud Mathematicos in vsu, sed quia ab ipsis frequentiùs vsurpatur. Aduertendum est autem resolutionem illam Mathematicam, non idem esse ac demonstrationem, aliud enim est resoluere conclusionem in principia, & aliud demonstrare conclusionem per principia. Illud porrò discriminis intercedit, quod per illam resolutio instituitur rei alicuius in principia à quibus realiter pendet. Hęc autem est qua fit resolutio syllogismi in pręmissas, & ea à quibus dependet formaliter in ratione discursus, seu ratiocinationis generatim acceptę.

Analysis tribuitur Platoni tanquam auctori.

Plato ille diuinus fertur omnium primus hanc Geometricam analysin, siue resolutionem inuenisse, & ab ipso Laudamantem Thesium eam didicisse, eiusque ope tot Mathematicas demonstrationes perfecisse. Pappus autem Alexandrinus initio libri septimi Mathematicarum Collectionum perspicuè testatur hàc de re verba fecisse Euclidem, Apollonium, & Aristeum seniorem, quorum opera nunc desiderantur.

Quid verò sit Analysis, seu Resolutio Mathematica, quid Synthesis, seu compositiò docemur ab Euclide in Scholio propositionis primę Libri xiij. Elementorum, cuius verba sunt hæc,

Quid vt resolutio Mathematica explicatur.

Resolutio est sumptio quæsiti tamquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod verum & concessum. Huius autem definitionis hic est sensus. Resolutio est discursus quo Theorematis veritatem, vel Problematis possibilitatem inuestigamus. Est autem duplex resolutionis genus, quorum vnum ad Theoremata pertinet, cuius finis est sola veritatis inuestigatio: alterum autem ad Problemata spectat; si quidem construere docet, & ad constructionem demonstrandam methodum expeditam suppeditat; itaque in ipsa resolutione quod quęritur, vt iam existens, & vt verum constituentes per ea, quæ consequuntur deinceps, & ad aliquod concessum procedimus, atque ità conclusionem in suas causas, suaque principia nos artificiosè resoluimus, quibus ipsamet conclusio demonstrabitur. Si quęsitum est Theorema assumimus illud tanquam verum: cum autem est Problema assumimus illud tamquam factum; hoc est supponimus illud esse verum, hoc autem esse factum, atque adeo possibile, ex quà suppositione discurrimus per ea, quę ex suppositis deducuntur, donec occurrat aliquod verum, & concessum; nam signum est etiam concessum verum esse, vel possibile, cum verum non nisi ex vero sequatur in bona materia, & forma: hęc autem omnia nos exemplis explicabimus. Compositionem definitam reliquit idem Euclides eodem loco dicens.

Quid compositio, &c.

Compositio est sumptio concessi per ea, quæ consequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem. Cuius definitionis sensus est, quòd sumpto illo vero inuento retrogrado ordine demonstrando, progredimur, & ipsius demonstrationis compositionem facimus ratiocinantes ex illo vero inuento ad quæsiti conclusionem. At si falsum, vel impossibile occurrat signum est quæsitum falsum esse, vel impossibile, cum falsum non nisi ex falso, & ex falso non nisi falsum in bona materia, & forma sequatur, quod exemplis inferiùs illustrabimus.

Cęterum ad resolutionem quod attinet; animaduertendum est in illo progressu à quęsitis

tis ad concessa nos bifariam procedere posse. Vel enim probationes ita procedentes concessa ponunt, & hę resolutiones propriè nuncupantur; cum resolutio quęsiti sit assumptio tamquam concessi; vel sunt probationes, quę concessa destruunt, & hę deductiones ad impossibile dicuntur. *Est enim Deductio ad impossibile assumptio eius, quod quæsito contradicit tamquam concesso per consequentia ad id, quod vero concesso opponitur.* In hoc enim probationis genere, quod quęsito contradicit sumimus, quo supposito progredimur, donec incidamus in aliquod absurdum per quod destructa suppositione id confirmetur, quod ab initio erat in quęstione.

Deductio ad impossibile.

Duplex est autem resolutionis, atque compositionis methodus. Antiqua nimirum, & noua: Antiqua methodus procedit ad quęsito deducendo ea, quę inde consequi cognoscuntur ex Elementis; deinde regreditur in componendo, quod exemplis nos explicabimus. Ad hoc autem pręcipuè conducit, maximeque confert illud Euclidis opus Datorum quemadmodum inferius videbimus de Problematum resolutione tractantes.

Duplex methodus resolutionis, atq; compositionis. Methodus antiqua.

Methodus verò noua procedit in resoluendo, & componendo innixa Algebrę speciosę artificio, vt ex infrà dicendis perspicuum fiet. Methodus antiqua tàm in Theorematibus, quàm Problematibus resoluendis, & componendis ità procedit, vt ordine retrogrado per Analyseos vestigia componat. Sed noua Methodus tantùm in Problematum compositione regreditur, nam in Theorematibus demonstrandis eodem ordine, quo in resolutione incedit. Hęc omnia manifesta fient exemplis.

Methodus noua.

Hoc etsi in omni, in noua tamen præcipuè resolutione maximè commendabile est, quod apertè constructionem, siue Geometricam doceat effectionem; adeo vt ex Analysi ipsa effectio deducatur, quę deinde per regressum obseruatis Analyseos vestigijs, demonstretur. Quod cum non intelligeret impudens quidam sycophanta, qui se tamen iactabat Philosophum, & Mathematicum egregium, irridebat Analystam quendam non ignobilem, quòd se constructionem cuiusdam Problematis adinuenisse diceret, cum nondum se demonstrationem contexisse, affirmaret; Ita quidem ille, & quid Analysis sit, & quid Synthesis ignorans, hunc ineptè locutum existimabat. O quam bene in eum quadraret Terentianum illud. Facit nimis intelligendo, vt nihil intelligat.

Quid maximè commendabile in vtraq; methodo.

Redeuntes tamen velut in orbem sermonis; cum priùs de Analyseos, atque Syntheseos natura dissereremus vtriusq; definitionem attulimus, quam iterum non pigebit accuratiùs perpendere, vt facilior aperiatur via ad Problemata, ac Theoremata resoluenda. Iam ex eodem Pappo retulimus Locum resolutum propriam quandam esse materiam post communium Elementorum constitutionem ijs paratam, qui in Geometricis sibi comparare volunt vim, ac facultatem inueniendi Problemata ipsis proposita, vbi etiam, & Theoremata intelligenda sunt, cum vtrique Propositionum generi resolutiua Ars inseruiat. Erat autem Resolutio, vt superius explicatum fuit, via quędam à quęsito tanquam concesso per ea, quę deinceps consequuntur ad aliquod verum concessum; siquidem in resolutione id, quod quęritur tanquam existens, & vt verum ponentes per ea, quę deinceps consequuntur procedimus ad aliquod concessum; quid enim indè contingat consideramus, & rursùs illius antecedens, quousque progredientes incidamus in aliquod iam cognitum, vel quod sit è numero principiorum, quo opere conclusionem quęsitam in proprias causas, per quas demonstretur, reducimus; qui quidem processus Resolutio dicitur velut ex contrario facta solutio. His autem resolutionibus, compositiones opponuntur; licet enim à concesso illo per eadem resolutionis vestigia reperiri; in compositione siquidem per conuersionem ponentes tanquam iam factum id, quod postremum in resolutione sumpsimus, atque ordinantes secundum naturam ea antecedentia, quę illic consequentia erant, mutuaque illorum facta compositione, ad quęsiti finem peruenimus, & hic modus est, qui Compositio vocatur.

Accuratiùs perpenditur Analyseos, & Syntheseos natura.

Duplex verò resolutionis genus factum fuisse iam superius adnotauimus, alterum quidem, quod veritatem perquirit, & contemplatiuum nuncupatur, diciturque Theorematicum, cuius finis est sola veritatis inuestigatio, ibique sistit. Alterum verò, quo inuestigatur id, quod dicere proposuimus, vocaturque Problematicum, cuius finis est rationem constructionis, atque demonstrationis inuestigare; Construere siquidem oblata Problemata docet, atque viam ad constructionis demonstrationem ostendit. In Theorematico, atque contemplatiuo genere quod quęritur, vt iam existens, & vt verum ponentes

Duplex resolutionis genus.

per ea, quę deinceps consequuntur tanquam vera, & quę ex ipsa positione fiunt, procedimus ad aliquod concessum, quod quidem aliundè cum constet verum esse; verum erit, & quęsitum, & demonstratio nimirum in compositione resolutionis ex contraria parte respondens vera erit, quod si falso euidenti occurramus; falsum quoque, & quęsitum erit. At in Problematico genere, quod propositum est, vt cognitum, & vt factum ponentes per ea, quę deinceps consequuntur tanquam vera procedimus ad aliquod concessum, quod si fieri, compararique potest, (Datum autem id à Mathematicis dici consueuit,) etiam & illud, quod propositū est fieri poterit, atq; rursùs resolutioni ex contraria parte demonstratio respondens. Quòd si euidenti cuidam impossibili occurramus, & Problema itidem impossibile erit. Hoc autem genus concessa destruit, atque Deductio ad impossibile nuncupatur. Hęc enim est assumptio eius, quod quęsito contradicit tanquam concessi per consequentia ad id, quod vero concesso, opponitur; In ipsa enim deductione ad impossibile sumimus id, quod contradicit quæsito, atque id suppponentes progredimur donec in absurdum aliquod incidamus, per quod ipsa suppositione destructa, confirmetur, quod à principio quærebatur. Illud porrò cuique sit exploratnm resolutioni; & deductioni ad impossibile id commune esse, vt ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedat. Resolutio autem desinés in verum concludit verum esse, quod supponitur, at Deductio ad impossibile desinens in falsum, arguit falsum esse quod supponitur, ac ob id quæsitum verum esse; vndè tantum ratiocinatione discriminari videntur.

Aduertenda quadam. Quid intersit inter deductionem ad impossibile, & conuersionem.

Animaduertendum est autem non rarò confundi conuersionem syllogismi cum syllogismo ad impossibile, atque adeò demonstrationis cum demonstratione ducente ad impossibile; differunt tamen, nam deductio ad impossibile nullam supponit demonstrationem præcedentem, sed solùm supponit conclusionem probandam, & vt eam probet contradictoriam sumit, proceditque sumendo simul cum illa propositione aliam euidentem, quæ negari non possit, vel saltem ab eo non negetur, cum quo disputamus, & infert aliam euidenter falsam; hinc verò colligit præmissam aliquam esse falsam, quæ cum esse non possit illa, quæ euidens est, aut saltem concessa; necessariò erit contradictoria conclusionis probandę; quòd si illa falsa est, eius contradictoria vera erit, cum ex duabus contradictorijs vna necessariò sit vera; altera autem falsa.

Conuersione syllogizare quid. Conuersio quid.

At verò conuersione syllogizare, atque adeo etiam demonstrare; est ex opposito conclusionis, & altera præmissarum, alteram interimere; ex opposito igitur conclusionis, & altera præmissarū, sequitur oppositum alterius præmissæ, quoniam ex vna præmissa, ordinata cum alia, sequitur conclusio; quoniam destructo consequente, destruitur antecedens; Conuersio igitur supponit demonstrationem pręcedentem & contradictoriam, vel contrariam conclusionis assumit, itemque vnam ex pręmissis prioris syllogismi, postmodum infert contradictoriam, vel contrariam alterius pręmissę iam concessę.

Quid intersit inter ostensiuam demonstrationem, & deductionem ad impossibile.

Differt autem ostensiua demonstratio à ducente ad impossibile; primò ex parte propositionum, nam ducens ad impossibile accipit vnam tantùm propositionem veram, alteram autem falsam, putà contradictoriam conclusionis probandæ; ostensiua habet vtramque veram, & concessam. Secundò differt ratione conclusionis, quoniam in ostensiua non est necesse pręconcedere conclusionem, ac dicere illam esse veram, aut falsam; at in deducente ad impossibile concedendum est, vel conclusionem probandam esse falsam, vel eius contradictoriam veram.

Veteres ad resoluenda Problemata Datis vtebantur.

Veteres autem ad resoluenda Problemata Datorum Elementis vtebantur. Ex Datis enim ratiocinando factà aliquà constructione progrediebantur deinceps, vt data fierent, quæ alioquin deerant quousque tandem peruenirent eo, vt data essent omnia, quibus est opus ad Problema ipsum efficiendum, quæ quidem exemplis illustrabimus; hunc enim in modum resoluto quæsito in suas causas, per has deinde componendo, reuertebantur. In Theorematum autem resolutionibus progrediebantur ex vero quodam supposito factà aliqua præparatione, si opus est, donec aliquod verum offenderent non ex resolutionis vi, sed aliundè demonstratum, vt indè regredientes compositionem, atque demonstrationem contexerent. Vndè id licèt aduertere, quod in resolutione Problematum factum ipsum supponebant, quod quæritur, & ex datis curabant, vt fierent etiam data, ratiocinatione, quę deerant ad Problema ipsum efficiendum. At in resolutione Theorematum verum quod quæritur supponebant, vt indè contingeret ad verum aliquod concessum, peruenire,

vndè

vndè liceret ad componendum regredi.

Imitatione Theorematum Problemata resolui possunt.

Id tamen inficiandum non est, videlicet quadam imitatione Theorematum veteri methodo Problematum etiam resolutiones institui posse, supponendo scilicet factum esse, quod quæritur, & factâ aliquâ constructione processum instituere quousque perueniatur ad verum aliquod, vndè Problematis effectio constet. Ita quidem Archimedes lib. 2. de Sphæra & Cylindro. Vbi hoc interest inter resolutionem Problematis, & Theorematis, quod verum in hac occurrens concessum demonstratione firmatum esse debeat, non ex vi resolutionis comprobatum; non enim sufficeret, cum progressus sit à vero supposito,& non constanti; at in illâ videlicet in resolutione Problematis verum offendimus ad effectionem Problematis conducens non aliundè firmandum, nec aliundè constans, conducens ad effectionem Problematis, quoniam progressus est ex suppositione alicuius facti, quod verum est,constans, ac ratum, non autem ex hypothesi, quæ nos omnia pluribus exemplis reddere manifesta tentabimus.

Antiqua methodus in resolutione Problematum nititur Euclidis datis.

Quia tamen antiqua methodus in Problematum resolutionibus perficiendis præsertim innititur Euclidis Datis, horum enim notitia præhabenda est, alicuius Problematis resolutionem aggredienti; propterea visum est operæpretium ipsorum Datorum tractationem premittere, eo vel maximè, quod illa vulgata non parum commentarijs indigere videatur, vnde vbi opus erat multa quidem addidimus, ut quantùm fieri posset omnibus numeris absoluta redderetur.

Multa cōgesta à veteribus ad Locum resolutū spectantia.

Cæterum multa Veteres congesserunt ad Locum resolutum spectantia, inter quæ maximum habet momentum hæc ipsa Datorum consideratio; Datorum enim presidio Problematibus satisfaciebant, eorum scilicet resolutiones, & compositiones contexentes. Verùm alia resolutionis gratiâ fuerunt adinuenta, de quibus nonnulla scripsimus supra. Ne redarguas nos, quòd iam ab alijs exculta, quasi actum agentes, tractemus; si quidem nobis in animo est tractationem absolutam tradere, quod si quidpiam extiterit iam dudum explicatum, haud prætermittendum videbatur, vt non nisi ab alijs illibata in medium afferre videremur; id enim puerile ducimus, quòd se ita sentiat barbatus puer, nihil magni præter nominis magnitudinem habens, nostra nihil interest; meliori vescimur aurâ, manet illi altâ mente repostum iudicium ingenui animi; nobis eius plebeia calliditas, ac του χρυσου cupiditas αφατη.

Non nulli Mathematicas demonstrationes detestantur.

Non est alienum ab instituto parumper hìc expendere Mathematicas demonstrationes; easdemque vindicare à quorundam iaculis; tametsi enim Mathematicas disciplinas præstantissimas fateantur, earundemque demonstrationes in primo certitudinis gradu constitutas existiment; tamen has ipsas inficiantur sibi vindicare posse perfectæ demonstrationis naturam; re diligentiùs introspectâ.

Mathematica Disciplina demonstratiuè procedunt.

Dicendum potiùs Mathematicas disciplinas demonstratiuè procedere, earundemque demonstrationes eas esse,quales Ars resolutiua quidemexposcit. Et ex infra dicendis constabit, vt opinor ijs disciplinis scientiæ rationem accommodari posse.

Omnis demonstratiua scientia in tribus est occupata.

Omnis enim Disciplina in his tribus est occupata. Aristotelis testimonio, subiecto, principijs, & attributis; ita videlicet, vt principia subiecti perscrutetur & passiones ac attributa disquirat, adeò vt attributa ipsa de re proposita per principia demonstret. Cuiusmodi porrò disciplinas esse Mathematicas cuicumque perspectum erit, etsi vix eas è primo limine salutauerit; non erit ijs Disciplinæ ratio deneganda. In eo autem difficultas posita esse videtur quòd Mathematicæ Disciplinæ hunc in modum se habeant, adeò vt quod assumunt considerandum ita tractent, vt eius principia perquirant, eademque de re passiones ostendant;hoc itaque nobis operæ est pretium demonstrare;id autem vt assequamur,oportet in memoriam redigere demonstrationis præcepta in eius definitione contenta, quòd scilicet Demonstratio sit syllogismus constans ex veris, primis, immediatis, notioribus, prioribus, causisque conclusionis; si itaque Demonstrationes quibus Mathematicæ disciplinæ comparantur fuerint quales modò descripsimus; non erit ambigendum nè huiusmodi disciplinis scientiæ ratio sit accommodata.

Demonstrationes Mathematicæ rectè habent.

Demonstrationes verò, quibus Mathematicus vtitur huiusmodi esse nemini licebit inficias ire; siquidem percurrendo commemoratas conditiones id nobis facillimum est deprehendere; quod magis etiam constabit diluendo difficultates, quæ aduersus demonstrandi genus in Mathematicis consuetum afferri solent; cum aliàs satis superque perspicuum sit

harum disciplinarum demonstrationes constare ex veris, primis immediatis, notioribus, prioribus, caussisque conclusionis; saltem vt plurimùm; quod si aliquando ab effectu ad causam procedunt;non est ijs tantum dedecori attribuendum, vt quantum in hoc à Disciplinæ candore deficiant, tantundem in eodem certitudine, ac euidentia non assequantur.

Vexat igitur plerosque, vt hinc desumamus exordium, Platonis celebris auctoritas ex septimo de Republica, vbi habet.

Platonis locus in 7 lib. de Republica aduersus Geometriam.

Prima obiectio.

Αἱ δὲ λοιπαί, ἃς τοῦ ὄντος τι ἔφαμεν ἐπιλαμβάνεσθαι, γεωμετρίαν τε καὶ τὰς ταύτῃ ἑπομένας ὁρῶμεν, ὡς ὀνειρώττουσι μὲν περὶ τὸ ὄν. ὕπαρ δὲ ἀδύνατον αὐταῖς ἰδεῖν, ἕως ἂν ὑποθέσεσι χρώμεναι. ταύτας ἀκινήτους ἐῶσι, μὴ δυνάμεναι λόγον διδόναι αὐτῶν. ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε. τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ, ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι.

Versio Ficini.

Reliquæ vero quas diximus, verarum rerum quoquo modo participes esse, Geometria scilicet, eiusque comites, circa ipsam essentiam quodammodo somniant, syncerè autem quicquam ab illis cernere impossibile est tantisper dum suppositionibus hærent, easque ratas & immobiles adeò seruant, vt illarum rationem reddere nequeant. Nam vbi principium quidem ponitur id quod est ignorum, finis autem & media ex ignoto tracta, inuicem connectuntur: collectam inde assertionem quònam pacto scientiam vocemus?

Versio nostra.

Reliquas vero (artes) quas diximus entis aliquam partem attingere, Geometriam duntaxat, & eas quæ ipsam Geometriam comitantur, videmus somniare quidem circa ipsum ens, per veram autem visionem cernere non posse, quousque suppositionibus adhibitis immobiles eas sinunt, & nullam earum rationem reddere possunt, siquidem principium quidem ponitur id quod est ignotum, finis autem & media ex ignoto deducta copulantur, qui fieri potest vt huiusmodi assertio sit vnquam scientia?

Platonis sententia perpenditur.

Platonis enim consilium in eo positum esse videtur, vt doceat Geometriam, eiusque comites somniare circa id, quod considerandum assumunt; & quidem de Geometria ipsa loquendo, cùm hæc in quantitatis continuæ meditatione sit occupata, considerandam assumit abstrahendo illam ab omni materia, cùm tamen sic abstracta in natura non sit, ac propterea non introspicit eius naturam huiusmodi munus relinquens Physico, & Metaphysico, quorum ille contemplatur quantitatem, quatenus est corporis habentis naturam affectio; hic autem, prout species est contenta sub ente, quod velut adæquatum obiectum perscrutatur; ac ob id de ipsa, non secùs ac de alijs entis speciebus edisserit.

Platonis sententia explicatur.

Consilium enim Platonis eo planè tendebat, vt ostenderet Geometræ munus in eo positum esse, vt intra Matheseos fines contemplaretur quantitatem continuam, nempe considerando quid ea esset, & vnamquamq; speciem ipsius in ratione mensuræ, & mensurabilis, vt de eadem secundum eandem rationem proprietates ostenderet. Cum autẽ quantitas, in cuius contẽplatione versatur, sit quid spectabile secundùm rationes diuersas, à quibus Geometra, veluti Mathematicus intra proprios fines coercitus, abstinere debet, cõtentus ea tantum contemplatione persequi sua, quæ sibi sunt propria; propterea nequit quantitatem ipsam perscrutari, nisi secundum rationem mensuræ, & mensurabilis, secundùm quam attingi non potest quantitatis natura vndequaque, prout est in re, sed tantùm quatenus sub ea cadit consideratione, quæ Mathematici est propria; ita fit, vt Geometra naturam eius non assequatur secundum omnem rationem cognoscibilem; quemadmodum par esset ad intimiora eius principia cognoscenda, sed tantùm secundùm rationem mensuræ, & mensurabilis, vtpotè illam, quam sibi Mathematicus adsciscit.

Secunda obiectio à ratione petita.

Plerique demonstrationes Mathematicas damnant, veluti destitutas ijs conditionibus, quę ad veras demonstrationes requiruntur.

Secundò igitur, quod nonnullis aliquid negotij facessit est quod huiusmodi demonstrationes, quibus Mathematicus vtitur, non procedant per causas. Affertur inter cętera instantia de prima Euclidis propositione, vbi Geometra contendit ostendere Triangulum eo modo constructum per intersectionem circulorum, ęquilaterum esse, ac eius latera æqualia esse, quoniam sunt rectæ ductæ à centro ad circumferentiam; Dicunt enim, non ideò lineas illas ęquales esse, quia ducantur à centris ad illas circumferentias, quoniam hoc est quid

Solutio.

posterius; etsi per impossibile circuli illi describi non possent, nec rectæ duci à centris ad circumferentias, adhuc rectæ illæ lineæ forent æquales. Sed parum scitè hęc dicta videntur; quamuis enim describi circulos sit quid posterius ęqualitate linearum illarum, non tamen

tamen posse describi ita se habet; cum hoc sit potiùs natura priùs; quòd si repugnaret circulos describi, & rectas illas lineas à centris ad circumferentias duci, repugnaret quoque prædictarum linearum æqualitas; vt si repugnaret risibilitas, seu esse risibile, vel aliquid illi necessariò connexum repugnaret, quoque homo, hoc est natura rationis particeps.

Nec dissimiliter occurrendum est difficultati de propositione trigesima secunda primi Libri, vbi probatur triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis; Quoniam producto vno latere, angulus externus æqualis est duobus oppositis, quod vt aiunt nullo pacto vera est, & essendi causa illius conclusionis, & ipsius attributi, quod est habere tres angulos æquales duobus rectis; nam si nunquam produceretur illud latus, imò si non posset produci, adhuc tres trianguli anguli forent æquales duobus rectis. Eodem enim modo hæc difficultas diluetur, dicendo scilicet produci latus esse quid posterius non ita tamen posse produci; hoc enim posterius non est, quod si prædicti lateris productio repugnaret, vtique repugnaret quoque triangulo conuenire prædictum attributum consistens in eo, quod est habere tres angolos æquales duobus rectis. *Obiectio ex alia Geometra propositione petita, cum sua solutione.*

Tertiò damnantur Mathematicæ probationes, quod non sint ex prioribus & notioribus naturâ, siquidem non sunt ex causis, vt esse deberent si ex prioribus, atque notioribus naturâ dicendæ forent; quinimò aiunt sæpissimè procedere à posteriori & à signo, vt patet quando fit demonstratio commemorata propositionis trigesimæ secundæ, vbi probatur Trianguli quidem attributum per angulum externum. *Tertia obiectio.*

Hæc tamen parum habent momenti, siquidem aliquando fieri progressum ab attributo, siue ab effectu ad causam; commune quidem est omnibus Disciplinis, in quibus, vt constat discurrendo per singulas, hunc licet progressum obseruare; Quamobrem hac difficultate non plus Mathematicis, quàm cæteris Disciplinis dedecoris inurunt; solùm igitur hinc illud licebit inferre, vt Disciplinæ Mathematicæ tantum sibi nequeant splendoris, ac dignitatis arrogare, vt semper à causa ad effectum procedant, sed aliquando à causa quandoque ab effectu, plerumque verò à concomitanti, quod superiùs etiam tetigimus. Hic porrò diligenter est aduertendum, quod plerosque decepit, cum dicimus demonstrationem per causam procedere, non sic vsurpandum, quasi causa necessariò esse debeat Physica; hoc enim adeò à veritate alienum, vt nihil supra; iam enim insinuatum à nobis fuit ad demonstrationem per causam non requiri causam omninò Physicam realiter scilicet distinctã ab effectu, sed satis superque esse, vt sit causa Metaphysica, quæ aliàs virtualis appellari consueuit; itaque opus non est, vt tam sit causa, quàm se habens per modum causæ; & certè nisi res ità se haberet illud sequeretur incommodum, nimirum de Deo nullam scientiam esse posse, siquidem attributa, quæ Diuinam naturam comitantur haud reali distinctione ab illa distinguuntur; formalem autem distinctionem ex rei naturâ, hic non commemoro, cum huius non sit loci cumulatiùs hac de re disputationem inire. *Solutio.* *Notanda quædam.*

Quartò illud quoque solet in medium afferri ad idem suadendum, videlicet Mathematicis demonstrationibus deesse perfectionem requisitam ad optimum demonstrandi genus. Non contexuntur ex ijs, quæ sunt per se; plerumque enim nos in demonstrando principia quidem adhibemus, quæ non sunt per se, vt illud. Quæ æqualia sunt vni tertio, sunt inter se æqualia; causa per se vt aiunt cur illa æqualia sint, non est illud tertium, sed tanta ipsorum quantitas; & si non esset illud tertium, vel etiam si foret impossibile adhuc æqualia forent illa quanta; quod de principijs alijs quoque dicendum, vt si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt æqualia; idem quoque afferunt de propositione trigesima secunda primi Elementorum, vbi videlicet ostenditur, Triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis mediante angulo externo, atque adeo per principia, quæ non sunt per se. *Quarta obiectio.*

His quoque, & consimilibus operosum non erit satisfacere; propterea quod principium illud e.g. quæ sunt æqualia vni tertio, sunt æqualia inter se, est propositio per se si rectè explicetur, & quidem huiusmodi est, vt mereatur dici principium demonstrationis, si vera sunt, quæ scripsit Philosophus primo Posteriorum Capite secundo, quòd sit propositio immediata, qua scilicet non est altera prior; illius autem propositionis sensus redditur. Habentia æqualitatem cum tertio sunt habentia æqualitatem inter se, vbi prædicatum adeo necessariò de subiecto affirmatur, vt sufficiat ad hoc, vt sit demonstrationis principium; estque adeo immediata, vt per causam ostendi nequeat, eiusque veritas statim constet habitâ significatione terminorum, ita ut cum scientiarum principia complexa sint in triplici diffe- *Solutio.*

differentia, quędam sint, quibus intellectus statim pręebet assensum percepta significatione terminorum, quędam, quę repetitis experimentis innotescunt, quędam tandem quę cognoscuntur assuetudine, principium allatum ad primum principiorum genus pertineat, &c.

Quinta obiectio. Quintò obiiciunt etiam quia non sunt ex proprijs; ac Mathematici utuntur principijs communissimis, vt e. g. totum est maius sua parte. Si ab ęqualibus ęqualia demas, quę remanent sunt, ęqualia, & id genus alia; & quamuis illa limitentur ad proprias materias, adhuc tamen secundum se communia sunt, nec propria censeri debent illius demonstrationis.

Solutio. Sed mirum est, quàm ineptè loquantur; quando siquidem dicimus Demonstrationem debere ex proprijs non ex communibus procedere, id sic vsurpandum, vt demonstratio construatur ex proprijs; communia verò opem ferant demonstrationi, quod in ipsis Mathematicis disciplinis fieri consueuit.

Sexta obiectio. Sextò nec etiam probantur quibusdam Mathematicę demonstrationes, quoniam Mathematicus quantitatem considerandam assumit abstrahendo à propria, & vera illius natura, cum non consideret illam quatenus est accidens, & vt a substantia pendet, sed quatenus imaginationi substat, in eaque concipi possunt varię figurę, & de illis passiones probari per quędam principia euidentissima, non tamen per veras causas.

Solutio. Sed his iam factum satis fuit superiùs; nam si de Geometria loquamur hęc profectò quantitatem considerat continuam, non considerando tamen ipsam nisi secundùm abstractionem ab omni materia sensibili, & perscrutatur attributa, quæ consequuntur ipsam secundum rationem mensuræ & mensurabilis; nec enim quicquam prohibet quantitatem ipsam hunc in modum spectari, & de ea secundùm huiusmodi rationem attributa ostendi, si quæ sunt quæ profectò sunt inde dimanantia.

Postrema difficultates. Prima solutio. Quod si plerunque vsurpent hæ disciplinæ Demonstrationis illud genus, quod per deductionem ad impossibile nuncupatur, hoc nihil est; quoniam in hoc ipsæ cum cæteris conueniunt; nec peculiari ratione culpandæ.

Secunda eiusque solutio. Nec etiam vitio licebit vertere Mathematicis, quod pręsertim apud Geometras magni nominis in vsu extitisse conspicimus, si aliquando ex eo, quia aliquid nec minus, nec maius sit, concludatur ęquale; quamuis enim id ex communibus prima fronte collectum videatur, tamen ex proprijs id factum fuisse quidem intelliges, si animaduerteris ea ex rei naturá de qua agitur petita fuisse. In tradendis autem methodis, cum se obtulerit occasio hęc specialiùs prosequemur. Interim id adnotare licet, cum in hoc contigerit deductio ad impossibile, inde non plus dedecoris his Disciplinis accedere, quàm cęteris eodem demonstrandi genere vtentibus.

Notanda quędam. Fatendum tamen parum feliciter Propositionis alicuius Geometricę demõstrationem à quibusdam in prima principia resolutam fuisse, vnde non parum dedecoris præstantissimis hisce disciplinis inustum est; quasi in his candor ille demonstrationis Peripateticę desideretur; quoniam propositiones, quibus constant non sint iuxta leges, quas Aristeles in Posterioribus Analyticis promulgauit optimam tradere demonstrandi normam contendens; etsi enim sint de omni vt aiunt, & per se, non tamen, earum termini, nempe subiectum, & prędicatum reciprocè se habeant, cum prędicatum latius pateat, quàm subiectum, &c. sed Iniquum est Arti adscribere errata, quę ab imbecillitate professorum oriuntur; & quidem Scribimus indocti, doctique poemata passim. Si rectè, & vt, par est illa resolutio fuerit instituta, in ea nihil erit, quod Philosophi mentẽ perturbet, & apud Peripateticos quoque non vulgarem plausum merebitur; Ità quidem dicendum omne triangulum in quo duo latera sunt ęqualia vni tertio est trium ęqualium laterum, non autem omne triangulum tria latera habens ęqualia, est ęquilaterum, &c Non est Mathematicis id vitio vertendũ ergo, quòd potius ex Artificis alicuius inscitia proficiscitur; dabitur enim cuicũq; ad meliorem formam demonstrationis resolutionem redigere; quod si in ipsis demonstrationibus contexendis introspicere rei subiectę naturam minimè videantur, id ijs summę laudi tribuendum; siquidem nefas existimant proprios limites, finesque sua peculiari abstractione sancitos, transilire, quod superiùs haud obscurè fuit à nobis insinuatum.

Eucli-

Euclidis, de Datis Liber singularis ad Locum pertinens resolutum, ab Auctore recognitus, & Commentarijs illustratus.

DEFINITIONES.

Data magnitudine dicuntur areæ, seu spatia, lineæ, & anguli, quibus æqualia possumus exhibere. I.

HOc igitur modo, & iuxta definitionem hanc oportet intelligere vsitatam loquendi formam in demostrationum Analysi; cum dicimus nimirum lineam aliquam datam esse magnitudine; ita, & de spatijs intelligendum est.

Ad angulos autem quod attinet, aliqua difficultas insurgit; posset enim, quispiam arguere; Quod quantitatem, seu magnitudinem non habet, vtique magnitudine dari non poterit, nec ei quicquam ęquale poterit exhiberi; cùm æquale & inęquale, maius & minus, quantitatis, vel magnitudinis attributa esse videantur. At verò angulum non participare rationem magnitudinis, mox suadebitur. Ergo non poterit angulus dici magnitudine datus, nec ei quicquam æquale poterit exhiberi. *Difficultates de Angulo.*

Angulum verò magnitudinem non esse, hinc facilè quidem intelliges. Quoniam magnitudo omnis, vel linea, vel superficies, vel corpus existit, ita ut quod rationem vnius ex his non habet, nec magnitudinis rationem habere possit; sed hunc in modum se habere angulum, cuicumque perspectum est, quamobrem angulus magnitudinis rationem obtinere non poterit. Quod si quis ambigeret de veritate illius propositionis, videlicet, quod non obtinet rationem vnius ex illis magnitudinibus, nec etiam magnitudinis rationem consequi potest; inde profectò eam veritati consentaneam esse deprehendet, quoniam nulla alia superest magnitudo, siquidem totuplex magnitudo censeri debet, quotuplex divisibilitas, At hęc tantummodò triplex, vt eleganter ostendit Ptolemęus in Analemmate; ergo triplex erit etiam magnitudo; quamobrem nemini licebit vltrà lineam, superficiem, & corpus, aliam inuehere in medium magnitudinem. *Angulum non esse magnitudinem demonstratur.* *Suadetur prima propositio.*

Deinde illud accedit, quod Angulus planus est duarum linearum in plano se mutuò tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio; ergo non ad quantitatis, seu magnitudinis, sed potius ad relationis gęnus pertinebit. Non secus enim se habet inclinatio, ac Ratio, hęc respectus est quidam, sic & inclinatio; & vt inter Rationes datur respectus, qui dicitur analogia, siue proportionalitas, quæ nil aliud est quàm rationum similitudo, ita pariter inter inclinationes similitudo intercedit; vnde non tam Ratio dici debet alteri ęqualis, aut maior, vel minor; quemadmodum nec inclinatio tam debet ęqualis alteri dici, vel maior, vel minor, quàm similis, vel dissimilis. *Alia ratione demonstratur angulum quātitatē non esse.*

Neque perturbet animum, quòd angulo quantitatis attributa conuenire videantur; subit enim diuisionem in partes, siquidem licet in illas dispescere; conuenit eidem esse ęqualem alteri, itemque maiorem, atque minorem, &c. quæ planè magnitudinis naturam comitantur; non inquam animum perturbet, propterea quod ei commemorata conuenire bifariam intelligi potest, vel scilicet primo & per se, quod omninò negandum, vel ratione alterius, quod vltrò fatendum; intantum enim angulus diuisionem subire potest, quatenus diuisionis est capax arcus ille, cui angulus insistit, & penes quem ipsius anguli attenditur mensura. Si enim minor fuerit ille arcus, angulus fit magis acutus; vndè inclinatio dicitur maior, & contra; ratione tamen ipsius arcus; cum alioquin diceretur similis inclinationi aliarum duarum linearum angulum constituentium, quando arcus, quibus prædicti anguli insisterent forent æquales; diceretur autem dissimilis quando essent arcus inæquales. *Occurritur difficultati.*

Neque dicas merè extrinsecè se habere arcus illos, nec ad anguli generationem condu- cere; quandoquidem res non ita se habet; namque si intelligamus rectam quandam in pla- no *Responsionis impugnatio.*

no iacentem, in qua punctum quoddam fuerit acceptum, & hoc immobili, ac fixo linea in gyrum agatur, ita vt loco ipsius altera sit substituta permanens, quot in ipsa sunt puncta, tot arcus descripti intelliguntur, quemadmodum per illum motum angulus intelligitur genitus, ita etiam & arcus similes, quibus idem angulus insistit. Hoc autem sufficit ad generationem anguli, preterquamquod quocunque oblato angulo plano, satis superque est arcum describi posse facto centro ad verticem illius, secundum arcum prędictum, attendendo ipsarum linearum inclinationem.

Epilogus. Longè itaque meliùs videtur hunc in modum res explicata, quàm si dicatur, insulsè admodũ ut opinor, aliud esse quantitatis genus agnoscendũ, ad quod angulus ipse pertineat. Illud porrò silentio prętereundum minime duxi nihil referre, quo nam pacto se habeat huiusmodi respectus, an scilicet contradistinguatur ab ijs, quę referuntur, tamquam accidens superadditum; illud enim de omnibus huius ordinis respectibus inquiri potest; neque hac in re peculiaris est difficultas; solum illud addendum; non importari, quicquam in re distinctum, quod aliàs à nobis demonstratum abundè fuit. Simile quippiam tractandum occurret circa sequentem definitionem, qua scilicet Rationis explicatur natura.

Explicatio definitionis propositæ. Ad propositum redeuntes, cum in definitione ait Geometra, angulum magnitudine dari, cùm ei æqualis exhiberi potest, eo sensu est vsurpanda definitio, vt magnitudine datus angulus, & ei æqualis exhibitus dicatur ad eum modum, quo ipsi magnitudinis ratio, & æqualitas aptari potest, quod non paucis hactenùs à nobis explicatum fuit.

Voces quędã explicantur. Hìc autem prætermittendum non est, quędam esse vocabula, quorum significationes apponere abs re non esse iudicauimus; & primò quidem Datum dicitur, cui æquale possumus exhibere.

Hypothesis, quid. Υπόθεσις, hypothesis est, quod proponenti vltrò conceditur; suppositionem enim significat, eo quòd fiat ex υπ; nempè sub, & θεσις hoc est positio; vndè ὑπόθεσις, idest suppositio est omne id, quod conceditur proponenti, vt dictum est.

Ordinatum, quid. Ordinatum, siue determinatum dicitur, quod pluribus modis esse nequit; cum enim aliquid determinatum fuerit, non patietur secus fieri, quàm determinatio ipsa permittat.

Porimon quid. τὸ πόριμον, Porimon Græcis, quod actu paratur, in promptuque est τὸ πόριμον; enim licet facilè suppeditans interpretari consueuerint: non rarò tamen contingit vsurpari pro τὸ πόριστον, quod Gręcis significat facilè parabile, atque suppeditabile, & quod citra difficultatem effici potest; adeo ut quandoque apud nonnullos in idem recidant; licet etiam τὸ πόριμον, plerũque significet, quod construi potest, & τὸ πόριστον quod parabile est sine difficultate, & quandoque pro eo quod est factibile, quodque fieri posse non reuocatur in dubium; etiamsi eius effectio ignoretur.

Aporimon, quid. τὸ ἀπόριμον; aporimon accipitur pro eo, cui opponitur πόριμον ex à priuatiua, & πόριμον, atque adeò significat id cuius effectio haberi nequit.

Effabile, quid. Effabile dicitur, quod est expressibile: vt ineffabile idem est, quod inexpressibile; effabile enim est à verbo effari.

Cognitũ, quid. Cognitum denique significat, quod numero rationali, vel irrationali exprimi potest: Aduerte autem per numerum rationalem intelligi illum, qui exprimi potest, vt Verbi gratia 20 quemadmodum per irrationalem, qui exprimi non potest, vt se habet ℞. 20. redeamus vnde discessimus. Illud silentio præterire non licet; Datum quadrifariam contingere magnitudine nimirum, ratione, specie, & positione, de quibus edisserit Euclides. Atq; primò data magnitudine esse areas, lineas, & angulos, quibus æqualia nos exhibere possumus; cumque Datum generatim acceptum illud sit, cui æquale potest inueniri; ob id magnitudo tunc data dicenda est, cum ei potest æqualis reperiri; non secus datum spatium esse dicetur, quemadmodum etiam & angulus sensu iam explicato.

Ratio dari dicitur, cui possumus eandem exhibere.

Definitionis explicatio. TVnc ἀναλογία, analogia, siue proportio data esse dicetur, cum ei potest æqualis reperiri. Quoniam enim in ratione magnitudinis A, ad magnitudinem B, dari potest magnitudo C, ad magnitudinem D, propterea proportio magnitudinis A, ad magnitudinem B, data esse dicetur.

Quanti referat ad Geometram posse in quonam posita sit rationum natura, non est cur

plu-

pluribus explicemus, cùm perſpicuum adeò, vel cuique eſſe poſſit, vt operæ non ſit pretium in hoc immorari. Præſtabit igitur ſtatim aggredi Definitionem rationis, quam Euclides inculcat Elementorum lib. 5. Ait autem

Λόγος δὲ ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Rationis definitio.

Hoc eſt. Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo. Huius porrò Definitionis ſenſus, vt probè innoteſcat, iuuabit ſingulas eius particulas diligenter percurrere. Primùm autem videtur id adnotandum, quod Græcus Codex vtitur hac voce, λόγος, quæ quidem optimè redditur latinè, ratio, qua ſignificatur habitudo, ſiuè reſpectus quidam inter duo, & quidem ſi inter ſe conferantur ſecundum quantitatem, in huiuſmodi collatione ſpectari poteſt & Intellectus actus collatiuus, quo ſcilicet vnum, cum alio confertur, & ea, quæ ſecundum quantitatem conferuntur. Illa igitur mutua habitudo non quidem ſe tenens ex parte cognitionis, vt aliqui perperam intellexerunt, ſed potius ex parte eorum, quæ comparantur, ratio dicitur. Dum itaque duæ quantitates, ſiuè diſcretæ, ut numeri, ſiue continuę, vt lineæ, ſuperficies, & corpus inter ſe conferuntur ſecundum quantitatem, habitudo illa ſe tenens ex parte obiecti Ratio eſſe dicetur.

Definitionis explicatio.

Ratio autem commemorata dicitur duarùm magnitudinum eiuſdem generis. Siquidem eſſe debet habitudo inter quantitates eiuſdem generis, quoniam quæ ſunt generis diuerſi nequeunt inter ſe comparari, vnde non eſt in ijs cur exerceatur reſpectus in quo rationem conſiſtere dicebamus. Quamobrem linea cum linea, ſuperficies cum ſuperficie, ſolidum cum ſolido conferri debet; non autem linea cum ſuperficie, &c.

Dicitur deinde ſecundum quantitatem. Hoc eſt ſecundum quod vna maior eſt, aut minor, aut æqualis alteri. Quandoquidem duabus eiuſdem generis quantitatibus propoſitis, neceſſe eſt, aut unam eſſe maiorem, aut minorem altera, aut illi æqualem. Habitudo igitur illa, qua ſeſe vel æqualiter, cum ſunt æquales, vel inæqualiter, cum ſunt inæquales, reſpiciunt, Ratio appellatur. Quare habitudines aliæ non fundatæ in quantitate, vt habitudo patris ad filium, quæcumque illa ſit, vel albi ad album, vel demum quælibet, cuius fundamentum non eſt quantitas, per hanc in definitione particulam poſitam excluditur.

Num proportio quantitas dici mereatur. Dubitādi ratio.

Hinc porrò nacta occaſione peritiores Geometræ diſceptationem ineunt; Num proportio quantitas dici mereatur; quod etiam de angulo ſolet inquiri.

Eſt autem, cur id in controuerſiam vocent, propterea quod ratio quantitas non videtur, quoniam hæc creditur adæquatè diuiſa in diſcretam, & continuam; diſcreta in ſuas ſpecies; continua itidem in ſpecies ſuas, lineam, ſuperficiem, & corpus, ad quarum nullam ratio reuocari poteſt.

Rationes quibus oſtenditur ratio participare quantitatis naturā.

Ex aduerſo tamen, non parum negotij faceſſere videtur difficultas, quoniam de rationibus agere munus eſt Geometræ, qui tamen ſolam quantitatem ſua contemplatione perſequitur, & ſi quid eſt, quod præter quantitatem ad ſe adſciſcere videatur, illud profectò cadit ſub ipſius contemplationem, quatenus aliquo modo naturam induit quantitatis, rationemque menſuræ, ac menſurabilis obtinet.

Idque præſertim inualeſcit, quoniam rationi, quicquid conuenit, quantitati conuenire perſpicuum eſt. Quamobrem ſi quanti maximè proprium eſt æquale, & inæquale dici, vt Ariſtoteles pronunciauit de quantitate agens cap. 6. etiam de ratione idem enunciari volunt Geometrę, quibus nihil eſt frequentius, quàm rationem vnam, maiorem, aut minorem alterâ dici, vel vnam alteri ęqualem; quò apud ipſos frequentiſſimè uſurpatur illud, nimirum quantitatem vnam habere maiorem rationem ad alteram, quam alia ad eandem, vel minorem, vel æqualem.

Iterum idem comprobatur.

Quin imò & rationem ſibi vindicare nedum commemoratas proprietates conſequentes quantitatis naturam; ſed etiam hęc, quæ ſunt maximè quantitatis propria, videlicet poſſe addi, ſubtrahi, multiplicari, ac diuidi. Non minus enim ac de quantitate, de rationibus ipſis dicere ſolemus, vnam alteri addi, ex vna aliam ſubtrahi: vnam per aliam multiplicari; atque demum vnam per aliam diuidi.

Oppoſita ſententia tanquā probabilior defenditur.

Nihilò ſecius rectè quidem Petrus Nonius negatiuam ſententiam amplexus eſt, ea ratione ductus, quam primùm attulimus, quoniā ratio neque quantitas eſt diſcreta vt numerus, neque aliqua ſpecies quantitatis continuę; neque enim eſt linea, neque ſuperficies, neque corpus. Quę etiam de angulo intelligenda volumus.

Quorundam effugium. Commentitium planè, ac puerile est, quod nonnulli difficultate pressi protulerunt, dicentes tametsi ratio ad nullam ex commemoratis quantitatis speciebus pertinere possit, tamen inde haud inferendum esse quantitatis essentiam à ratione non participari, quoniam aliud est quantitatis genus, quod relatiuum dicitur, sub quo ratio ipsa contineri potest.

Reijcitur. Ipsos; tamen de ratione loquentes, nulla ratione quidem hoc nouum quantitatis genus in medium inuexisse facilè quisque deprehendet, si robiscum occurrat propositis difficultatibus, quibus, nullam inesse vim hic ostendemus.

Respondetur ad initio proposita argumenta. Ad primum. Ad primam igitur quod attinet. Vltrò quidem fatemur Geometrę munus esse quantitatem perscrutari; indè tamen non rectè infertur quicquid sub Geometrica cadit contemplatione quantitatis naturam sibi vendicare, atque adeò directè sub illa contineri. Nam vt insulsè profectò putaret aliquis, quicquid Physicus meditandum assumit debere corporis naturalis rationem sibi vendicare; ità non minus si crederet nihil esse, in quo Geometra occupatur, quod rationem quantitatis non obtineat, ut igitur Geometra & de ratione, & de analogia edisserat satis est, vt hęc quantitatis naturam intra fines Geometricos, nempe abstractionis à materia sensibili comitentur.

Ad secundũ. Ad id verò, quod difficultatem pręseferebat non vulgarem; respondere facillimum erit, multa quidem de aliquibus dici propriè, quę de alijs impropriè, & per quandam translationem dicuntur. Ita planè in re, de qua agimus, contingit; nam ęquale, ac inęquale esse, sicut & maius esse, ac minus, proprium est quantitatis, si proprietate sermonis vtamur; secus autem si impropriè loquamur. Quamobrem ratio dicitur rationi ęqualis, vel inęqualis, diciturque vna maior, vel minor altera, impropriè tamen loquendo, cum potiùs ratio rationi deberet dici similis, & non ęqualis. Itemque vna non maior, vel minor alterá, sed potius dissimilis. Etsi dissimilitudinis fundamentum sit maior, vel minor quantitas, vnde tollerabile est, rationem vnam, altera dici maiorem, vel minorem, quatenus hęc dissimilitudo in maiori, vel minori quantitate fundatur.

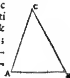
Ad tertium. Atque demum operosum non est occurrere postremę difficultati allatę; propterea quod posse addi, subtrahi,&c. conuenire rationi bifariam intelligi potest. Vel nimirum ratione sui, vel beneficio quantitatis. Primum quidem admittimus, secundum tamen negamus ea ratione ducti, quoniam si quę additio, vel subtractio, &c. in rationibus ipsis exercetur, profectò contingit, quatenus in quantitate perficiuntur. Cum itaque res ita se habeat, consequens omninò est rationi, haud quantitatis naturam inesse.

Hęc etiam intelligi volumus de angulo, vt supra docuimus, cui quantitatis naturam denegauimus, quoniam si quę inditio sunt, eum participare quantitatis essentiam nihil prorsus vrgent, si quidem ei conueniunt beneficio arcus, cui insistit; penes enim hunc, angulus dicitur vel ęqualis alteri, aut eo maior, vel minor. Neque quicquam refert si arcus actu non subtendat angulum ipsum, satis enim est subtendere posse; Quamobrem angulum in quadam habitudine posita in inclinatione consistere dicamus necesse est. De his tamen supra multa nos in medium attulimus.

Cęterum ab initio propositam difficultatem, illud dicendum; scilicet rationi exhiberi aliam ęqualem, quatenus ęqualitas cum similitudine confunditur, ita ut perinde sit rationi, rationem ęqualem esse, ac est illi esse similem, itaut ęqualitas, pro similitudine sumatur; & quidem hunc in modum data erit ratio, cui similis potest exhiberi.

III. *Rectilineæ figuræ specie dari dicuntur, quarum, & singuli anguli dati sunt, & laterum rationes ad inuicem datæ sunt.*

Explicatio. SI itaque fuerit aliqua figura rectilinea, puta triangulum A B C, tunc dicetur specie data, cum singuli eius anguli ABC, ACB, BAC, dati fuerint, simulque data fuerit ratio lateris A B, ad B C, & B C, ad C A, & C A ad A B. Cæterum neque lineæ, neque anguli specie dari dicuntur; sed magnitudine, vt supra visum est. Hinc autem infertur specie datarum figurarum angulos quoque dari; quemadmodum etiam laterum rationes vti perspicuum est.



Positione dari dicuntur puncta, lineæ, atque anguli, quæ eundem situm semper obtinent. IV.

NOn aliter intelligendum est, puncta, lineas, angulosque positione dari, quàm, vt situm eundem semper obtineant. Puncta itaque lineę, & anguli positione dari dicuntur, quæ situm eundem semper obtinent; quinimo puncta non aliter dari possunt, quàm positione; at verò anguli dum positione dantur etiam, & magnitudine, eo tamen modo quò ipsis magnitudo conuenit, quemadmodum supra fuit explicatum. Non sic autem de lineis sentiendum est rectis; propterea quod, hę quantumuis positione dentur, non propterea magnitudine datę esse dicentur; positio enim situm respicit, magnitudo non ita.

Circulus magnitudine dari dicitur, cuius ea, quæ ex centro datur magnitudine. V.

HÆc definitio satis clara est, atque perspicua. Circulus itaque magnitudine datus esse dicetur, cum data fuerit recta quidem magnitudine, ex centro ducta, hoc est, cum magnitudine data fuerit recta linea, quę nimirum ex ipsius circuli centro ducitur.

Positione, & magnitudine dari dicitur circulus, cuius datur centrum positione, & ea quæ ex centro, magnitudine. VI.

NOn est opus ulteriori declaratione; si enim circuli centrum positione datum fuerit, eiusdem verò, quę à centro, magnitudine, non potest circulus non dari positione, nam à centro positio, & ab ea, quę ex centro, magnitudo.

Circuli segmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus dati sunt magnitudine anguli, atque segmentorum bases. VII.

TVnc circuli segmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus anguli magnitudine dati sunt, datęque segmentorum bases; cum enim super eandem rectam lineam ad easdem partes, non constituantur duo circuli segmenta similia, & inęqualia, circuli verò segmenta similia sint ea in quibus anguli cõstituti sunt ęquales, inde fit, vt si detur angulus contentus in segmento circuli vna cum basi eiusdem, necessariò etiam detur magnitudine circuli segmentum; alioquin similia esse deberent illa segmenta, eo quod caperent angulos ęquales, & si posset esse alterius magnitudinis maioris, vel minoris; iam duo segmenta similia, & inęqualia super eadem recta linea ad easdem partes forent constituta, quod tamen aduersatur ijs, quę ab Euclide demonstrantur ad 23. Prop. Lib. 3.

Positione, & magnitudine dari dicuntur circuli segmenta, in quibus anguli magnitudine dati sunt, & segmentorum bases positione, & magnitudine. VIII.

CIrculi segmenta positione, & magnitudine dari dicuntur, quibus dati sunt anguli magnitudine segmentorumque bases positione, magnitudineque dantur, quod plane constat ex ijs, quę iam supra diximus; dum enim data est segmenti basis, & quidem positione, & magnitudine; atque super ipsam nequeant dari circulorum segmenta similia, & inęqualia; proinde si dantur anguli magnitudine, itemque segmentorum bases positione, & magnitudine, etiam positione, & magnitudine circulum dari necesse est.

Magnitudo magnitudine maior est datâ, quando ablatâ datâ reliqua eidẽ æqualis erit. IX.

SSupponamus propositas esse magnitudines DF, EF; sitque data magnitudo D E. Per hanc definitionem dicetur quidem DF, magnitudo maior magnitudine EF data magnitudine D E; quoniam ablata data DE reliqua E F, ęqualis est magnitudini, qua magnitudo D F maior esse dicitur. Itaque si duę fuerint magnitudines inęquales, & prima illarum superet

D E F

secundam dato excessu, prima secundâ maior esse dicetur, datâ, hoc est dato excessu. Vide cum duç sint magnitudines DF, EF superet autem DF ipsam EF data magnitudine, siue dato excessu D E; ipsa quidem DF maior dicetur minori EF dato excessu, siue datâ; siquidem ablata DE reliqua EF eidem EF çqualis est. Notant Interpretes non interesse vtrum binç magnitudines inçquales datç sint, dummodo datus sit excessus, quo maior minorem excedit.

X. *Magnitudo magnitudine minor est, datâ, quando adiuncta data, tota eidem æqualis est.*

HÆc definitio superiori quidem est affinis; propterea quod illud idem hîc asseritur de additione, quod ibi de subtractione dicebatur. Supponamus magnitudinem EF minorem esse magnitudine DF; sitque data magnitudo DE; iuxta definitionem hanc E F dicetur magnitudo minor magnitudine D F; & quidem datâ magnitudine D E, eo quod adiuncta hac data ipsi E F, fit magnitudo D F, çqualis illi, qua magnitudo E F minor esse dicitur datâ magnitudine D E.

D E F

XI. *Magnitudo magnitudine maior est datâ, quàm in ratione, quando ablata data, reliqua ad eandem habet rationem datam.*

SVpponamus AD, esse magnitudinem datam, & AC maiorem esse CB data, quàm in ratione: Ratio D C ad CB est data, atque magnitudo AC maior esse dicetur magnitudine BC datâ, quàm in ratione siquidem ablata data AD reliqua DC ad rectam CB habet rationem quç supponitur data. Vel definitionem sic exponamus. Si fuerint duç magnitudines, & ab vna ipsarum auferatur data magnitudo, reliqua verò magnitudo habeat ad aliam magnitudinem rationem datam siue maioris, siue minoris inçqualitatis, prima illa magnitudo secunda magnitudine dicetur maior esse data quam in ratione. Vt duç sint magnitudines AB, CB, & à magnitudine AB ablata sit magnitudo A D, reliqua vero DB habeat ad CB rationem datam maioris inçqualitatis v. g. duplam. Dicetur A B ipsa C B maior esse datâ quàm in ratione, quandoquidem ablatâ datâ A D reliqua D B ad C B rationem habet datam.

A D C B

XII. *Magnitudo magnitudine minor est datâ, quàm in ratione, quando adiunctâ datâ, tota ad eandem, rationem habet datam.*

SVpponamus AD esse magnitudinem datam, atque DC minorem esse magnitudine CB data, quàm in ratione; ratio AC, ad CB est data; magnitudo itaque DC minor est magnitudine AC data, quàm in ratione; quoniam ad ipsam D C addita AD fit A C, quæ ad C B rationem habet, quæ data supponitur. Vel sic interpretemur definitionem. Vt si fuerint duæ magnitudinis, & vni earum adijciatur data magnitudo, composita verò magnitudo habeat ad aliam magnitudinem rationem datam siue maioris, siue minoris inæqualitatis prima illa magnitudo secundâ magnitudine minor esse dicetur, data, quam in ratione. Sint duæ magnitudines DC, CB, & alteri ipsarum nempe DC adiecta sit magnitudo A D, habeat autem ex D C, & A D composita magnitudo A C ad C B rationem datam puta duplam, dicetur quidem D C minor esse ipsâ C B, data quam in ratione, quoniam magnitudo D C auctâ magnitudine A D composita A C habet ad C B datam rationem nempè duplam.

A D C B

XIII. *Deducta linea dicitur à dato puncto, ad datam positione rectam acta recta in angulo dato.*

LInea recta deducta dicitur à dato puncto, ad datam positione rectam, cum recta acta fuerit in angulo dato; siquidem ad datam positione rectam, linea ducitur à dato

Alij vertunt producta.

à dato puncto, in angulo tamen dato, quem hæc cum illa constituit: propterea, hæc linea deducta dicetur à dato puncto, ad datam positione rectam.

Educta linea dicitur à dato puncto ad datam positione rectam, protractâ rectâ in angulo dato. XIV.

At verò educta linea dicitur à dato puncto ad datam positione rectam, cum illa protracta fuerit in angulo dato; tunc enim linea dicetur educta, siquidem à dato puncto ad rectam positione datam protrahitur recta in angulo tamen dato, quem hæc, cum illa constituit. *Alij vertunt Reducta.*

Contra positione est, recta per datum punctum parallela acta alteri rectæ. XV.

Dicetur verò contra positione recta per datum punctum, cum acta fuerit parallela alteri rectæ; siquidem igitur per datum punctum parallela est alteri rectæ; linea dicitur qualis modo describitur. *Alij vertunt Appositione.*

Definitiones itaque præmittendæ sunt, qua hactenus attulimus superest, vt propositiones aggrediamur: quæ sequuntur.

PROPOSITIO PRIMA.

Datarum magnitudinum ad inuicem data ratio est.



Datæ sint magnitudines A, B. Dico rationem A ad B datam esse. Quoniam data est magnitudo A, poterit æqualis ei exhiberi[a] ea quæ sit C. Rursus quoniam data est magnitudo B, possibile erit aliam ei æqualem exhibere, ea esto D.[b] Quoniam itaque A est æqualis C, & B æqualis D, erit, vt A, ad B, ita C, ad D, ergo ratio A, ad B, erit data. Si igitur magnitudines dentur, earundem ratio data erit. Quod oportebat ostendere. Vel quia A æqualis est C, & B æqualis D, erit[c] vt A ad C ita B ad D, &[d] alternatim vt A ad B, ita C ad D; quamobrem ipsius A ad B data ratio est, cum illi eadem sit C ad D.[e]

a per primam definit. huius.
b per secundam definit. huius.
c 7. 5.
d 16. 5.
e 2. def.

PROPOSITIO II.

Si data magnitudo ad aliam aliquam magnitudinem habeat rationem datam; datur etiam hæc alia magnitudine.

Data sit magnitudo A, quæ ad quandam aliam magnitudinem, v. g. B, habeat rationem datam Dico B. dari magnitudine. Quoniam igitur data est magnitudo A, poterit[a] æqualis ei exhiberi; ea verò sit: C. Cum itaque ratio ipsius A, ad B detur ex hipothesi poterit[b] ei æqualis dari, exhibeatur igitur, & sit ipsius C, ad D, ratio; quoniam igitur est vt A ad B ita C, ad D, erit[c] vt A, ad C, ita B ad D; at verò A æqualis est C proinde B æqualis erit[d] D ergo B magnitudine data erit, quandoquidem ipsi æqualis exhibita est D.[e]

A ———
B ———
C ———
D ———

a Per primam definit. huius.
b Per secundam definit huius.
c per 16 quinti.
d Per 14. 5.
e Per 1. definit. huius.

PROPOSITIO III.

Si quotlibet datæ magnitudines componantur, etiam ea dabitur, quæ ex his componitur, magnitudo.



Datæ sint magnitudines AC, CB Operæpretium sit ostendere AB datam esse; Quoniam AC est data poterit illi reperiri æqualis; ergo fiat[a] DF æqualis AC; & quoniam CB est

a 3. primi.

est data poterit [b] illi reperiri æqualis, ergo F E æqualis [c] fiat CB. Quoniam igitur DF est æqualis AC. & FE çqualis C B, erit D E æqualis AB, quamobrem AB data [d] erit.

b Per 1. defin. huius. c 3. primi. d Per primā definit. huius.

PROPOSITIO IV.

Si à data magnitudine data magnitudo auferatur, reliqua data erit.

A C B
D E F

DAta sit magnitudo A B, à qua auferatur data magnitudo AC. Dico reliquam C B datam esse. Quoniam enim datur A B, poterit [a] ei æqualis exhiberi, quæ sit DF. Rursus quoniam datur A C poterit ei æqualis exhiberi, sitque D E; quoniam igitur A B, æqualis est ipsi D F, & A C ipsi D E, reliqua igitur CB reliquæ EF, est [b] æqualis. Datur igitur CB quandoquidem ei exhibetur æqualis E F.

a Per primā definit. huius. b Per 3. communem notionem.

PROPOSITIO V.

Si magnitudo, ad sui ipsius, aliquam partem habeat rationem datam: etiam ad reliquam rationem datam habebit.

A C B
D F E

SIt ratio data AB, ad BC. Dico rationem AB, ad AC, datam esse. Quoniam proportio AB, ad BC, data est poterit [a] ei æqualis exhiberi; quamobrem sumatur D E arbitraria, & fiat, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, ergo data est ratio DE ad EF, est autem DE data; ergo data [b] est FE, ergo & reliqua DF data [c] est. Data est autem DE, igitur ratio ipsius DE ad DF data [d] est. Et quia est vt DE ad EF ita AB ad BC igitur per conuersionem rationis erit vt DE ad DF, ita AB ad AC, est autē ipsius DE ad DF ratio data vt ostensum est, igitur ratio AB ad AC data erit Vel.

Quandoquidem est DE, ad EF, vt AB, ad BC, ex constructione, erit [f] DE, ad DF, vt AB, ad AC; ergo ratio AB, ad AC erit [g] data.

a Per secundā definit. huius. b Per secundam huius. c Per quartā huius. d Per primam huius. e Per coroll. 19 quinti. f Per coroll. 19 quinti. g Per secundā definit. huius.

PROPOSITIO VI.

Si componantur duæ magnitudines habentes, ad inuicem rationem datam, & quæ ex his componitur magnitudo habebit ad vtramq; rationem datam.

A C B
D E F

DAta ratio sit AC, ad CB. Dico rationem A B, ad CB esse datam: & rationem AB ad AC esse pariter datam. Fiat DF recta, vt libet; mox verò [a] constituatur DE, ad EF, vt AC ad C B; constitui autem poterit; cum enim data sit proportio A C, ad CB, ei poterit [b] exhiberi æqualis. Ergo ratio DE ad EF data est. Est autem vtraque magnitudinum DE, EF data, ergo ipsius DF ad vtramque ipsarum E F, D E ratio est data. Et quoniam est vt AC ad CB ita DE ad EF igitur componendo erit [d] vt AB, ad CB ita DF, ad EF, & vt [e] AB, ad AC, ita DF, ad DE, & quoniam est vt DF ad vtramque ipsarum EF, DE ita AB ad vtramque ipsarum CB, AC, igitur ipsius AB ad vtramque ipsarum CB, AC ratio data [f] erit.

a 12. sexti. b per secundā definit. huius. c Per primā huius. d per 18. quinti. e Per coroll. 19 quinti. f per primam definit. huius.

PROPOSITIO VII.

Si data magnitudo, data ratione secetur: vtrumq; segmentorum datum erit.

D E F

DAta sit magnitudo DF; sit verò data ratio, vt D E, ad EF. Dico D E, EF data esse. Quoniam ex hypothesi ratio DE, ad EF est data; ergo [a] erit ratio DF, ad EF pariter data; est autem DF data ex hypothesi, ergo EF data erit [b]. At verò ratio DF, ad DE est [c] data, & D F ex hypothesi data est; ergo DE est [d] data. Vtrumque igitur segmentorum datum erit.

a 6. huius. b Per 2 huius. c per coroll. 19 quinti, & Per 5. huius. d per 2. huius.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Quæ ad idem rationem habent datam, habebunt, ad inuicem rationem datam.

Data fit ratio A, ad B, data insuper sit ratio C, ad B. Dico rationem A, ad C datam esse. Fiat ad libitum recta D, & vt A, ad B, ita fiat D, ad E fieri poterit [a] quia data est ratio A ad B.& præterea, vt B, ad C, ita fiat E, ad F, fieri poterit [b] quia data est ratio B ad C.Quoniam data est ad libitum D, & insuper data est per constructionem ratio D,ad E;erit [c] quidem E data;at verò proportio E,ad F per constructionem data est, est autem E data ergo F,erit [d] data, est data autem D, ergo data erit [e] ratio D ad F;cùm autem sit vt A ad B,ita D ad E,& vt B ad C,ita E ad F, erit [f] ex æquo vt A ad C ita D ad F, sed data est ratio ipsius D ad F, vt superiùs ostensum est, ergo ipsius A ad C ratio data erit.

A, B, C, D, E, F

[a] Per primam definit. huius.
[b] Per primam definit. huius.
[c] Per secundã huius.
[d] Per secundam huius.
[e] Per primam huius.
[f] 22. quinti.

PROPOSITIO IX.

Si duæ, pluresue magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, habeant autem illæ magnitudines, ad alias quasdam magnitudines rationes datas, & si non easdem, illæ aliæ magnitudines etiam ad inuicem habebunt rationes datas, &c.

Rationes A,B,C, sint inter se datæ, ratio, A, ad D, & B,ad E, & C, ad F sint datæ. Dico rationes D, ad E,& E,ad F esse inter se datas. Quoniam ex hypothesi ratio D, ad A est data, & ratio B, ad A quoque data, erit [a] ratio D, ad B data. Est autem ex hypothesi ratio E, ad B, data, ergo ratio D, ad E erit [b] data; est autem ex hypothesi ratio C,ad B,data,& ratio E ad C, erit [c] data cum ratio E, ad B sit data; ratio verò F,ad C est data ex hypothesi; ergo ratio E, ad F erit [d] data, & ratio D, ad F erit data per eandem 8.Datorum, cum ostensum sit rationem E, ad F esse datam, & rationem D ad E esse pariter datam,igitur D,E,F ad inuicem habent rationem datam.

A, B, C, D, E, F

[a] 8. datorum.
[b] 8. datorum
[c] 8. datorum.
[d] 8. datorum.

PROPOSITIO X.

Si magnitudo magnitudine maior fuerit, data, quàm in ratione, & simul vtraque illa eadem 1. magnitudine maior est data, quàm in ratione. Sin autem, simul vtraque magnitudo eadem 2. magnitudine maior fuerit data, quàm in ratione, & reliqua illa eadem, 3. maior erit, data quàm in ratione; aut reliqua 4. data est cum consequente 5 ad quam habet altera magnitudo rationem datam.

Nonnullæ sunt, huius propositionis particulæ diligenter perpendendæ: ad faciliorem sensum consequendum. Numeris 1. 2. 3. habentur particulæ, illa eâdem, & numero 2, habetur solum particula eadem; quæ, & altera dicitur magnitudo; intelligi debet consequens rationis propositæ. Numero 4. habetur particula reliqua; per quam intelligitur excessus,quo antecedens vna,cum data excedit consequentem rationis propositæ. Numero 5 per particulam,cum consequente, ad quam intelligitur excessus, quo consequens rationis propositæ superat antecedens eiusdem rationis.

In hac autem propositione triplex est hypothesis,ad primam, quod attinet. Sit A B magnitudo data; & A C, sit maior CD, datâ quàm in ratione. Dico A D, maiorem esse CD, datâ quàm in ratione. Quoniam AC supponitur maior, quàm C D datâ quàm in ratione,& AB data est,erit [*] ratio BC ad CD data, & per decimam octauam quinti, ratio BD, ad CD, data est, ergo per vndecimam definitionem huius AD, est maior CD datâ quàm in ratione. Nam ablata data AB, reliqua BD ad CD habet rationem datam.

A B C D

Triplex hypothesis.

[*] Per 11. de finit. huius.

Se-

Secunda hypothesis. Secunda hypothesis. Sit AD, magnitudo data, & AG, maior sit BG, data, quam in ratione. Dico AB, maiorem esse BG, data quàm in ratione. Quoniam ratio DG, ad BG, est a data; & per decimam septimam quinti ratio DB, ad BG, est data; ergo AB maior erit BG, data quàm in ratione.

A D B E G

a 11. defin. Tertia hypoth. Tertia hypothesis. Sit AE magnitudo data; AG, verò sit maior BG data quàm in ratione. Dico rationem BG, ad BE esse datam. Quoniam ratio EG, ad BG est b data; ergo, & ratio BG, ad BE, data erit; per ea quę habentur ad propositionem decimam octauam quinti lib. Elementorum.

A D B E G

b 11. defin.

PROPOSITIO XI.

Si magnitudo magnitudine maior sit data, quàm in ratione, eadem simul utraque maior erit data, quàm in ratione. Et si eadem simul utraque maior sit data, quàm in ratione, eadem reliqua magnitudine maior erit data, quàm in ratione.

IN hac propositione duplex est hypothesis. Ad primam, quod attinet; Sit AB, magnitudo data, & AE, & maior EG data-ta, quàm in ratione. Dico AE maiorem esse BG data, quàm in ratione. Quoniam ratio BE, ad EG, est a data, ratio verò BE, ad BG, est b data; ergo recta AE maior est c BG data, quàm in ratione.

A D B E G

a 11. definit. huius. b 18. quinti conu. c 11. definit. huius.

Secunda hypoth. Secunda hypothesis. Data sit magnitudo AB, & AE, maior BG, data, quàm in ratione, Dico AE, maiorem esse EG, data quàm in ratione; Quoniam enim ratio BE, ad BG, est d data; ratio autem BE, ad EG, est e data; ergo AE, erit maior EG, data, quàm in ratione.

A D B E G

d 11. definit. huius. e Per ea quæ scribuntur ad 17. quinti.

Vel hunc in modum. Sit magnitudo AE magnitudine, EG maior data quàm in ratione. Dico magnitudinem eandem AE ipsa magnitudine AG, maiorem esse datâ, quàm in ratione. Cum enim maguitudo AE, magnitudine EG maior sit data, quam in ratione, auferatur magnitudo data AB, ut remaneat BE, ergo BE, ad EG, habebit f rationem datam, quamobrem inuertendo, & componendo &c. data erit ratio BG, ad EG, fiat autem AB, ad BD, in eadem ratione g ut BG, ad EG, propterea data erit ratio AB ad BD, est autem data AB, ob id DB data h erit, quapropter reliqua AD data est, at verò totius AG ad totam DE data est ratio, ut enim unum antecedentium ad unum consequentium, ità omnia antecedentia ad omnia consequentia, hoc est sicut BG, ad BE, ita AG ad DE, igitur & ipsius ED, ad AG, data ratio erit, est autem data AD, ergo AE, ipsa quidem AG maior est data quàm in ratione.

f 11. definit. g 4.18. quinti. h 2. huius.

Sit autem AE ipsa AG maior data quàm in ratione. Dico AE reliqua EG maiorem esse data quàm in ratione. Cum enim AE maior sit ipsa AG data quam in ratione, auferatur magnitudo data AD, ob id reliqua DE ad AG data ratio est, quamobrem, & ipsius AG ad DE data est ratio. Fiat AB ad BD ut AG, ad DE; propterea data erit ratio AB. ad BD; & per conuersionem rationis data erit i etiam ratio AB ad AD, & inuertendo data erit ratio AD, ad AB, data est autem AD, igitur tota AB data est: quoniam verò totius AG ad totam DE data est ratio, quemadmodum, & ipsius AB, ad BD, data ratio est; cum sit AG ad DE ità ablata AE ad ablatam BD, igitur reliqua EG, ad reliquā BE, erit ut AG, ad DE, est autem ipsius AG, ad DE, ratio data, ergo ipsius EG ad BE data ratio erit, & diuidendo k ipsius EG ad BE data ratio erit, quamobrē, & ipsius BE ad EG data ratio erit, est autem data AB, igitur AE, ipsa EG maior est l data, quàm in ratione.

i coroll. quinti. k 17. quinti. l 11. definit. huius.

PROPOSITIO XII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem, cum secunda data sit secunda quoquè cum tertia data sit, aut prima tertiæ æqualis est, aut altera altera maior data.

SInt tres magnitudines AD, DB, BG, & quidem AD cum DB data sit, ut AB; item DB, cum BG, data sit, ut DG. Dico, vel AD, æqualem esse BG, vel alteram altera maiorem esse datâ. Supponamus primò primam cum secunda, nempe AB æqualē esse secundæ, cum tertia, nimirum DG illico perspicuum est AD æqualem esse BG; ablatâ siquidem communi DB remanebunt AD, BG

A D B G

inter

inter se æquales.

Supponamus secundò AB, maiorem esse DG; cum itaq; A B, & DG datæ sint, sequitur per quartam huius, differentiam inter A B, & D G datam esse; at verò si ab inæqualibus A B, D G auferatur communis D B atque adeo auferantur æqualia;residuorum A D, B G idem erit excessus, ac totarum AB, DG, nempe DB, sed hic est [a] datus;ergo,& residuorum A D, BG excessus siue differentia data erit, quamobrem sequitur [b] alteram alterá maiorem esse datá.

a 4. huius.
b 2. huius.

PROPOSITIO XIII.

Si fuerint tres magnitudines,& earum prima ad secundam habeat rationem datam, secunda autem tertia maior sit, data, quàm in ratione, prima quoque maior erit tertia, data, quàm in ratione.

A F B
C G D
E

Sint tres magnitudines AB,CD, & E;sitque data proportio magnitudinis AB, ad magnitudinem CD;præterea magnitudo CD, maior sit magnitudine E, data,quàm in ratione. Dico magnitudinem AB, maiorem esse E magnitudine, data, quàm in ratione. Supponamus datam DG;fiat autem vt DC, ad CG, ita AB, ad AF. Quoniam igitur est vt DC, ad GC, ita BA, ad FA erit [a] vt DC, ad BA, ita GC, ad FA, & consequenter, vt DC, ad BA, ita erit [b] DG, ad BF, sed ex hypotesi DG, data est; ergo, & B F, per secundam huius data erit,[c] est autem ex hypotesi data proportio AB ad CD, & erat, vt DC, ad BA, ita GC,ad FA erit igitur,vt FA,ad GC, ita AB, ad CD; ratio igitur FA, ad G C, data erit;[d] ex hypotesi verò data est ratio GC, ad E ergo data erit [e] ratio FA, ad E; conclusimus autem supra BF datam esse, ergo A B maior erit E data quàm in ratione.

a 16. quinti.
b 19 quinti.
c 2. huius.
d 2.def huius.
e Per octaua huius.

PROPOSITIO XIIII.

Si duæ magnitudines ad inuicem habeant rationem datam, vtrique autem illarum adijciatur data magnitudo tota, ad inuicem, aut habebunt rationem datam, aut altera altera maior erit data, quàm in ratione.

B A H E
D G F

Datæ sint duæ magnitudines, A E, G F; dataque sit ratio, vt A B, ad G D. Dico, vel B E, ad D F rationem, habere datam; vel BE, maiorem esse magnitudine DF, data, quàm in ratione. Supponamus primò esse,vt AB,ad GD ita AE, ad G F; erit [a] vt B E, ad D F, ita A B, ad G D; est autem ex hipothesi data ratio A B, ad G D,ergo ratio BE,ad GF, data erit. [b] Secundò supponamus esse, vt A B, ad G D, ita A H, ad G F erit [c] vt BH ad D F, ita A B, ad G D; at verò ex hypothesi data est ratio A B ad GD, estque [d] data ratio B H, ad D F; insuper data est [e] A H, eo quod suppositum sit esse, vt AB, ad GD, ita AH, ad G F, quæ data erat, ergo data est [f] HE; quamobrem magnitudo BE maior [g] erit magnitudine DF datá quàm in ratione.

a 12. quinti.
b 2. definit. huius.
c 12. quinti.
d Per secundā definit. huius.
e 2. huius.
f 4. huius.
g Per 11. defin. huius.

PROPOSITIO XV.

Si duæ magnitudines habeant, ad inuicem rationem datam,& ab vtraque earum auferatur data magnitudo: reliquæ magnitudines, ad inuicem habebunt, aut rationem datam, aut altera, altera maior erit, data, quàm in ratione.

B A H E
D G F

Datæ sint duæ magnitudines E H; F G, sitque pariter data ratio B E; ad D F; Dico rationem B H, ad D G, vel esse da- vel B H maiorem esse D G datá quàm in ratione.

Supponamus primò, vt BE,ad DF,ita esse EH,ad FG ergo erit [a] vt BH ad DG, ita BE,ad DF,at verò ex hypothesi ratio BE, ad DF, est data,ergo ratio BH,ad DG, erit [b] quoq; data.

a 19 quinti.
b 2. huius.

E Sup-

Supponamus secundò, vt BE, ad DF, ita esse EA, ad GF; ergo erit [c] AB, ad GD, vt BE, ad DF, at verò ex hypothesi, data est ratio BE, ad DF, estque [d] data ratio AB, ad GD, & insuper est [e] data EA, cum supponeremus esse, vt BE, ad DF, ita EA, ad GF, ex hypothesi quoque data est EH, & præterea est [f] data HA, ergo per vndecimam definitionem huius BH maior erit DG, datâ quàm in ratione.

c 19. quinti. d 2. huius. e 2. huius. f Per 4. huius.

PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines, ad inuicem habeant rationem datam; & ab vna quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem ipsarum adijciatur data magnitudo, tota residua magnitudine maior erit, data quàm in ratione.

B A H E
D G F

Datæ sint duæ magnitudines HE, GF; data quoq; sit ratio BH, ad DF. Dico BE maiorem esse DG, data quàm in ratione. Fiat [a] vt DF, ad BH, ita GF, ad AH. Quoniam igitur ex hypothesi data est GF, & præterea data [b] est AH; siquidem fecimus, vt DF, ad BH, ita GF, ad AH, & quoniam data est HE ex hypothesi; erit & [c] AE, quoque data; quoniam autem est, vt DF, ad BH, ita GF, ad AH erit [d] & BH, ad DF, vt BA; ad DG; supponebamus autem rationem BH, ad DF, datam esse, estque [e] data ratio BA, ad DG, siquidem ei datur eadem BH, ad DF dicebamus etiam datam esse AE, ergo erit [f] BE, maior DG, datâ quam in ratione.

a 12. sexti. b 2. huius. c 3. huius. d coroll. 4. & 19. quinti. e 2. definit. huius. f 11. definit. huius.

Vel sic

Datæ sint magnitudines HB, FD, quæ necessariò habebunt [g] rationem datam, & ex FD auferatur data magnitudo GF, & magnitudini HB addatur data magnitudo HE. Dico totam EB reliqua GD maiorem esse data, quàm in ratione. Quandoquidem ratio ipsius HB ad FD data est, fiat [h] vt HB ad FD, ita AH ad FG, ergo ratio ipsius AH ad FG data erit, [i] est autem data FG, igitur AH data erit, [k] est autem EH data igitur tota EA data est: [l] Et quia est vt HB ad FD, ita AH ad FG, ergo residua AB ad residuam GD rationem habebit [m] datam, est autem AE data magnitudo, igitur magnitudo EB magnitudine GD maior est, [n] datâ quam in ratione.

g 1. huius. h 12. sexti. i 2. def. huius. k 2. huius. l 3. huius. m 19. quinti. n 11. definit. huius.

PROPOSITIO XVII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem, secunda maior sit data quàm in ratione; tertia quoque eadem secunda maior sit data quàm in ratione; prima ad tertiam, aut rationem habebit datam; aut altera, altera maior erit data, quàm in ratione.

A H B
C E D
F

Sint datæ magnitudines BH, & DE, & AB sit maior F data quàm in ratione, CD, verò F, maior datâ quàm in ratione. Dico rationem AB, ad CD esse datam; vel AB, maiorem esse CD, data quàm in ratione. Quoniam ratio AH ad F est data; [a] namq; supponitur AB maior F datâ quàm in ratione, at verò HB supponitur data, ergo si hæc auferatur reliqua AH ad ipsam F habebit rationem datam. [b] & ratio CE ad F, est data ob eandem rationẽ; & ratio AH, ad CE, pariter data [c] est; ergo, vel ratio AB, ad CD, est data, vel AB, est maior CD datâ quàm in ratione per 14. propositionem huius.

a 11. definit. huius. b 11. definit. huius. c 8. proposit. huius.

PROPOSITIO XIIX.

Si fuerint tres magnitudines, atq; ex his vna vtraque reliquarum maior sit, data, quàm in ratione reliqua duæ, aut datam rationem habebunt ad inuicem, aut altera, altera maior erit data quàm in ratione.

A H B
C L G D
E F K

Datæ sint magnitudines DG, & DL, at CD, maior sit AB, datâ quàm in ratione CD, maior EF data quàm in ratione. Dico rationem AB, ad EF esse datam, vel AB maiorem esse EF data quàm in ratione; fiat [a] vt ratio CG, ad AB, ita GD, ad BH, & de-

a 12. proposit. sexti.

inde,

inde, vt CL, ad EF ita LD ad FK. Quoniam enim est, [b] vt C G, ad A B, ita C D, ad A H, siquidem, vt CG, ad A B, ita ex cōstructione est G D, ad BH; ratio verò C G, ad A B, [c] est data, ratio ergo CD, ad AH, erit [d] data; ratio verò GD, ad B H, est [e] data; siquidem, vt CG ad AB, ita GD, ad BH ex constructione, & ratio CG, ad AB, est data; at verò G D, est ex hypotesi data, ergo BH erit, [f] data; cūq; vt CL, ad EF ita sit LD ad F K; deturq; L D, ergo FK dabitur; itē ratio C D, ad E K, data est, ratio autem AH, ad EK per 8. huius est data. siquidem ratio CD, ad E K, & CD, ad AH, est data, ergo AB maior erit EF data quàm in ratione; Vel ratio AB ad EF, est data per 15. huius.

b 12. quinti. c 1. def. huius. d 2. def. huius. e 2. def. huius. f 2. huius.

Vel sic

Sint tres magnitudines AB, CD, EF, ex his vna, quæ sit C D, vtraque reliquarum AB, EF maior sit, data quàm in ratione. Dico vtramque magnitudinum AB, EF aut ad inuicem habere rationem datam, aut alteram alterà maiorem esse data, quam in ratione. Quandoquidem magnitudo CD, magnitudine AB maior est, data quam in ratione, auferatur data magnitudo DG, ergo reliquæ GC ad A B data ratio est. [g] Fiat autem vt GC ad AB, ità DG ad BH; ergo ratio ipsius GD ad BH data est. Est autem G D data, igitur BH data est; [h] & propterea [i] totius DC ad totam HA data ratio est.

Deinde cum D C ipsà F E maior sit, data quàm in ratione, auferatur data magnitudo DL, ergo reliquæ LC, ad FE data est [k] ratio; Fiat autem vt LC ad FE, ità DL, ad KF, igitur ipsius DL, ad KF data ratio est; data est autem DL, igitur K F data est, [l] propterea [m] totius DC ad totam KE data ratio est. Ipsius autem DC, ad HA data ratio est, igitur, ipsius HA, ad KE data ratio est. [n] Sunt autem ablatæ ab ipsis datæ magnitudines HB, KF, igitur A B, ad FE, aut ad inuicem [o] habent rationem datam, aut altera, altera maior erit; data, quam in ratione.

g 11. definit. huius. h 3. huius. i 12. quinti. k 11. definit. huius. l 2. huius. m 12. quinti. n 8. huius. o 15. huius.

PROPOSITIO XIX.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo, secunda magnitudine, maior, sit data quàm in ratione sit quoque secunda maior tertia, data, quàm in ratione; prima magnitudo, tertia magnitudine, maior erit data quàm in ratione.

B G H

C E D

F

DAtæ sint magnitudines HA, E D; At verò AB, sit maior D C, data quàm in ratione, D C, maior F datà, quàm in ratione, fiat per 12. sexti vt C D, ad B H, ita D E, ad H G, Quoniam DE est data ex hypothesi; ratio verò DE ad HG est [a] data, cum sit vt CD, ad BH, ita DE, ad HG, & G H erit [b] data; ex hypothesi A H est data; Et A G erit [c] data; est [d] verò eadem ratio H G, ad D E, & B H, ad C D, cum sit vt C D, ad B H ita D E, ad H G, ita ergo erit, [e] vt G B, ad E C, ita BH, ad CD. At verò ratio BH, ad CD est [f] data, & ratio GB, ad EC erit [g] data, ratio autem F, ad EC, est [h] quoque data, ergo ratio G B, ad F, erit [i] data proinde ratio A B, ad F, maior erit [k] data, quàm in ratione; per 11, defin. huius, cum AG sit ostensa data.

a 2. def. huius. b 2. huius. c 3. huius. d Corol. 4. 5. e 19. quinti. f 11. definit. huius. g 2. definit. huius. h 11. definit. huius. i 8. huius. k 11. definit. huius.

PROPOSITIO XX.

Si datæ, duæ, fuerint magnitudines, & auferantur ab ipsis magnitudines habentes, ad inuicem rationem datam, residuæ magnitudines, aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera, altera maior erit, data, quàm in ratione.

B A H E

D G C

DAtæ sint B E, D C, & ratio H E, ad G C, sit data. Dico rationem BH, ad DG, esse datam, vel BH maiorem esse DG data, quàm in ratione. Primò supponatur, vt HE, ad GC, ita esse BE, ad DC, Proinde, vt B H, ad D G, ita est [a] HE, ad G C, ex hypothesi verò ratio HE, ad GC est data; ergo ratio BH, ad D G erit [b] data.

Secundò supponatur vt HE, ad GC, ita esse AE, ad DC, ex hypoth. ratio HE, ad GC, est data, & ratio AE, ad DC, erit [c] data; ex hypothesi verò DC, est data ergo, & AE est [d] data;

a 19. quinti. b 2. def. huius. c 2. def. huius. d 2. huius.

E 2 ta;

c 4. huius. f 19. quinti g 2. Datorũ. h 11. definit. datorum. ta, ex hypothesi autem BE est data, & AB erit c data, vt autem HE ad GC, ita est ex suppositione AE, ad DC quare erit f vt AH, ad DG ita H E, ad GC eritque g ratio A H, ad D G data, cùm ratio HE, ad GC, sit data; proinde BH. maior h erit DG datâ quàm in ratione, quandoquidem AB, est ostensa data.

PROPOSITIO XXI.

Si fuerint duæ magnitudines datæ, & adyciantur ipsis aliæ magnitudines habentes, ad inuicem rationem datam, totæ, aut habebunt ad inuicem rationem datam, aut altera, altera maior erit data, quàm in ratione.

B A H E

D G C

Datæ sint HB, GD, ratio verò HE, ad GC sit data. Dico rationem BE, ad DC esse datam; vel BE maiorem esse DC, datâ quàm in ratione. Supponatur primò, vt H E, ad GC, ita esse HB, ad GD erit, a vt BE, ad D C, ita HE, ad GC, ratio verò HE, ad GC est data ex hypothesi, ergo ratio, BE, ad DC erit b dat a.

a 12. quinti. b 2. definit. datorum. c 2. def. huius d 2 datorum. e 4 datorum. f 12 quinti. g 2. datorũ. Secundò supponatur, vt HE, ad GC, ita esse HA, ad GD, erit c HA, ad GD, ratio data, at GD ex hypothesi est data; itaq; HA erit d data; at HB ex hypothesi est data, ergo e AB erit data; sed ex suppositione secũda, vt HE, ad GC, ita est HA, ad GD ergo erit, f vt AE, ad DC, ita HE, ad GC, at ratio HE, ad GC, ex hypothesi est data; ratio igitur AE, ad DC erit g data ergo B E, maior erit D C data, quàm in ratione. Per 11. definit. Datorum; quandoquidem A B demonstrauimus datam.

PROPOSITIO XXII.

Si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant rationem datam, & simul vtraque ad eandem habebit rationem datam.

D E F A

a 8 Datorũ. b 6. datorum. c 8 datorum. Data sit ratio DE ad A, & ratio EF, ad A, sit pariter data. Dico rationem DF ad A esse pariter datam. Quoniam ratio DE, ad EF, est data, cum ratio DE ad A, & EF, ad A sit data per 8. Datorum, siue huius; ratio verò D F, ad E F est b data; & ex hypothesi ratio E F, ad A est data, ergo ratio DF ad A est c quoque data.

PROPOSITIO XXIII.

Si totum ad totum habeat rationem datam, habeant autem, & partes ad partes rationes datas, etsi non easdem, habebunt omnia, ad omnia rationes datas.

E H A B

C G D

a 12 sexti. b coroll. 4. quinti. c 19. quinti. Data sit ratio E B, ad CD item ratio EH, ad C G, demum ratio H B, ad G D. Dico rationes EH ad H B, & HB, ad C G, & C G ad G D, esse datas. Fiat a ut C G, ad E H, ita C D, ad E A. Quoniam igitur est, ut EH, ad C G, ita b EA, ad CD, erit c ut GA, ad HD ita EH, ad CG; cum enim sit, ut tota E A, ad totam C D, ita ablata E H, ad ablatam C G, erit per 19. quinti, reliqua H A, ad reliquam G D, ut tota E A, ad totam C D, & consequenter, ut

d 2. definit. huius. e 8 huius. f 5. huius. g coroll. 4. quinti. h 6 huius. E H, ad C G, at verò ex hypothesi ratio E H, ad C G est data; item ratio H A, ad G D est d data, ratio verò, H B, ad G D ex hypothesi data est, proinde ratio H B, ad H A, erit e data; hinc verò sequitur f rationem H B, ad A B datam esse; at verò ex hypothesi data quidẽ est ratio EB, ad CD, quemadmodum etiam ratio EA, ad CD est g data, quandoquidem, ut E H, ad C G, ita est EA, ad CD per coroll. quartæ, Quinti; cum ut C G, ad EH, ita facta sit CD, ad E A; quamobrem ratio E A, ad EB data h erit; atque adeo ratio

i 6. huius. k 8 huius. l 5. huius. m 8 huius. n 8. huius. EB, ad AB erit i data. Demonstrauimus autem rationem H B, ad A B datam esse, ergo ratio E B, ad H B, erit k data, proinde ratio E B, ad E H erit l data, & insuper ratio EH, ad HB, data erit m cumque data sit ex hypothesi ratio E H, ad CG sequitur n proinde rationem H B, ad C G datam esse; est autem ex hypothesi data ratio H B

ad

ad G D ergo per 8. huius data erit ratio C G ad G D, quare omnia ad omnia habebunt rationem datam.

PROPOSITIO XXIV.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; prima autem, ad tertiam habeat rationem datam, & ad secundam habebit rationem datam.

VT A,ad B, ita sit B, ad C, ratio A,ad C, sit data. Dico rationem A,ad B esse datam. Quoniam ratio A,ad C ex hypothesi est data, ut verò A, ad C ita [a] quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & C ergo ratio quadrati ex A, ad rectangulum sub A, & C erit [b] data; sed quadratum ex B, est [c] æquale rectangulo sub A,& C ergò ratio quadrati ex A, ad quadratum ex B, erit [d] data, ergo ratio A, ad B, erit quoque [e] data. Sic breuiùs, quàm in textu, &c.

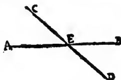
A ————
B ————
C ————
D ————
E ————
F ————

a prima sexti.
b 1. huius.
c 17. sexti.
d 7. quinti.
e 1. huius.

PROPOSITIO XXV.

Si duæ rectæ positione datæ, se mutuo invicem secuerint, punctum in quo se inuicem secant positione datum est.

SInt duæ lineæ positione datæ A B, C D, quæ se inuicem secent in puncto E, Dico datum esse punctum E si namque punctum E, diuersas posset habere positiones, necesse foret saltem, & rectarum alteram A B, C D diuersas habere positiones, quod contra hypothesin est, ergo datum, est punctum E, Quod oportebat, &c.



SCHOLION.

NOn dissimili arte ostendetur punctum interfectionis cuiuscumque binarum linearum positione datarum; siue nempe utraque sit recta, siue vna recta, altera curua, & in vno tantum puncto, se mutuo secantium, esse datum, &c.

PROPOSITIO XXVI.

Si lineæ rectæ extremitates positione datæ sint, recta positione, & magnitudine data est.

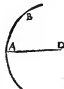
DAta sint puncta A, & B, positione, Dico A B, esse datam positione, & magnitudine Data est A B, positione, & magnitudine; namque manente A, si intercidet rectæ lineæ, aut positio, aut magnitudo, intercidet extremum B, Quod est absurdum; non enim intercidit.

A ———— B

PROPOSITIO XXVII.

Si data recta linea positione, & magnitudine, data fuerit vna extremitas; & altera extremitas data erit.

DAta sit linea D A, & D est punctum datum. Dico punctum A esse datum. Fiat [a] circulus D A B, Quoniam semicirculus A D, est [b] positione datus; est verò D A, data ex hypothesi ergo punctum A erit [c] datum.

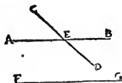


a 3. petitio primi.
b 6. definitio Datorum.
c Scholion. 25. Datorum.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Si per datum punctum contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.



Datum sit punctum E sitque F G linea recta data positione, & AEB, sit parallela rectæ F G. Dico AB esse datam positione. Supponamus C E D esse parallelam ipsi FG, ex dato enim id quidem supponendũ, cum manente puncto E positio ipsius AEB, quæ parallela ex hypothesi est ipsi FG alibi cadere dicatur, puta in CED, ex hypothesi vero AB est parallela rectę FG est [a] ergo CD parallela rectæ A B, contra 34. primi definitionem, ergo erit AB data positione.

a 30. primi.

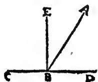
Vel sic

Per datum punctum E contra datam positione rectam FG agatur recta AEB. Dico positione datam esse lineam A E B Si enim data non sit, manente puncto E alibi cadet rectæ AEB positio. Alibi iam cadat manente FG parallela, eaque esto CED, ergo parallela est FG ipsi CED, sed FG ipsi AEB est parallela, igitur AEB ipsi CED parallela erit [b] & simul coincidet, quod est, absurdum. Quamobrem positio rectæ AEB alibi non cadit, ac proinde recta AEB positione data est.

b 11. axioma primi.

PROPOSITIO XXIX.

Si ad positione datam rectam, datumque in ea punctum agatur recta linea, quæ faciat angulum datum, acta linea positione data est.



Data sit CD recta linea positione, datumque sit B punctum, sitque angulus ABD datus. Dico A B, esse datam positione. Supponamus angulum DBE, æqualem esse angulo dato, at ex hypothesi angulus DBA, æqualis est angulo dato, ergo angulus D B E erit [a] æqualis angulo DBA contra nonum axioma primi, ergo BA est [b] positione data.

a 11. axioma primi.
b 11. axioma primi.

Vel sic

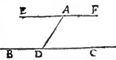
Ad datam positione rectam C D, & datum in ea punctum B agatur linea A B, quæ faciat angulum datum DBA. Dico positione datam esse rectam B A. Quandoquidem si positione data non sit, manente puncto B alibi cadet positio rectæ BA, seruans anguli DBA magnitudinem. Cadat alibi, & esto ∪ E. Igitur angulus DBA angulo DBE æqualis est maior minori, quod est absurdum. Igitur positio rectæ A B non cadet alibi. Quamobrem data erit recta AB positione.

SCHOLION.

In ipsa propositione partes, ad quas angulus datus est constitutus, debent esse datæ.

PROPOSITIO XXX.

Si, à dato puncto in datam positione rectam agatur recta linea, quæ faciat angulum datum, acta linea positione data est.



Data sit recta positione BC sitque A punctum datum, & ADC, sit angulus datus. Dico AD esse datam positione, Fiat EAF parallela rectæ B C. Quoniam B C, est recta data positione ex hypothesi, & per constructionem EF est parallela rectæ BC ergo erit [b] E F, data positione; at verò ex hypothesi angulus ADC, est datus, & angulus DAE est [c] æqualis angulo ADC, erit [d] ergo angulus DAE, datus, at punctum A ex hypothesi est

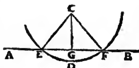
a 31. primi.
b 28. Datorũ.
c 29 primi.
d 1. definit. Datorum.

est datum, ob id AD est [e] data positione. e 19. huius.

PROPOSITIO XXXI.

Si à dato puncto in datam positione rectam, data magnitudine recta ducatur, positione quoque data erit.

DAtum sit punctum C, & AB sit recta data positione; CE, sit recta data magnitudine. Dico CE esse datam positione. Fiat [a] circulus CEF. Quoniam segmentum circuli EDF est [b] datum positione, siquidem eius centrum C positione datum est, & quæ ex centro est linea CE magnitudine est data, & ex hypothesi AB, est recta data positione; ergo E, & F erunt [c] puncta data positione, siquidem duæ lineæ positione datæ, si se invicem secent positione datur punctum intersectionis; ergo CE, & CF, sunt [d] rectæ datæ positione.



a 3. petitio primi. b 6. defin. huius. c Schol. 25. huius. d 26. huius.

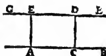
S C H O L I O N.

Si data linea sit maior perpendiculari CG, non erit data positione, nisi præscribatur, ad quam partem perpendicularis CG ducenda sit; cum enim CF sit æqualis CE data recta poterit habere duplicem positionem.

PROPOSITIO XXXII.

Si in datas positione parallelas rectas, agatur recta linea, quæ faciat angulos datos, acta recta magnitudine data est.

DAtæ sint positione AB, & GF, & AB, & GF sint parallelæ; sintque BAE, & AEF, anguli dati. Dico AE esse datam magnitudine. Detur punctum C, utcumque in recta AB; fiat [a] autem angulus BCD, æqualis angulo CAE. Quoniam autem per constructionem angulus BCD est æqualis angulo BAE, & CD est [b] parallela rectæ AE, ex hypothesi verò angulus BAE, datus est, ergo angulus BCD erit [c] datus; at AB ex hypothesi data est positione, punctumque C per constructionem datum est, ergo CD est [d] positione data; at ex hypothesi GF, est positione data; ergo punctum D, est [e] datum; proinde CD datam esse [f] magnitudine necesse est; cumque AE sit [g] æqualis CD; sequitur per primam definitionem huius rectam AE magnitudine datam esse.

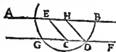


a 23. primi. b 29. primi. c 1. definit. huius. d 29. huius. e 25. huius. f 16. huius. g 34. primi.

PROPOSITIO XXXIII.

Si in datas positione parallelas rectas agatur magnitudine data recta, faciet angulos datos.

DAtæ sint positione AB, & GF, & AB sit parallela rectæ GF, & EC sit magnitudine data. Dico angulos BEC; ECF esse datos. In recta AB, detur quodcunque punctum H; atque fiat [a] HD parallela rectæ EC; & describatur [b] circulus HBDG, ex centro H. Quoniam igitur HD, & EC sunt [c] inter se æquales, est autem exhypothesi recta EC data magnitudine erit [d] proinde HD, magnitudine quoque data; at verò per constructionem datum est punctum H, [e] proinde circumferentiæ pars GDB, erit [e] positione data; at verò GF est ex hypothesi positione data, ergo punctum D, erit [f] datum positione; quamobrem & HD, erit [g] positione data; at verò GF, data est ex hypothesi positione, angulus igitur, HDF, erit [h] datus; at verò angulus ECF est [i] æqualis angulo HDF, ergo angulus ECF, erit [k] datus; quamobrem angulus CEB erit [l] pariter datus.



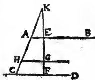
a 31. primi. b 3. petitio primi. c 34. primi. d 1. definitio huius. e 6. definit. huius. f 25. huius. g 26. huius. h 5. 4. def. huius. i 29. primi. k 1. def. huius. l 29. primi, & 4. huius.

SCHO-

PROPOSITIO XXXVII.

Si in datas positione parallelas rectas, agatur recta linea, & secetur ratione data, agatur autem per sectionis punctum contra datas positione rectas, linea recta; acta recta linea positione data est.

DAtæ sint positione AB, CD, & rectæ AB, CD sint parallelæ; ratio verò AH, ad HC, sit data, & HG sit parallela rectæ AB, vel CD, Dico HG esse datam positione.



Primò si AC, EF, non sint parallelæ, sed coeuntes ad partes AE, ita; Sit punctum E, ut cunque datum in AB, fiat [a] EF, ad CD perpendicularis. Quoniam AC, & EF, non sunt parallelæ, & K est punctũ interſectionis; In hac enim hypothesi [b] supponuntur CA, & FE non parallellæ, sed coeuntes protractæ ad punctum K, recta EF erit [c] data positione, at verò ex hypothesi CD est data positione; ergo punctum F est [d] datum; at verò punctum E est datum, cùm factum sit arbitrarium in AB, & EF erit [e] data magnitudine; ut autem CH, ad HK, ita est [f] FG ad GK, & ut HK, ad AK, ita est [g] GK, ad EK; & ut AK, ad HA ita est [h] EK ad EG, ergo, ut CH, ad HA, ita est [i] FG, ad GE, ratio verò CH, ad HA, est ex hypothesi data; ergo ratio FG, ad GE erit [k] data; at verò FE est [l] data, ut ostensum est supra, & FG, GE. erunt [m] datæ; & præterea FE est [n] data positione; at punctum E est datum arbitrarium; ergo Punctum G erit [o] datum, qua propter HG est data positione per 28. huius.

Quòd si AC, EF forent parallelæ sic procederet demonstratio. Quoniam igitur AC, EF sunt parallelæ; ex hypothesi verò parallelæ sunt lineæ AE, CF, propterea ACFE erit parallelogrammum, quamobrem latus AC lateri EF æquale erit. Rursus cùm sint parallelæ rectæ HG, CF, ex hypothesi; & sint etiam parallelæ HC, GF, erit & HF parallelogrammum, ideoque latus HC lateri GF æquale erit; quam ob rem æquales AC, EF ad æquales HC, GF eandem habebunt rationem, atque ad eo, ut AC ad CH, ita EF ad GF, & diuidendo ut AH ad HC, ità EG ad GF, &c. est autẽ data ratio CH ad HA, ergo & ratio FG ad GE data erit, at verò FE est data, ut ostensum est supra, & FG, GE erunt datæ, & præterea FE est data positione, at punctum E est datum arbitrarium, & punctum G est datum, quapropter HG est data positione per 28. huius.

a 31. primi.
b ex hypoth.
c 30. huius.
d 25. huius.
e 26. huius.
f 2. sexti.
g Corol. 4. 6.
h 2. sexti.
i 22. quinti.
k 2. huius.
l 27 huius.
m 7. huius.
n 30. huius.
o 25. huius.

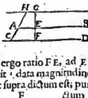
COROLLARIUM.

Ex his infertur per modum corollarij; rectas CF, HG, AE esse inter se parallelas; nam ut CH, ad HA, ita FG, ad GE, quandoquidem erat, ut CH, ad HA, ita FG, ad GE, ut supra ostendimus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Si in datas positione parallelas rectas, agatur recta linea; adijciatur autem ipsi quædam recta, quæ, ad illam quæ acta est habeat rationem datam, per extremitatem autem adiectæ agatur contra datas positione parallelas recta linea; acta recta linea, est data positione.

DAtæ sint positione AB, CD, & eædem AB, & CD sint parallelæ; ratio HA, ad AC sit data; & HG ipsi AB, vel CD, sit parallela. Dico HG esse positione datam. Datum sit punctum E, arbitrarium in recta AB, & [a] fiat EF perpendicularis ipsi CD, protrahatur autem FE usque ad G [b] Quoniam EF est [c] data positione; & CD est positione data ex hypothesi; punctum ergo F erit [d] datum; & EF erit [e] data; præterea, ut FE, ad EG, ita CA, est [f] ad AH, est autem ex hypothesi data ratio CA, ad AH, ergo ratio FE, ad EG erit [g] data; est autem [h] FE data, ut supra, ostendimus, ergo EG erit [i] data magnitudine; & EG data erit [k] positione, at punctum E est datum arbitrarium, ut supra dictum est; pun-



a 12. primi.
b 2. p titio primi.
c 30. huius.
d 25. huius.
e 26. huius.
f Coroll. 37. huius.
g 2. desf huius
h 20. huius.
i 2. huius.
k 29. huius.

l 18. huius. ctum verò G est l quoque datum; proinde HG est data positione per 28. huius; &c. nam per punctum G contra datam positione rectam AB acta est recta HG.

PROPOSITIO XXXIX.

Si trianguli singula latera magnitudine data sint; triangulum specie datum est.

a 2. primi. b 3. primi. c 3. primi. d 3. primi. e 2. definit. huius. f 27. huius. g 1. def. huius. h 27. huius. i def. huius. k 27. huius. l 6. def. huius. m 25. huius. n 26. huius. o 39. huius. p 8. primi. q 3. def. huius.

Sit triangulum ABC, & rectæ AB, AC, CB, datæ sint magnitudine. Dico triãgulum ABC esse datum specie. Punctũ D arbitrarium sit datũ, & DE sit a data positione; fiat b DF, æqualis AB, & FG æqualis AC, & GH, æqualis CB, fiat c autem FDKL, circulus, & GHKM ite d circulus. Quoniam AB est ex hypothesi data, & DF per constructionem est æqualis AB, ergo DF, erit e data; at DF, est data positione per constructionem, & etiam ex constructione D, est punctum datum; ergo F est f punctum datum; est autem FG per constructionem æqualis AC; & AC, est ex hypothesi data, ergo; FG est g data, & punctum G erit h datum CB est data ex hypothesi, & GH, æqualis est CB, ergo GH erit i data, proinde k, H est punctum positione datum; & FDK, & GHK, sunt l circuli dati positione; ergo K est m punctum datum, sunt n autem FK, FG, GK datæ positione, et magnitudine, triangulum ergo FGK est o datum specie, triangula ABC, FGK sunt p æqualia, et similia inter se, ergo triangulum ABC erit q datum specie.

PROPOSITIO XL.

Si trianguli singuli anguli magnitudine dati sint triangulum specie datum est.

a 23. primi. b 32. primi. c 1. def. huius. d 29. huius. e 25. huius. f 26. huius. g 1. huius. i 3. def. huius. l 4. sexti, & 3. def. huius. k 3. def. huius.

Dati sint anguli A, B, C, magnitudine. Dico triangulum ABC esse datum speciem; sit ad arbitrium data EF positione, et magnitudine; angulus autem E fiat a æqualis angulo B. angulus F, æqualis angulo C. Quoniam reliquus angulus D, est b æqualis reliquo angulo A, anguli itaque E, D, F, sunt dati magnitudine, cùm sint æquales angulis B, A, C, & ED, FD erũt c d data positione, quapropter punctum D est e datum positione, itaque EF, ED, FD, sunt f datæ positione, & magnitudine, siquidem EF, est data positione, & magnitudine; rationes verò DE, ad EF, & EF ad FD, & DE, ad DF, sunt g datæ, propterea triangulum EDF est i datum specie, est l autem triangulum ABC simile triangulo DEF, ergo triangulum ABC est k datum specie, &c.

PROPOSITIO XLI.

Si triangulum, vnum angulum datum habeat, circa datum autem angulum duo latera ad inuicem habeant datam rationem, triangulum specie datum est.

a 23. primi. b 12. sexti. c 1. post. 1. d 19. huius.

Datus sit angulus A, & ratio AB, ad AC sit data. Dico triangulum ABC esse datum specie, sit ad arbitrium ED positione, & magnitudine data; fiat a verò angulus EDF æqualis angulo A, & ut AB, ad AC. Fiat b DE, ad DF, sit c verò EF linea recta. Quoniam angulus A ex hypothesi est datus, & angulus D, est datus, cùm sit æqualis BAC dato; ergo DF d erit positione data;

cum

cum autem ratio AB, ad AC sit ex hypothesi data, ratio D E, ad DF, erit [e] data; quandoquidem est, ut AB, ad AC, ita DE ad DF, & per constructionem, data est DE, ergo DF est data [f] magnitudine, Punctum verò F erit [g] datum, cum FD sit data positione, & magnitudine, datumque sit punctum D, & DF, EF, erunt [h] datæ positione, & magnitudine, cùm etiam datum sit punctum E, itaque erit [i] triangulum DEF datum specie; est [k] autem triangulum A B C, simile triangulo DEF, cùm anguli ad A, & D sint æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia; ergo triangulum ABC est [l] datum specie.

e 4. defin. huius. f 2. huius. g 27. huius. h 26 huius. i 39 huius. k 6 sexti. l 3 defin. huius.

PROPOSITIO XLII.

Si trianguli latera ad inuicem habeant rationem datam, triangulum specie datum est.

SVpponamus dari triangulum ABC, & rationes AB, ad BC, AB, ad AC, BC, ad CA esse datas. Dico triangulum ABC esse datum speciе. Data sit, ad arbitrium magnitudo G, & ut A B ad B C, ita fiat [a] G, ad H; & vt BC, ad C A, [b] ita fiat H, ad L, ex tribus autem rectis lineis, G, H, L, constituatur [c] triangulum D E F, adeo ut DE sit ęqualis G, EF ęqualis H, & DF ęqualis L. Quoniam G est per constructionem data; sunt [d] ergo H, & L, datę magnitudine, itaque DE, EF, DF sunt [e] datę; est [f] ergo triangulum D E F datum specie, vt autem AB, ad BC, ita est ex constructione G, ad H, &, ut D E, ad E F ita est [g] G, ad H, proinde, vt A B, ad BC, ita erit [h] D E, ad EF; ut verò BC, ad CA, ita est ex constructione H, ad L, & vt E F, ad F D ita est [i] H, ad L; proinde, ut BC, ad CA, ita erit [k] EF, ad FD, qua propter, ut AB, ad AC, ita erit [l] DE, ad DF, simile est [m] igitur triangulum A B C triangulo D E F, estque triangulum D E F [n] datum specie, ut supra ostendimus; ergo triangulum ABC, est datum specie per 3. definit. huius.

a 12. sexti. b 12. sexti. c 22. primi. d 2 huius. e 1. def. huius. f 39 huius. g 7 quinti. h 11. quinti. i 7. quinti. k 11 quinti. l 22. quinti. m 5 sexti. n 39. huius.

PROPOSITIO XLIII.

Si trianguli rectanguli circa vnum acutorum angulorum latera, ad inuicem habeant rationem datam triangulum specie datum est.

SVpponatur triangulum A B C, rectangulum, & angulus B A C rectus; ratio verò B C, ad B A sit data. Dico triangulum ABC, esse datum specie; sit, ad arbitrium D E, data positione, & magnitudine, & fiat [a] semicirculus D H E, & fiat [b] ut BC, ad BA, ita DE, ad M; estque [c] B C, maior B A, & D E, maiòr [d] M, D H autem ęqualis [e] ipsi M; EH, sit [f] ducta linea recta, DHGk, sit [g] circulus descriptus. Quoniam D H E est [h] pars circumferentiæ data positione, & GHK, est [i] pars circumferentię positione data, ergo punctum H, est [k] datum; sunt autem D, & E puncta data; ergo D E, D H, H E, sunt [l] datę positione, & magnitudine; itaque triangulum D E H, est [m] datum specie, & triangulum ABC, simile est [n] triangulo DEH, nã triangulum ABC, DHE, vnum angulum vni angulo æqualem habent, nempe, rectum, circa autem alios CBA, EDH vtrumq; simul recto minorem latera proportionalia, ergo triangulum A B C, triangulo DHE, simile erit per 7. Sexti, ergo triangulum A B C est [o] datum specie.

a 3 pet. primi. b 12 sexti. c 19 primi. d 14. quinti. e 3. quart. f 1. pet. primi. g 3 pet. primi. h 6 def huius. i 6. def huius. k Schol. 25. huius. l 26. huius. m 39 huius. n 7. sexti. o 3 def huius.

PROPOSITIO XLIV.

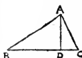
Si triangulum habeat, vnum angulum datum, circa alium autem angulum, latera ad inuicem habeant rationem datam, triangulum specie datum est.

SVpponatur triangulum BAC, sitque angulus ABC datus, & ratio BA ad AC, sit data. Dico triangulum A B C esse datum specie; supponatur primò angulus A B C minor recto, & recta AD fiat [a] perpendicularis, ad B C, angulus A D B est [b] datus, angulus autem A B C, ex hypothesi est datus, angulus B A D est [c] datus, ergo triangulum A D B,

a 12 primi. b 11 axiom. primi. c Coroll. 32.

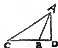
d 40. huius. e corol. 3. def. huius. f 8. huius. g 41. huius. h coroll. 3. def. huius. i 32 primi. k 40 huius.

est d datum specie; atque ratio B A, ad A D erit e data; ex hypothesi verò ratio B A, ad A C est data; ergo ratio A D ad A C est f data; at verò angulus ADC, est rectus ex constructione; ergo triangulum ADC, est g datum specie, & angulus A C D est h datus, est vero & hypothesi datus angulus A B C, & angulus BAC est i datus; ergo triangulum BAC est k datum specie.



l 2. petitio 2. m 12. primi. n 4. huius. o 12. axioma primi. p 32. primi. q 40. huius. r corol. 3. def. huius. s 8. huius. t 41. huius. u corol. 3. def. huius. x 32. primi. y 40. huius.

Supponamus autem secundò angulum ABC esse maiorem recto; C B protrahatur ad D & l AD, fiat m perpendicularis, ad CD, angulus ABC est datus ex hypothesi, angulus igitur ABD est n datus, angulus est ADB datus; o angulus verò BAD est datus p ergo triangulum A B D, est q datum specie, & ratio D A, ad A B, est r data, ratio verò A C, ad A B, est ex hypothesi data, ergo ratio D A, ad A C erit data, ex constructione verò angulus D, est rectus; ergo triangulum CAD est s datum specie, & angulus C erit t datus; angulus autem A B C, ex hypothesi datus est, & angulus B A C est x datus, ergo triangulum ABC est y datum specie.

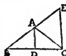


PROPOSITIO VI.

Si triangulum datum vnum angulum habeat, circa datum autem angulum latera simul vti aeque tanquam vnum, ad reliquum latus rationem habeant datam triangulum specie datum est.

a 1 petitio 2. b 5 primi. c 2 pet primi. d 9 primi. e 16. quinti. f 12. quinti. g 2 def huius. h 44. huius. i 1. corollar. 3. def. huius. k 32. primi. l 40. huius.

Sit triangulum ABC & angulus BAC sit datus, ratio verò BA plus AC ad BC sit data. Dico triangulũ ABC esse datum specie. Ducatur a BAE linea recta, & AE, fiat b equalis AC, & CE, ducatur c rectã; angulus ergo B A D. fiat d equalis D A C, hoc est angulus B A C bifariam diuidatur per 9. primi in duos angulos BAD, & D A C, Quoniam B E, equalis est BA plus A C per 2. axioma primi, ut ergo B A, ad A C ita est B D, ad D C per 3. sexti, & ut BA, ad BD, ita est e A C, ad D C, & ut B E, ad B C, ita est f B A, ad B D ratio verò B E, ad B C ex hypothesi est data, & ratio B A, ad B D est g data; angulus BAD est datus ut constet; ergo triangulum A B D, est datum specie per 44. huius; angulus verò B, est i datus, & angulus BAC ex hypothesi datur, vt & angulus BCA est k datus; ergo triangulum ABC est l datum specie.

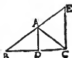


PROPOSITIO VII.

Si triangulum datum, vnum angulum habeat, circa alium autem angulum latera, simul vtraq; tanquam unum habeant, ad reliquum rationem datam, triangulum specie datũ est.

a 2. pet primi. b 3 primi. c 1 pet primi. d 9 primi. e 2. axioma primi. f 3. sexti. g 16. quinti. h 12 quinti. i 2 def. huius. k 41. huius. l corol. 3. def. huius. m per 3 huius. n 32. primi. o 40. huius.

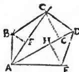
Sit triangulum A B C, sitque angulus B datus; ratio verò B A plus AC, ad B C sit data. Dico triangulum A B C, esse datum specie; protrahatur a recta B A E, & fiat b AE aequalis AC, ducaturque c C E recta. angulus autem B A D, fiat d aequalis angulo DAC. Quoniam BE est e aequalis BA plus AC, & BA, ad AC, est f ut B D, ad DC estque g ut BA, ad BD, ita A C, ad C D, & ut h B E, ad B C ita BA, ad B D; est autem ex hypothesi data ratio BE, ad BC; ergo ratio BA, ad BD est i data, ex hypothesi verò angulus B, est datus, ergo triangulum ABD, est k datum specie, est l ergo angulus BAD, datus, itaque angulus B A C est datus; m angulus verò BCA est n datus; ergo triangulum ABC, est o datum specie.



PRO-

PROPOSITIO IIIL.

Datâ rectilinea specie, in data specie triangula diuiduntur.



RÉctilineum datum specie sit ABCDE ducantur verò A C, & A D rectæ. Dico triangula ABC, ACD, ADE esse data specie. Quoniam angulus A B C est [a] datus; ratio verò A B, ad BC est [b] data; ergo triangulum ABC, est [c] datum specie, & angulus ACB est [d] datus, itemque & angulus BCD est datus, ergo angulus ACD, est [e] datus, ratio verò BC, ad C D est [f] data, itemq; ratio BC, ad AC est [g] data, ergo ratio AC, ad CD est [h] data, proinde triangulum A C D est [i] datum specie, & triangulum A D E erit [k] datum specie, nanque angulus CDE est datus, cum specie sit data rectilinea figura ABCDE, est etiam datus angulus C D A, cum triangulum A C D sit datum specie, ergo angulus ADE erit datus per 4. huius, est autem ratio C D ad D E data, cum figura rectilinea sit specie data, itemque ratio CD ad DA ob eandem rationem, ergo per 8. huius ratio AD ad DE erit data, ac proinde triangulum ADE erit datum specie per 41. huius.

a corol. 3. definit. huius.
b coroll. 3. defin huius.
c 41. huius.
d corol. 3. definit. huius.
e 4. huius.
f coroll. 3. definit. huius.
g 3. def huius
h 8. huius.
i 41. huius.
k 41. huius.

PROPOSITIO IIL.

Si ab eadem recta describantur triangula data specie habebunt, ad inuicem rationem datam.



DAta specie triangula sint A B C, A B D. Dico rationem ABC, ad ABD esse datam; fiant EAH, FBG perpendiculares, ad AB, & ECF, ac HDG parallelę fiant rectę AB, Quoniam triangulum ABC est datum specie ex hypothesi; angulus verò CAB, est [c] datus, per constructioné verò angulus BAE est datus, ergo angulus CAE, est [d] datus; angulus verò AEF, est [e] rectus, & angulus ACE, est [f] datus, ergo, triangulum AEC est [g] datum specie; ratio vero A E, ad A C est [h] data, & ratio AB, ad A C pariter est [i] data cum ex hypothesi triangulum A B C, sit datum specie; ergo ratio AE, ad AB est [k] data, & ratio AH, ad AB, erit [l] data; non dissimiliter enim ostendetur ratio data A H ad AB ac demonstratum fuit rationem AE ad AB datam esse; cum autem ratio A E, ad A H sit data, ut constat; [m] Itaque ratio A E, ad A H, erit data, ut autem A E, ad A H, ita est [n] triangulum ABC, ad triangulum ABD, ergo ratio trianguli ABC, ad triangulum ABD, est [o] data.

a 11. primi.
b 31 primi.
c 3 def. huius.
d 4. huius.
e S. 29 primi.
f 32. primi.
g 40. huius.
h corol 3. def. huius.
i 3. def huius
k 8. huius.
l 8. huius.
m 8. huius.
n Schol. 1. sexti.
o 2. def huius.

PROPOSITIO IL.

Si ab eadem recta, duo rectilinea qualibet data specie describantur, habebunt ad inuicem rationem datam.



SIt AB linea recta proposita, & ABCGE, sit rectilineū datum specie, & ABD, sit rectilineum datu specie. Dico rationem ABCGE, ad ABD esse datam, Ducantur [a] rectæ EC, E B. Quoniam EGC, ECB, EBA, sunt [b] triangula data specie; ratio verò EGC, ad ECB est [c] data; ratio autem EGCB, ad ECB componendo erit [d] data, & ratio ECB, ad EBA est [e] data; ratio igitur EGCBA, ad EBA erit [f] data, & ratio EGCB A, ad EBA, est [g] data, & ratio EBA, ad ABD erit [h] data; proinde ratio EGCBA, ad ABD, erit [i] data per 22 quinti.

a 1. petitio.
b 47. huius.
c 48 huius.
d 18. quinti.
e 47. huius.
f 22. quinti.
g 18 quinti.
h 48. huius.
i 22. quinti.

PROPOSITIO L.

Si duæ rectæ lineæ, ad inuicem habeant rationem datam, & ab illis similia, similiterque descripta rectilinea habebunt ad inuicem rationem datam.

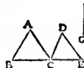
RAtio BC, ad CE sit data, & ABC simile sit DCE, & BC, sit homologa CE. Dico rationem ABC, ad DCE esse datam; fiat [a] vt B C, ad C E, ita CE, ad G, Quoniam

a 1. sexti.

ex

ex hypothesi ratio B C, ad C E est data [b] estque ratio C E, ad G data, ergo ratio B C, ad G est [c] data, ut verò est A B C, ad D C E ita [d] & B C, ad G; ergo ratio A B C, ad D C E est [e] data.

b 2. def. huius. c 8. huius. d coroll. 20. sexti. e 2. def. huius.

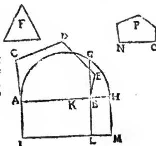


PROPOSITIO LI.

Si duæ rectæ lineæ habeant, ad invicem rationem datam, & ab illis rectilinea quæcunque specie data describantur habebunt, ad invicem rationem datam.

Data sit ratio A B, ad N O, & A B L I, & P sint rectilinea specie data, & A B homologa N O. Dico rationem A B L I, ad P, esse datam; fiat [a] A B E D C simile P. Quoniam A B E D C est [b] datum specie cum factum sit simile ipsi P erit [c] ratio A B L I, ad A B E D C data, præterea ratio P, ad A B E D C [d] data est, ergo ratio A B L I, ad P erit [e] data.

a 18. sexti. b 18. sexti. c 49. huius. d 50 huius. e 8. huius.

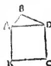


PROPOSITIO LII.

Si à data magnitudine recta, data figura specie describatur, descripta figura magnitudine data est.

Data sit magnitudo AD, & ADB, data sit specie. Dico ADB datã esse magnitudine fiat [a] ex A D quadratum K D. Quoniam quadratum K D est [b] datum specie, & magnitudine, ex hypothesi verò A D B est data specie; ergo ratio K D, ad A D B, erit [c] data; proinde A D B est [d] data magnitudine.

a 46. primi. b 3. & 1. def. huius. c 49. huius. d 2. prop. huius.



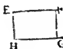
PROPOSITIO LIII.

Si duæ figuræ specie datæ fuerint, & unum latus unius, ad unum latus alterius habuerit rationem datam, reliqua quoque latera, ad reliqua latera habebunt rationes datas.

Sint A C, H F datę specie, ratio verò A D, ad HG sit data. Dico rationem A B, ad H E esse datam. Quoniam ratio AD, ad AB est [a] data, ex hypothesi verò ratio AD, ad H G est data; ergo ratio A B, ad H G est [b] data, ratio verò H E, ad H G est [c] data; ergo ratio AB, ad HE, erit [d] data, &c.

a 3. def. huius. b 8. huius. c 3. def huius. d 8 huius.

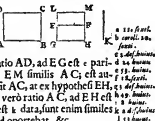




PRO-

PROPOSITIO LIV.

Si duæ figuræ datæ specie, ad inuicem habuerint rationem datam, etiam earum latera, ad inuicem habebunt rationem datam.

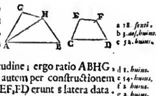


DAtæ sint specie AC, EH ratio verò A C, ad EH, sit data. Dico rationem AD, ad EG, esse datam. Supponatur EH similis AC, & EF homologa ipsi AB, ut autem AB, ad E F, ita fiat [a] EF ad K, & vt AC, ad EH, est [b] ita AB, ad K, est autem ex hypothesi ratio AC, ad EH data, & ratio AB, ad K est [c] pariter data; ergo ratio AB, ad EF est [d] quoque data, proinde ratio AD, ad E G est [e] parique data. Supponatur deinde E H non esse similem A C; fiat [f] E M similis A C; est autem AC specie data, & EM est [g] data specie, cum EM, similis sit AC, at ex hypothesi EH, est data specie, ergo ratio E M, ad EH est [h] data; ex hypothesi verò ratio A C, ad E H est data; ob id ratio AC, ad EM, erit [i] data, sed ratio AB, ad E F est [k] data, sunt enim similes datæ figuræ AC, EM; quare ratio AD, ad EG erit [l] data. Quod oportebat, &c.

a 11. sexti.
b coroll. 20. sexti.
c 3. def. huius.
d 24. huius.
e 53. huius.
f 18. sexti.
g 3. def. huius.
h 49. huius.
i 8. huius.
k 3. def. huius.
l 53. huius.

PROPOSITIO LV.

Si spatium magnitudine, & specie datum fuerit eius latera magnitudine data erunt.

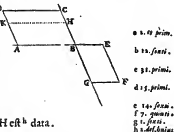


SPatium C D F E datum sit magnitudine, & specie. Dico CD, CE, EF, FD, esse data magnitudine, data sit ad arbitriũ AB, magnitudine, & specie. Fiat itaque [a] rectilineum ABHG, simile dato CDFE. Quoniam CDFE est ex hypothesi datum specie, & A B H G, erit [b] datum specie; & A B H G est [c] datum magnitudine; ex hypothesi verò CDFE, est datum magnitudine; ergo ratio ABHG, ad CDFE est [d] data; proinde ratio AB, ad CD est data; est autem per constructionem data AB; ergo CD est [f] data; Itaque ob eandem rationem CE, EF, FD erunt [g] latera data.

a 18. sexti.
b 3. def. huius.
c 52. huius.
d 1. huius.
e 54. huius.
f 2. huius.
g 2. huius.

PROPOSITIO LVI.

Si duo æquiangula parallelogramma habuerint, ad inuicem rationem datam, est vt primi latus, ad secundi latus ita reliquum secundi latus ad eam, ad quam alterum primi latus habet rationem datam, quam parallelogrammum, ad parallelogrammum habet.



SIt parallelogrammum A C æquiangulum parallelogrammo BF, sitque data ratio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum BF, producatur [a] recta A B ad E, & ut A B, ad BE ita fiat [b] G B, ad B H, ducaturque [c] K H parallela rectæ A B. Dico rationem C B, ad B H esse datã. Quoniam angulus ABC æqualis est ex hypothesi angulo G B E, & linea C B G est [d] recta, & parallelogrammum AH æquale est parallelogrãmo B F, ex hypothesi verò ratio parallelogrammi A C, ad B F est data, ratio igitur parallelogrammi A C ad parallelogr. AH est [f] data, ut verò CB, ad BH ita est [g] AC, ad AH, ergo ratio CB, ad BH est [h] data.

a 2. et prim.
b 12. sexti.
c 31. primi.
d 15. primi.
e 14. sexti.
f 7. quinti.
g 1. sexti.
h 2. def. huius

C O R O L L A R I V M.

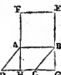
Colligitur verò ex hac propositione, quemadmodum, est CB, ad BH ita esse [i] *AC parallelogrammum ad parallelogrammum AH, vel parallelogrammum BF.*

i 1. sexti.

PRO-

PROPOSITIO LVII.

Si datum spatium, ad datam rectam applicatum fuerit in angulo dato, datur latitudo applicationis.

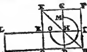


PArallelogrammum A B C D, sit datum, & A B, sit recta linea data; angulus verò DAB sit datus. Dico AD esse datam; fiat A E a quadratũ ex AB; & FA, & EB protrahãtur ad H & G b lineæ rectæ, & DC producatur ad G c recta. Quoniã F B, est d quadratum datum, & ex hypothesi parallelogrammum ABCD est datum; & ratio quadrati FB, ad parallelogrammum ABCD est e data; at parallelogrammum A BGH, est f æquale parallelogrammo ABCD, ratio ergo quadrati F B, ad parallelogrammum AG, est g data; ut verò FB, ad AG ita est h FA, ad AH, ergo ratio FA, vel AB, ad AH est i data; Angulus autem HAB est k datus, & ex hypothesi angulus DAB est datus; ergo angulus DAH, est l datus at angulus DHA est m datus, vtpote rectus, itemque angulus D est n datus per 32. primi ergo triangulum ADH, specie datum est, o quare ratio D A, ad A H est p data, ratio autem AD, ad AB est q data; cùm ostenta sit ratio data AB ad A H estq; AB data, ex hypothesi ergo AD est r data.

a 46. primi.
b 2. petitio primi.
c 2. pet primi.
d 52. huius.
e 1. huius.
f 35. primi.
g 8. huius.
h 1. sexti.
i 2. defin. huius.
k 11. axioma primi.
l 4. huius.
m 11. axioma primi.
n 32. primi.
o 40. huius.
p 3. def huius.
q 2. def. huius & 8. huius prop.
r 2. huius.

PROPOSITIO LVIII.

Si datum ad datam rectã applicetur deficiens data specie, figura latitudines defectus, data sunt.



SIt ADHL specie datum, AB sit data, D B I H sit datum specie. Dico D B, & DH esse datas; factæ sint a A C, C B æquales, & C F, b simile D I, & C B, homologa c D B, & B H E, LI, DG sint d rectæ. Quoniam ex hypothesi A B, est data, erit e C B data; est autem ex hypothesi D I, datum specie, & per constructionem CF, simile est D I, ergo C F est f datum specie; est autem C F, datum g magnitudine; à data enim C B magnitudine, utpote dimidio totius datæ A B, data specie figura C F describitur. & AK æquale est h CI, vel DF, & A H æquale est i gnomoni KBG, & A H, plus KG, æquale est k C F, itaque A H plus KG est l datum, cùm C F sit per 52. huius datum; est autem AH, ex hypothesi datum, ergo K G est m datum magnitudine, & KG est n datum magnitudine, & specie, cùm simile sit ipsi DI, vel C F, ergo KH, vel C D est o data, ergo D B est. p data, cùm C B sit data, vt supra ostendimus, ac proinde cùm ratio DB, ad DH sit q data; est enim D I specie data, erit r DH etiam data, &c.

a 10. primi.
b 18. sexti.
c 28. sexti.
d 2. huius.
e 2. huius.
f 3. defin. huius.
g 52. huius.
h 36. primi.
i 2. axioma primi.
k 2. axioma primi.
l def. 1. huius
m 1 d huius.
n 24. sexti.
o 55. huius.
p 2. & 4.
q 3 def huius.
r 2. huius.

PROPOSITIO LIX.

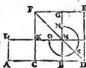
Si datum, ad datam rectam applicetur, excedens data specie figura latitudines excessus data sunt.

DAtum sit spatium ADIL, & LH sit recta data, at BDIH, sit datum specie, Dico HI, & HB esse datas; fiat a LK æqualis KH, & CE, simile fiat b BI, at verò CD, fiat c homologa BD, & FH O, LI, BG sint d rectæ, &c. Quoniam LH, est data ex hypothesi, & KH, est e data, & BI est datum specie ex hypothesi, & K G, simile est f B I, & KG est g datum specie, proinde K G, est h datum magnitudine; at verò A I, ex hypothesi datum est magnitudine, & AK, æqualo est i CH, vel HE, & AI æquale est k gnomoni K D G, & K G plus A I æquale l est CE; & CE erit m datũ magnitudine, cum GK sit magnitudine datum ex demonstratis, & A I magnitudine datum ex hypothesi; at C E simile est B I, & C E est n datum specie, & CD, vel KI erit o data magnitudine, at ex hypothesi K H est data; ergo HI data erit p; sed ratio HI ad HB est q data, ergo HB erit r data.

Vel aliter hoc modo.

Datum sit AI excedens data specie figura BI applicatum ad rectam datam LH. Dico HI, HB esse

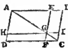
a 10. primi.
b 18. sexti.
c 29. 6.
d 2 primi.
e 2. huius.
f 24. 6.
g 3 def huius
h 52. huius.
i 36. 43 primi
k 2. axiom. 1.
l 2. axiom. 1.
m 4. huius.
n 2. def huius
o 55. huius.
p 4. huius.
q 3. def. huius.
r 2. huius.



HB esse datas. Secetur enim LH bifariam in K. & ab KH describatur ipsi BI simile, similiterque positum KG, & protrahatur FK ad partes K, donec occurrat BD protractæ ad partes B, occurrat autem in C, itemque protrahatur FG ad partes G donec occurrat DI protractæ ad partes I, occurrat autem in E, & compleatur figura, ut vides. Potuisset constitui CE simile ipsi BI, & reliqua perficere, in idem enim recidit. Quandoquidem BI simile est ipsi KG, igitur KG circa eandem diametrum existit cum ipso BI, ut constat ex Elementis, est autem BI specie datum, ergo KG datum est specie, sed à data recta KH descriptum est, ergo per 53. huius KG est magnitudine datum, est autem datum AI, igitur AI, KG magnitudine data sunt, sed AI, & KG æqualia sunt CE, ergo CE magnitudine datum est; sed & specie est datum, simile enim est ipsi BI, igitur ipsius CE per 55. huius latera data sunt, quare latus KI datum est, latus autem KH est datum, æquale est enim ipsi LK, igitur reliqua HI data est, habet autem ad HB rationem datam, igitur HB est data.

PROPOSITIO LX.

Si datum specie, & magnitudine parallelogrammum dato gnomone augeatur, aut minuatur, latitudines gnomonis data sunt.



SVpponatur primò HE esse parallelogrammum datum magnitudine, & specie, & HCE esse gnomonem datum. Dico HD, & EB esse datas. Quoniam parallelogrammum DB, est [a] magnitudine datum, cum ex hypothesi datum sit HE, & HCE gnomon sit datus; at verò [b] parallelogrammum DB simile est parallelogrammo HE, & est HE parallelogrammum datum specie ex hypothesi, erit [c] parallelogrammum DB, specie datum, ac proinde AD, AB erunt [d] datæ, at AH, AE sunt quoque [e] datæ siquidem HE ex hypothesi, est datum specie, & magnitudine, ergo HD, & EB sunt [f] datæ.

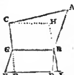
a 3. huius.
b 24. sexti.
c 3. def. huius seu huius quod idé est.
d 55 huius.
e 55. huius.
f 4. huius.

Supponatur secundo DB esse parallelogrammum datum magnitudine, & specie, & HCE esse gnomonem datum. Dico HD, EB, esse datas. Quoniam parallelogrammum HE est [g] datum magnitudine, cum DB parallelogrammum supponatur datum, & gnomon HCE sit datus; estque [h] HE parallelogrammum simile parallelogrammo DB, ex hypothesi autem DB parallelogrammum est datum specie, & parallelogrammum HE est [i] datum specie; ergo AH, AE erunt [k] datæ, at AD, AB, sunt [l] datæ, cum parallelogrammum DB sit datum ex hypothesi magnitudine, & specie; ergo HD, EB, erunt [m] datæ, &c.

g 4. huius. seu huius.
h 24. sexti.
i 3. def. huius.
k 55. huius.
l 55. huius.
m 4. huius.

PROPOSITIO LXI.

Si ad data specie figura unum latus applicetur parallelogrammum spatium, in angulo dato, habeat autem data figura, ad parallelogrammum rationem datam parallelogrammum specie datum est.



SVpponatur GB, AC proposita figura, & GBDE sit parallelogrammum applicandum; sitque datus angulus EGB, & ratio GBAC, ad GD parallelogrammum sit data. Dico parallelogrammum GD, esse datum specie. Protrahatur [a] recta CG, ad F, vt sit recta CGF, mox verò rectæ CF agatur [b] parallela recta HBL, & CH fiat [c] parallela rectæ GB, & protrahatur ED, ad L, ut fiat recta EDL. Quoniam angulus CGB est [d] datus, & ratio CG, ad GB est [e] data, & parallelogrammum CGBH est [f] datum specie, est autem ex hypothesi ACGB datum specie, ergo ratio ABGC, ad parallelogrammum GH est [g] data; est autem ratio ABGC, ad parallelogrammum GD data ex hypothesi; parallelogrammum GD æquale est [h] parallelogrammo GL, ergo ratio ad parallelogrammu GH, ad parallelogrammum GL, erit [i] data, ut autem CG, ad GF ita est [k] GH, ad GL, ergo ratio CG, ad GF erit [l] data, at ratio CG, ad GB est [m] data; ergo ratio GB, ad GF erit [n] quoque data, est [o] autem angulus

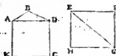
a 2. pet. primi.
b 31. primi.
c 31. primi.
d 3. def. huius.
e 3. def. huius.
f 54. prim. & 3. def. huius.
g 49. huius.
h 36. primi.
i 8. huius.
k 1. sexti.
l 2. def. huius.
m 2. def. huius.
n 8. huius.
o 15. primi.

G gulus

p huius 33 primi. q 32. primi. r 40. huius. s 3. def. huius. t 8. huius. u 3. def. huius. gulus B G F datus; angulus autem B G E est ex hypothesi datus, quare anguli E G F, EFG erunt p dati angulus verò E, est q datus, ergo triangulum E G F est r datum specie; ratio verò E G, ad G F est s data; ergo ratio E G, ad G B est t data, angulus verò E G B datus ex hypothesi, ergo parallelogrammum GD est u datum specie &c.

PROPOSITIO LXII.

Si duæ rectæ ad inuicem habeant rationem datam, & ab vna quidem data specie figura descripta sit ab altera autem spatium parallelogrammum in angulo dato, habeat autem figura, ad parallelogrammum rationem datam parallelogrammum specie datum est.

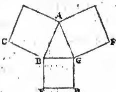


Data sit ratio A D, ad E F, & ADB sit figura data specie, datusque sit angulus EFG, & ratio A D B, ad parallelogrammum EG sit data, Dico parallelogrammum EG esse specie datum, fiat a parallelogrammum AC simile parallelogrammo EG, & AD, fiat b homologa E F, Quoniam ratio A D, ad EF est ex hypothesi data; ergo ratio AC, ad EG erit c data, ratio autem ADB ex hypothesi, ad EG, est data, ergo ratio ADB, ad AC est d data; angulus autem EFG, vel A D C est datus, & ex hypothesi triangulum ADB est datum specie, erit e A C datum specie, ac proinde EG est f datum specie, est enim simile ipsi AC quare, &c.

a 18. sexti. b 18. sexti. c 50. huius. d 8. huius. e 61. huius. f 3. def. huius.

PROPOSITIO LXIII.

Si triangulum specie datum sit, quod ab vnoquoque laterum describitur quadratum, ad triangulum habebit rationem datam.

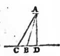


Datum sit specie triangulum ABG, & B D, A C, A F sint quadrata. Dico rationem quadrati BD, ad triangulum A B G datam esse; præterea rationem quadrati A C, ad triangulum ABG esse datam; ac demum rationem quadrati AF, ad triangulum ABG datam esse. Quoniam enim quadratum BD est a datum specie, at ex hypothesi triangulum A B G est datum specie, ergo ratio quadrati B D, ad triangulum A B G est b data, & ratio quadrati A C, ad triangulum A B G est c data eadem demonstratione, ut etiam eodem pacto ostenditur ratio quadrati AF, ad triangulum ABG data.

a 3. def. huius. b 49. huius.

PROPOSITIO LXIV.

Si triangulum angulum obtusum datum habeat, illud spatium, quo latus obtusum angulum subtendens magis potest, quàm latera obtusum angulum ambientia, ad triangulum, habebit rationem datam.



Supponatur triangulum ABC esse propositum, & angulus A B C sit maior recto datus, protrahatur a CB, ad D recta, &, ad CD, ducatur b perpendicularis A D, quadratum autem ex AC æquale est c quadrato ex C B plus quadrato ex A B plus duplo rectangulo C B D; rectangulum verò sub CB, AD æquale est d duplo triangulo ABC. Dico rationem rectanguli dupli CBD, ad triangulum ABC esse datam. Quoniam angulus ABC est datus ex hypothesi, angulus ABD est e datus, & angulus D est f datus, & angulus BAD est g pariter datus; ergo triangulum BAD est h datū specie, quare ratio BD, ad DA est i data, ut verò BD, ad DA ita est k rectangulum sub BD, CB, ad rectangulum sub DA, CB itaque ratio rectanguli sub BD, CB, ad rectangulum, sub DA, CB est l data, sed ratio dupli rectanguli CBD, ad rectangulum sub CB, DA, habet rationem datam, nam duplum rectangulum CBD, ad simplum CBD, habet datam rationem, & simplum C B D, ad rectangulum sub C B, D A habet rationem datam, ergo duplum rectangulum CBD, ad rectangulum sub CB, DA, habet rationem

a 2. post primi. b 12. primi. c 12. secundi. d 41. primi. e 13. primi. f 11. axioma primi. g 32. primi. h 40. huius. i 3. def. huius. k 1. sexti. l 2. def. huius.

tionem datam, sed rectangulum sub CB, DA, ad triangulum CBA, habet rationem datam, utpote duplam.

Ergo rectangulũ sub CB, AD, habet datam rationem ad triangulum duplum ABC nempe æqualitatis; ergo duplum rectangulum CBD, ad duplum triangulum ABC habebit [m] rationem datam. Sed duplum triangulum ABC ad simplum triangulum ABC habet rationem datam, utpote duplam; ergo duplum rectangulum CBD, ad simplum triangulum ABC habebit [n] rationem datam, est autem duplum rectangulum CBD, excessus, quo quadratum CA, superat quadrata laterum CB, BA, ergo ratio illius spatij quo latus obtusum angulum subtendens magis potest quàm latera obtusum angulum ambientia ad triangulum habebit rationem datam.

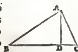
m 8 huius. n 8 huius.

M O N I T V M.

Si Lector aliquando viderit propositionem aliquam citatam, cùm tamen potiùs eius corollario proposito inseruiat, tam hucusque quàm deinceps, ne id nobis vitio vertat; siquidem arbitramur lectoris industriæ posse committi, ex ipsa propositione corollarium inferre.

PROPOSITIO LXV.

Si triangulum angulum acutum datum habeat, illud spatium, quo latus angulum acutum subtendens minus potest, quam latera angulum acutum ambientia habebit, ad triangulum rationem datam.



PRopositum sit triangulum ABC, & angulus ACB sit minor recto datus, fiat [a] ad BC perpendicularis AD, quadratum verò AB plus rectangulo bis BC, CD, æquale est [b] quadrato AC plus quadrato BC; rectangulum verò sub BC, AD est [c] æquale duplo triangulo ABC; Dico rationem dupli rectanguli sub BC, CD, ad triangulum ABC esse datam. Quoniam angulus ACD ex hypothesi est datus, angulus autem ADC est [d] datus angulus DAC, est [e] datus ergo triangulum ADC est [f] datum specie; ratio CD, ad DA, est [g] data, ut autem CD, ad AD, [h] ita est rectangulum sub CD, BC, ad rectangulum, sub AD, BC ergo data erit ratio rectanguli sub CD, BC ad rectangulum sub AD, BC; ratio ergo dupli rectanguli, sub BC, CD, ad rectangulum, sub AD, BC erit [k] data; quamobrem ratio dupli rectanguli, sub BC, CD ad duplum triangulũ ABC erit [l] data, cùm rectangulum sub BC, AD, sit [m] æquale duplo triangulo ABC ergo ratio dupli rectanguli sub BC, CD, ad simplum triangulum ABC erit [n] data, &c.

a 11. primi. b 13. secundi. c 41. primi. d 11. axioma primi. e 13. primi. f 40. huius. g Corol. 3. def. huius. h 1. sexti. i 2. def huius k 8. huius. l 8. huius. m 41. primi. n 8. huius.

PROPOSITIO LXVI.

Si triangulum habuerit angulum datum, quod sub rectis datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habebit, ad triangulum rationem datam.

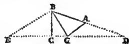


PRopositum triangulum sit ABC datusque sit angulus C. Dico rationem rectanguli sub BC, AC, ad triangulum ABC esse datam. Ad rectam, BC, ducatur [a] perpendicularis AD. Quoniam ex hypothesi, datus est angulus C, & angulus ADC est [b] datus angulus DAC, est [c] datus ergo triangulum ADC, est [d] datum specie; ratio igitur AC, ad AD est [e] data; vt autem AC, ad AD, ita est [f] rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum, sub AD, BC ergo ratio rectanguli, sub AC, BC, ad rectangulum, sub AD, BC est [g] data; atque duplum triangulum ABC, æquale est [h] rectangulo, sub AD, BC, ergo ratio rectanguli sub AC, BC, ad duplum triangulum ABC, est [i] data, ergo ratio rectanguli sub AC, BG, ad triangulum ABC est [k] data.

a 12. primi. b 12. axioma c 32. primi. d 40. huius. e 3. def. huius. f 1 sexti. g 2. def. huius. h 41. primi. i 8. huius. k 8. huius.

PROPOSITIO LXVII.

Si triangulum habuerit datum angulum, illud spatium quo duo datum angulum comprahendentia latera tanquam vna recta plus possunt, quàm quadratum à reliquo latere ad triangulum habebit rationem datam,

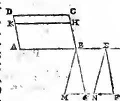


SIt propositum triangulum ABG sitque datus angulus BAG protrahatur a BA, ad D, ut sit recta BAD, & fiat b recta AD æqualis AG ducaturque c DGE; & rectæ AG fiat d parallela BE, angulus autem ADG æqualis est e angulo AGD, & angulus E est f æqualis angulo AGD, & BD æqualis est g BE, recta verò ED æqualis est h BA plus AG, ad ED perpendicularis agatur i BC & EC erit k æqualis CD; parallelogrammum autem DGE plus quadrato ex CG æquale est l quadrato ex CD, & quadratum BD æquale est m quadrato BG plus rectangulo DGE. Dico rationem rectanguli DGE esse, ad triangulum ABG datam. Quoniam ex hypothesi angulus BAG est datus, & angulus GAD est n datus; angulus verò GAB æqualis est o angulo D duplo; ergo angulus D est p datus; atque adeo triangulum AGD est q datum specie, ratio AD, ad DG est r data, ergo ratio quadrati DA, ad quadratum DG est s data; rectangulum verò sub BA, AD, ad quadratum AD, est t ut BA, ad AD; ut verò BA, ad AD est u EG, ad GD, & ut EG, ad GD ita est x rectangulum sub EG, GD, ad quadratum ex GD rectangulũ itaq; sub BA, & AD, ad quadratum AD est y ut rectangulum EG, GD, ad quadratũ GD, & rectangulũ sub BA, & AD, ad rectãgulũ sub EG, & GD est, z ut quadratũ AD, ad quadratũ GD; ergo ratio rectãguli sub BA, AD, vel rectanguli sub BA, AG, ad rectangulũ sub EG, GD; erit & data; & ratio rectanguli sub BA, AD, ad triangulum ABG erit ſ data; ergo ratio rectanguli sub EG, GD, ad triangulum ABG erit ꝥ data, &c.

a 2. petitio 1.
b 3. primi.
c 1. & 2. pet. 1.
d 31. primi.
e 5. primi.
f 29 primi.
g 6. primi.
h 2. axioma 1.
i 12 primi.
k 3. tertij.
l 5. secundi.
m 2. axioma 1
n 13. primi.
o 32 primi.
p 2. huius.
q 40. huius.
r 3. def. huius.
s 50. huius.
t 1. sexti.
u 12. sexti.
x 1. sexti.
y 11 quinti.
z 16. quinti.
& 2. def. huius
ſ 56 huius.
ꝥ 8. huius.

PROPOSITIO LXVIII.

Si duo parallelogramma æquiangula habeant, ad inuicem rationem datam, & vnum latus, ad unum latus habeat rationem datam, & reliquum latus ad reliquum latus habebit rationem datam.



SVpponatur parallelogrammum AC, æquiangulum parallelogrammo BF, ratio verò parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BF sit data. Dico rationem CB, ad BG esse datam. Sitque data proportio AB ad BE, protrahatur AB, &c. vt AB ad BE ita fiat b BG ad BH, rectæ autẽ AB agatur parallela KH. Quoniam ex hypothesi angulus, ABC est æqualis angulo GBE, & CBG est c recta, cùm ABE, sit linea recta, (sunt enim AB, BE in directum constitutæ) parallelogrammũ autẽ AH æquale est d parallelogrammo BF, cũ ut AB ad BE, ita facta sit BG ad BH, & est ex hypothesi ratio AB, ad BE, vel GB, ad BH data, ergo, & ratio CB, ad HB est e data, propterea ratio CB, ad BG erit f data.

a 2. petitio primi.
b 12. sexti.
c 1. schol. 12. primi.
d 14. sexti.
e 56. huius.
f 8. huius.

PROPOSITIO LXIX.

Si duo parallelogramma datos angulos habeant, & ad inuicem rationem datam, habeat autem, & vnum latus, ad vnum latus rationem datam, & reliquum latus, ad reliquum latus habebit rationem datam.

Sint

Sint proposita parallelogramma A C, B N, & A B C, M B E sint anguli dati; & ratio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum B N, sit data, & ratio AB, ad BE sit data. Dico rationem B C, ad B M esse datam; protrahatur [a] A B, ad E, & CB, ad G, & MN, ad F, & rectæ BG, fiat [b] parallela E F. Quoniam angulus A B C [c] æqualis est angulo G B E, & parallelogrammum B N æquale est [d] parallelogrammo B F, ratio verò AC, ad BN est ex hypothesi data, ratio A C, ad BF est [e] data, & ex hypothesi ratio A B, ad BE est data; ergo ratio C B, ad BG est [f] data, at ex hypothesi angulus ABC, vel GBE est datus, & ex hypothesi quoq; angulus MBE, ergo MBG angulus erit [g] datus; angulus autem BMG est [h] datus, cum ex hypothesi angulus MBE, sit datus; ergo triangulum B M G est [i] datum specie. Ratio autem BM, ad B G est [k] data; ergo ratio CB, ad BM erit [l] data, cùm ratio CB ad BG sit [m] data.

Hic adhibeatur figura propositionis superioris LXIII

a 1. pet. primi. b 31. primi. c 15. primi. d 35. primi. e 7. quinti. f 68. huius. g 4. huius. h 29. primi. i 40 huius. k 3. def huius. l 5. huius. m 68. huius

PROPOSITIO LXX.

Si duorum Parallelogrammorum circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, datos tamen, latera ad inuicem habeant rationem datam, & ipsa parallelogramma habebunt, ad inuicem rationem datam.

Proposita primò sint parallelogramma A C, B F, & angulus A B C sit æqualis angulo GBE, sitque ratio AB, ad B E data, & ratio C B, ad B G, sit data. Dico rationem parallelogrammi A C, ad parallelogrammum B F esse datam. Protrahatur [a] recta A B, ad E, & ut A B, ad B E ita fiat [b] B G, ad B H, ducaturque [c] ipsi A B parallela recta KH. Quoniam C B G est [d] recta cum protracta sit AB in directum ad E, ratio verò A B, ad B E, vel G B, ad H B est ex hypothesi data, cum facta sit [e] vt A B, ad B E, ita B G, ad BH, ex hypothesi verò ratio CB, ad BG est data; ergo erit [f] ratio CB, ad B H pariter data; ratio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum AH est [g] data, & parallelogrammum A H est [h] æquale parallelogrammo B F, cùm ut A B, ad B E ita facta sit BG, ad BH, ergo ratio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BF erit [i] data.

Hic adhibeatur eadem figura propositionis LXVIII.

a 1. pet. primi. b 12. sexti. c 31. primi. d 1. schol. 15 primi. e 12. sexti. f 8. huius. g 1. sexti. h 14. sexti. i 7 quinti.

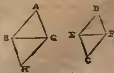
Supponamus secundo AC, B N esse parallelogrãma proposita, & angulos A B C, MBE esse datos; sitque ratio AB, ad BE data, & ratio C B, ad B M pariter data. Dico rationem parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BN esse datam. Protrahantur AB, CB, rectæ in E, & G & MN, in F ducaturq; BG parallela E F. Quoniã angulus ABC, vel GBE est ex hypothesi datus, & angulus MBE est datus, & angulus MBG, erit [k] datus, angulus BMG est [l] datus cùm ex hypothesi angulus MBE sit datus; ergo triangulum BMG erit [m] datum specie, ratio BG, ad BM est [n] data & ex hypothesi verò ratio C B, ad B M est data; ergo ratio CB, ad B G erit [o] data, ex hypothesi verò ratio A B, ad BE data, & ratio A C, ad BF, est [p] data, at parallelogrammum B N est [q] æquale parallelogrammo B F; ergo ratio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BN erit [r] data.

k 4. huius. l 29. primi. m 40. huius. n 3 def. huius. o 8. huius. p 7. quinti per primam partem huius propositi. q 35. primi. r 7. quinti.

PROPOSITIO LXXI.

Si duorum triangulorum circa æquales angulos aut circa inæquales quidem, datos tamen latera ad inuicem habeant rationem datam, & ipsa triangula habebunt, ad inuicem rationem datam.

Proposita sint triangula ABG, DEF, & angulus A æqualis sit angulo D, vel A, & D, sint anguli dati; ratio A B, ad DE sit data, & ratio A G, ad D F sit data. Dico rationem trianguli ABG, ad triangulum DEF esse datam. Sint [a] facta parallelogrãma A H, E D C; quoniam ratio parallelogrammi AH, ad parallelogrammum DC est [b] data, & parallelogrammum AH æquale est [c] duplo triangulo ABG & parallelogrammum DC æquale est [d] duplo

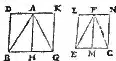


a 31. primi. b 70. huius. c 34. primi. d 34. primi.

e 15. quinti. Plo triangulo DEF, ergo ratio trianguli ABG, ad triangulum DEF est e data, &c.

PROPOSITIO LXXII.

Si duorum triangulorum, & bases fuerint in ratione data, & alta, ab angulis, ad bases, quæ faciant angulos æquales, aut inæquales quidem sed tamen datos, habeant, ad inuicem rationem datam, & ipsa triangula, ad inuicem habebunt rationem datam.



PRopofita sint triangula ABG, & FEC, & angulus AHG æqualis sit angulo FMC, vel AHG, & FMC sint anguli dati; ratio BG, ad EC sit data, & ratio AH, ad FM sit data. Dico rationem trianguli ABG, ad triangulum FEC esse datam. Ducatur a BD parallela rectæ HA, & EL, agatur parallela MF, sintque facta DG, LC parallelogramma. Quoniam angulus DBG æqualis est d angulo LEC, vel DBG, LEC sunt anguli dati, cum AHG, & FMC sint vel æquales, vel dati, ratio vero AH, ad FM est ex hypothesi data; & ratio DB, ad LE est e data, item ex hypothesi ratio BG, ad EC est data, ergo ratio parallelogrammi DG, ad parallelogrammum LC erit f data, quambrem ratio trianguli ABG, ad FEC erit g data, &c.

a 31. primi. b 31. primi. c 31. primi. d 29. primi. e Sc. 7. quinti. f 70. huius. g 15. quinti.

PROPOSITIO LXXIII.

Si duorum Parallelogrammorum circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, sed tamen datos, latera, ad inuicem ita se habeant; ut sit quemadmodum primi latus, ita reliquum secundi latus, ad aliam aliquam rectam, habeat autem, & reliquum primi latus, ad eandem rectam rationem datam, & ipsa parallelogramma habebunt, ad inuicē rationem datam, &c.

SVpponantur propofita parallelogramma AC, BF, & anguli ABC, GBE sint æquales; vt autem AB, ad BE ita sit GB, ad BH, & ratio CB, ad BH sit data. Dico rationem AC parallelogrammi ad parallelogrammum BF esse a datam. Quoniam ut CB, ad BH ita est AC, ad BF; ratio autem CB, ad BH est ex hypothesi data, ergo ratio AC, ad BF erit b data.

Hic adhibeatur eā, quæ subsequitur figura.

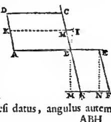
a Coroll. 51. huius. b 2. def. huius.

Supponãtur secundò propofita parallelogramma AC, BN, & anguli ABC, MBE sint dati, & vt AB, ad BE ita sit MB, ad BI, ratio verò CB, ad IB sit data. Dico rationem parallelogrammi AC, ad parallelogrammum BN esse datã. Rectæ AB agatur c parallela IK, & CB, MN sint rectæ protractæ, in G & F rectæ autẽ BG, ducatur d parallela EF, Quoniã ex hypothesi angulus MBE vel ABI est datus; angulus ABH, est ex hypothesi datus; ergo angulus HBI erit e datus, at angulus BHI est f datus cũ ABH sit ex hypothesi datus; ergo triangulũ BHI erit g datum specie; ratio autem IH, ad BI, est h data, ratio verò CB, ad BI est ex hypothesi data, ergo ratio CB, ad BH est i data ratio autem AC, ad BF est k data, & BN æquale est l BF ergo ratio AC, ad BN erit m data, &c.

c 31. primi. d 34. primi. e 4. huius. f 29 primi. g 40 huius. h 3 def huius. i 8 huius. k 1. def. huius. l 35. primi. m 7. quinti.

PROPOSITIO LXXIV.

Si duo parallelogramma datam rationem habeant, aut in æqualibus angulis, aut inæqualibus quidem sed tamen datis, erit ut primi latus, ad secundi latus ita alterum secundi latus, ad eam, ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.



PRopofita primò sint parallelogramma AC, BF, & anguli ABC, GBE sint æquales, & vt AB, ad BE ita sit GB, ad BH, ratio autem AC, ad BF sit data. Dico rationem CB, ad BH esse datam; Ratio CB, ad BH erit a data per 56. huius.

a 56. huius.

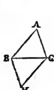
Propofita secundo sint parallelogramma AC, BN anguli verò ABC, MBE, sint dati; ut autem AB, ad BE, ita sit MB, ad BI, ratio autem AC, ad BN sit data. Dico rationem CB, ad BI, esse datã; Protractæ sint b AB, MB, in E & I, & rectæ AB, agatur c parallela IK, sintq; protractæ CB, MN, in G & F, & recta BG agatur d parallela EF; Quoniã angulus MBE, vel ABI, est ex hypothesi datus, angulus autem ABH

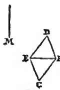
b 2. pet primi. c 31. primi. d 2. pet. primi. e 31 primi.

A B H, vel B H I ex hypothesi est datus, ergo angulus H B I, erit [f] datus, ac proinde trian- f 4. huius.
gulum B H I erit [g] datum specie, itaque ratio B I, ad B H erit [h] data; at ex hypothesi data g 40. huius.
est ratio A C, ad B N, & parallelogrammum B F est [i] æquale parallelogrammo B N, ra- h 3 def. huius. i 35. primi.
tio, ergo A C, ad B F est [k] data; ex hypothesi autem, ut A B, ad B E ita est M B, ad B I, &, ut k 7. quinti.
M B, ad B I, ita est [l] G B, ad B H, ergo ut M B, ad B E ita erit [m] recta G , ad B H, quam- l 4. sexti. m 11. quinti.
obrem ratio C B, ad B H erit [n] data, cum ratio A C, ad B F sit [o] data, ergo ratio C B, ad B I n 56. huius.
est data, cum ratio B I, ad B H sit [p] data, &c. o 7. quinti. p 3. def huius.

PROPOSITIO LXXV.

Si duo triangula, ad inuicem habeant rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem, sed tamen datis, erit, ut primi latus ad secundi latus, ita alterum secundi latus, ad eam rectam, ad quam reliquum primi latus habet rationem datam.





DAta sit ratio trianguli, A B G, ad triangulum D E F angulus A æqualis angulo D vel angulus A, & D sint dati, at vero ut A B ad D E, ita D F, ad M; Dico rationē A G ad M esse datam. Fiant [a] parallelogramma A H, D C. Quoniam ut parallelogrammum A H, ad parallelogrammum D C, ita est [b] triangulum A B G, ad triangulum D E F & ex hypothesi ratio trianguli A B G, ad triangulum D E F, est data, & ratio parallelogrammi A H, ad parallelogrammum D C est [c] data; ergo ratio A G, ad M erit [d] data, cùm anguli A, D sint æquales, vel dati, & ut A B, ad D E ita sit D F, ad M, &c. Vel

a 11. primi. b 15. quinti. c 2. def. huius d 74. huius

sint triangula A B G, D E F, quæ ad inuicem habeant rationem datam, sintque anguli B A G, E D F, vel æquales, vel inæquales quidem, sed tamen dati: sitque ut A B ad D E ita A G ad M, Dico esse ut A B ad D E ita D F ad M ad quam A G habet rationem datam. Compleantur parallelogrāma A H, D C: Quandoquidem triangulum A B G ad triangulum D E F habet rationem datam, ergo & parallelogrammum A H ad parallelogrammum D C aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem, sed tamen datis, habebit rationem datam, quamobrem erit per 74. huius ut A B ad D E ita D F ad M, ad quam nimirum A G alterum primi trianguli latus habet rationem datam.

PROPOSITIO LXXVI.

Si à trianguli dati specie vertice, linea perpendicularis agatur ad basim habebit rationem datam.

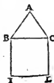


TRiangulum A B C datum sit specie, & ad B C, sit perpendicularis A D. Dico rationem A D, ad B C esse datam. Quoniam triangulum A B C est datum specie, & angulus B est [a] datus, angulus A D B est [b] datus, ergo triangulum A D B est [c] datum specie; ratio verò A B, ad A D est [d] data, & ratio A B, ad B C est [e] data; ergo ratio A B, ad B C est [f] data.

a 3. def. huius. b 12. axio. 1. c 40. huius. d 3. def huius e 3. def. huius. f 8. huius.

PROPOSITIO LXXVII.

Si datæ duæ figuræ specie, ad inuicem habeant rationem datam, & quodlibet latus, unius harum figurarum, ad quodlibet latus alterius habebit rationem datam.





DAtæ sint specie figuræ A B C, & G F D E H, & ratio A B C, ad G F D E H sit data. Dico rationem B C, ad D E esse datam. Sint facta [a] quadrata B L, D N. Quoniam ratio A B C, ad B L est [b] data, & ex hypothesi data est ratio A B C, ad G D E, ergo ratio B L, ad G D E erit [c] data, & ratio D N, ad G D E erit [d] data; proinde ratio B L, ad D N erit [e] data; atque adeo ratio B C, ad D E est [f] data, &c.

a 46. primi. b 49. huius. c 8. huius. d 49. huius. e 8. huius. f 54. huius.

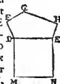
PRO-

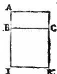
PROPOSITIO LXXIIX.

Si data figura specie habeat, ad quod rectangulum rationem datam, habeat autem, & unum latus ad unum latus rationem datam, rectangulum specie datum est.

Datæ specie figuræ sint GFDEH, & ratio G D E, ad rectangulum A C sit data, & ratio D E ad B C sit data. Dico rectangulum A C esse datum specie, ex DE fiat a quadratū D N, & protracta b sit AB in I, & rectangulum B K, fiat æquale quadrato D N. Quoniam ratio G D E, ad D N est c data, & ratio GDE, ad AC est ex hypothesi data; ergo ratio D N, ad A C est d data; per constructionē autem DN, est æquale BK, ergo ratio BK, ad A C erit e data, at ratio B I, ad A B est f data, & ut D E ad BC, ita est g B I, ad DM, & ex hypothesi ratio DE, ad BC est data, ergo ratio BI, ad D M, erit h data; proinde ratio D M, vel D E, ad A B, erit i data, cùm ratio B I, ad A B sit k data, atque adeo ratio AB, ad BC erit l data, cùm ex hypothesi data sit ratio D E, ad B C; quapropter rectangulum A C erit m datum specie, &c.

a 46. primi.
b 2. pet. primi.
c 49. huius.
d 8. huius.
e 7. quinti.
f 1. sexti.
g 14. sexti.
h 2. def. huius
i 8. huius.
k 1. sexti.
l 8. huius.
m 3. dt. huius



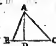


PROPOSITIO LXXIX.

Si duo triangula unum angulum, cum angulo æqualem habeant, ab æqualibus autem angulis, ad bases perpendiculares agantur, sitque, ut primi trianguli basis, ad perpendicularem, ita & alterius trianguli basis, ad perpendicularem, illa triangula æquiangula sunt.

Proposita sint triāgula ABC, GEF, & angulus BAC sit æqualis angulo EGF, & A D, sit perpendicularis ad B C, & GL, ad EF, &, ut B C, ad AD, ita sit EF, ad G L, Dico triangulum A B C æquiangulum esse triangulo G E F, fiat a angulus F E H æqualis angulo B, & protractæ sint b rectæ H F, H G, & agatur H K, perpendicularis ad E F, Quoniam angulus E H F est c æqualis angulo EGF; & ex hypothesi angulus BAC æqualis est angulo EGF; ergo EHF, æqualis est d angulo BAC, angulus HEF est æqualis per constructionē angulo B; ergo triangulum EHF erit e æquiangulū triangulo ABC, ergo ut EK, ad KH ita est f recta BD, ad DA, & vt FK ad KH, ita est g CD, ad DA, ergo vt EF, ad KH, ita BC erit h ad D A, at ex hypothesi E, ut est EF, ad LG, ita BC, ad DA, & KH. LG sunt i æquales, & K H est k parallela rectę LG, ut, & HG parallela est l rectæ EF; ergo angulus EGH æqualis erit angulo m G E F pars autē circumferentię circuli EH, est n æqualis parti FG, ergo angulus EFH est o æqualis angulo GEF, & angulus E H F est p æqualis angulo EGF; ergo triangulū EHF, est q æquiangulum triangulo EGF, & triangulum E H F, est æquiangulum triangulo ABC cum id sit supra demonstratum; ergo triangulum A B C erit r æquiangulum triangulo EGF, &c.

a 23. primi.
b 1. pet. 1.
c 21. tertij.
d 1. axiom. 1.
e 32. primi.
f 4. sexti.
g 4. sexti.
h 24. quinti.
i 9. quinti.
k 28. primi.
l 33. primi.
m 29. primi.
n 26. tertij.
o 27. tertij.
p 21. tertij.
q 32. primi.
r 21. sexti.



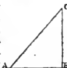


PROPOSITIO LXXX.

Si triangulum datum unum angulum habuerit quod autem sub lateribus datum angulum comprehendentibus continentur, rectangulum, habeat, ad quadratum reliqui lateris rationem datam triangulum specie datum est.

Sit propositum triangulum A E C angulus verò C sit datus, ratio autem rectanguli AC, CE, ad quadratum AE sit data. Dico triangulum A C E esse datum specie. Quadratum A E plus quadrato B fiat æquale quadrato A C plus C E. Quoniam Angulus C est datus ex hypothesi, ergo ratio trianguli A C E, ad quadratum B erit a data, ac proinde ratio trianguli ACE, ad rectangulum sub CA, CE erit b data. Itaque ratio quadrati B, ad rectangulum, sub CA, CE est c data; at

a 67. huius.
b 66. huius.
c 8. huius.



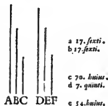


ăt verò ratio quadrati A E, ad rectangulum sub C A, C E est ex hypothesi data; ergo ratio quadrati B, ad quadratum AE est [d] data; propterea ratio quadrati B plus quadrato AE, ad quadratum AE erit [e] data. Quadratum autem B plus quadrato A E; æquale est quadrato AC plus CE per constructionem, & ratio quadrati AC plus CE, ad quadratum AE est [f] data; ergo ratio AC plus CE, ad AE est [g] data; angulus verò C est datus ex hypothesi; ergo triangulum AEC est [h] datum specie.

d 8. huius.
e 18. quinti.
f 7. quinti.
g 14. huius.
h 46. huius.

PROPOSITIO LXXXI.

Si tres rectæ proportionales, tribus rectis proportionalibus extremas habuerit in ratione data, media quoque habebunt in ratione data. Et si extrema, ad extremam media, ad mediam habeat rationem datam; & reliqua, ad reliquam habebit rationem datam.



Sint proportionales A, B, C, & insuper sint proportionales D, E, F. Supponamusque primo rationem A, ad D esse datam; quemadmodum rationem C ad F, pariter esse datam. Dico rationem B, ad E esse datam. Quoniam quadratum B æquale est [a] rectangulo sub A, C, cùm A, B, C, sint proportionales, & quadratum E, sit [b] æquale rectangulo sub D, F, cùm D, E, F, sint proportionales, ratio rectanguli sub A, C, ad rectangulum sub D, F erit [c] data, cùm ratio A, ad D, sit data, & C, ad F, ratio verò quadrati B, ad quadratum E est [d] data; ergo ratio B, ad E erit [e] data.

Supponamus autem secundo rationem A, ad D esse datam, & etiam B, ad E, Dico rationem C, ad F esse datam. Quoniam ratio B ad E est ex hypothesi data, & ratio quadrati B ad quadratum E est [f] data; ratio rectanguli sub A, C ad rectangulum sub D, F est [g] data, & ratio A, ad D est ex hypothesi data, ergo ratio C, ad F est [h] data.

a 17. sexti.
b 17. sexti.
c 70. huius.
d 7. quinti.
e 54. huius.
f 51. huius.
g 7. quinti.
h 68 huius.

PROPOSITIO LXXXII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, erit, vt prima, ad eam ad quam secunda rationem habet datam, ita tertia, ad eam, ad quam quarta rationem habet datam.

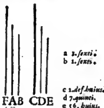


Supponamus, vt A, ad B, ita esse D, ad E, & ut B, ad C ita E, ad F, & rationem B, ad C esse datam. Dico rationem E, ad F esse datam, & vt A, ad C ita esse D, ad F. Quoniam, vt B, ad C ita est E ad F ex hypothesi, & ratio B, ad C est data; ergo ratio E, ad F est [a] data; propterea, vt A, ad C ita erit [b] D, ad E, cùm sit, vt A, ad B, ita D, ad E, & vt B, ad C, ita E, ad F.

a 2. def. huius.
b 22. quinti.

PROPOSITIO LXXXIII.

Si quatuor rectæ, ita ad inuicem se habeant, vt tribus ex ijs quibuscumque sumptis, & quarta ipsis proportionali accepta ad quam reliqua, è quatuor rectis rationem habeat datam, erit, vt quarta, ad tertiam ita secunda, ad eam, ad quam habet prima rationem datam.



Propositæ sint magnitudines A, B, C, D, & vt A ad B ita C, ad E, ratio verò D, ad E sit data, & vt D, ad C, ita sit B, ad F. Dico rationem A ad F esse datam. Quoniam, ut A, ad B, ita est ex hypothesi C, ad E erit [a] rectangulum, sub A, & E æquale rectangulo, sub B, & C, vt verò est rectangulum, sub A, & E, ad rectangulum sub A, & D, ita est [b] recta E, ad D, at ex hypothesi ratio E, ad D est data; ergo ratio rectanguli sub A, & E, ad rectangulum sub A & D erit [c] data; & ratio rectanguli sub A, & D, ad rectangulum sub B, & C erit [d] data, cùm rectangulum sub A, & E sit æquale rectangulo sub B, & C; ex hypothesi verò, vt D, ad C, ita B, ad F, ergo ratio A, ad F, erit [e] data, &c.

a 1. sexti.
b 1. sexti.
c 2. def. huius.
d 7. quinti.
e 56. huius.

PROPOSITIO LXXXIV.

Si duæ rectæ datum spatium comprahendant, in angulo dato, sit autem altera, altera maior data, etiam vnaquaque ipsarum data erit.



Propositæ sint magnitudines rectæ A B, A E, & EB sit parallelogrammum datum; angulus verò A sit datus, & AE sit æqualis A C, sitque CB recta data. Dico AE, & A B esse datas; fiat a C D parallela A E, Quoniam angulus A datus est ex hypothesi, & parallelogrammum E C est b datum specie; & ex hypothesi parallelogram. E B est datum & ex hypothesi quoque CB est data, ergo A C, vel A E data erit c; at ex hypothesi C B, est data, ergo A B est d data.

a 31. primi. b 3. def. huius c 59. huius. d 3. huius.

PROPOSITIO LXXXV.

Si duæ rectæ datum spatium comprahendant in angulo dato, sit autem simul vtraque data, & earum quoque vna quaque data erit.

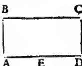


Propositæ sint rectæ DC, CB, & DB sit datũ parallelogrammũ, & angulus D C B sit datus, sitque B C A recta, & A C æqualis C D, & AB sit data. Dico D C, C B esse datas; sit protracta F D, ad E, & A E fiat parallela C D. Quoniam ex hypothesi A C æqualis est C D, & ex hypothesi quoque angulus, DCB, vel DCA est datus, ergo AD est c datum specie; & ex hypothesi AB est data; ergo AC, vel CD est d data, & CB, est e data, &c.

a 2. petitio 1. b 31. primi. c 3. def. huius. d 58. huius. e 4. huius.

PROPOSITIO LXXXVI.

Si duæ rectæ datum spatium comprahendant in angulo dato quadratum autem vnius quadrato alterius maius sit dato, quàm in ratione, & vtraque ipsarum data erit.



Supponamus propositas magnitudines A B, & A D, & B D sit datum parallelogrammum, & angulus A sit datus, & rectangulum, sub D A, A E sit datum, quadratum autem A D, maius sit quadrato AB, data quàm in ratione. Dico rectas AB, AD esse datas. Quoniam parallelogrammum BD est ex hypothesi datum; rectãgulum verò sub DA, AE est ex hypothesi datum; ergo ratio parallelogrammi B D, ad rectangulum sub D A, AE erit a data, ac proinde ratio A B, ad A E est b data; itaque ratio quadrati A B, ad quadratum A E erit c data; præterea ratio quadrati A B, ad rectangulũ, sub A D, ED erit d data; itaque ratio rectanguli, sub AD, ED, ad quadratum A E erit e data; ob id ratio quadrupli rectanguli sub AD, ED, ad quadratum AE erit f pariter data; atque adeo ratio quadrupli rectanguli sub A D, ED, plus quadrato AE, ad quadratum AE erit g data, sed quadratum A D plus ED æquale est h quadruplo rectangulo sub A D, E D plus quadrato ex A E; ergo ratio quadrati ex A D, plus ED, ad quadratum ex AE erit i data, quo fit, ut ratio AD plus ED, ad AE sit k data; itaque ratio dupli, AD, ad AE erit l data; ergo ratio A D, ad A E erit m data; cumque rectangulum sub A D, & A E, ad quadratum A E sit n, ut A D, ad A E; ergo ratio rectanguli sub A D, A E, ad quadratum A E erit o data; ex hypothesi verò rectangulum sub AD, A E est datum, & quadratum A E est p datum; ob id A E est q data; ergo AD, est r data; ex hypothesi verò angulus A est datus; ergo A B est s data, &c.

a 1. huius. b 69. huius. c 51. huius. d 11. huius. e 8. huius. f 8. huius. g 18. quinti. h 8 secundi. i 2. def. huius k 54 huius. l 18. quinti. m 8. huius. n 1. sexti. o 2. def huius. p 2. definitio huius. q 55. huius. r 57. huius. s 57. huius.

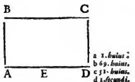
SCHOLION.

Illa consequentia; ergo quadrati AB ad rectangulum sub AD, ED, ratio erit data, patet; quadratum enim AD ex hypothesi maius est quadrato AB data, quam in ratione, estque etiam ex hypothesi datum rectangulum sub AD, AE, quo sublato ex quadrato AD remanet rectangulũ ADE; ergo per vndecimam definitionem ablato dato rectangulo DAE, reliquum rectangulum ADE ad quadratum AB; atque adeo quadratum AB, ad rectangulum ADE, habebit rationem datam.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVII.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, possit autem altera, altera maius dato, earum vtraque data erit.

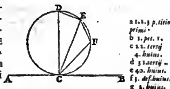


PRopositæ sint rectæ A B, A D, & BD sit parallelogrammum datum; angulus verò A sit datus, & rectangulum sub D A, A E sit datum. Quadratum verò AD, minus quadrato AB æquale sit rectangulo sub AD, AE. Dico, AB AD esse datas. Quoniam parallelogrammum B D est ex hypothesi datum; rectangulum sub D A, A E est datum ex hypothesi; itaque ratio parallelogrammi B D, ad rectangulum sub DA, AE erit [a] data, atque adeo ratio A B, ad A E erit [b] data; quo fit, vt ratio quadrati A B, ad quadratum A E, sit [c] data, atque adeo cùm quadratum AB, sit [d] æquale rectangulo, sub AD, ED, siquidem quadratum AD minus quadrato A B æquale est rectangulo, sub AD, AE, propterea ratio rectanguli sub A D, E D, ad quadratum A E erit [e] data, & ratio quadrupli rectanguli sub AD, ED, ad quadratum AE erit [f] data; ratio ergo quadrupli rectanguli sub A D, E D plus quadrato A E, ad quadratum A E erit [g] data, sed quadratum AD, plus ED æquale est [h] quadruplo rectangulo sub AD, ED plus quadrato A E; ergo ratio quadrati AD plus ED, ad quadratum AE est [i] data, atque adeo ratio A D, plus E D, ad A E est [k] data; ratio vero dupli A D, ad A E est [l] data; Idem est enim dupla A D, ac AD plus ED, plus AE. ergo ratio A D, ad A E erit [m] data; rectangulum autem sub AD, AE ad quadratum A E est [n] ut ad A D, ad AE; ergo ratio rectanguli sub A D, A E, ad quadratum A E erit [o] data; rectangulum autem sub AD, A E est ex hypothesi datū; ergo quadratum A E, erit [p] datum, itaque A E erit [q] data; ac proinde A D est [r] data; at ex hypothesi angulus A est datus; ergo A B erit [s] data, &c.

a 1. huius.
b 69. huius.
c 51. huius.
d 1. secundi.
e 8. huius.
f 8. huius.
g 18 quinti.
h 8. secundi.
i 2. def huius.
k 54. huius.
l 18. quinti.
m 8. huius.
n 1. sexti.
o 2 def huius.
p 2. huius.
q 55. huius.
r 57. huius.
s 57. huius.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Si in circulum magnitudine datum, acta sit recta linea, quæ segmentum auferat, quod datum angulum comprehendat, acta recta linea magnitudine data est.



SVpponamus CFED esse circulum datum, & CE esse inscriptam circulo C F D, angulum C F D, esse datum. Dico C E esse datam magnitudine; fiat [a] CD diameter, & agatur [b] E D recta. Quoniam angulus C F E est ex hypothesi datus, & angulus C D E est [c] datus, angulus CED est [d] datus, ergo triangulum C E D est [e] datum specie; proinde ratio C E, ad C D est [f] data; ex hypothesi verò C D est data; ergo [g] recta C E erit data, &c.

a 1. 2. 3 petitio primi.
b 1. pet. 1.
c 22. tertij 4. huius.
d 31. tertij.
e 40. huius.
f 3. def. huius.
g 2. huius.

PROPOSITIO LXXXIX.

Si in datum magnitudine circulum, data magnitudine recta acta fuerit, auferet segmentum, quod angulum datum comprehendet.

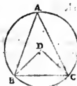
SVpponamus C F E D esse circulum datum, & C E esse inscriptam circulo C F E D, & C E esse datam. Dico angulum C F E esse datum; fiat [a] diameter C D, & E D ducta sit recta. Quoniam C D, C E, sunt datæ ex hypothesi; ergo ratio C D, ad C E est [b] data; angulus C E D est [c] datus; ergo triangulum CDE est [d] datum specie, propterea angulus CDE est [e] datus; atque adeo angulus CFE est [f] datus, &c.

Repetatur hic superioris propositionis figura.

a 1. 2. 3. pet. primi.
b 1. huius.
c 31. tertij.
d 43. huius.
e 3. def huius
f 22. tertij.

PROPOSITIO XC.

Si in Circuli positione dati circumferentia datum fuerit punctum, ab eo autem puncto, ad circumferentiam circuli inflexa fuerit recta, qua datum angulum efficiat inflexa recta altera extremitas data est.

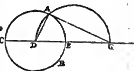


a 1. tertij. b 1. pet. primi. c 26. huius. d 20. tertij. e 2. huius. f 29. huius. g 25. huius.

SVpponamus Circulum B A C esse positione datum, & punctum B esse datum in parte circumferentiæ, & angulum B A C esse datum. Dico punctum C esse datum; reperiatur [a] punctum D centrum Circuli, & DB, DC sint [b] ductæ, rectæ. Quoniam ex hypothesi B, & D, sunt puncta data, & BD erit [c] data, angulus BAC est ex hypothesi datus, & angulus BDC æqualis est [d] duplo angulo BAC; ergo angulus BDC est [e] datus, & DC est [f] data positione; ex hypothesi verò circulus ABC est datus positione; ergo punctum C est [g] datum positione, &c.

PROPOSITIO XCI.

Si a dato puncto acta recta fuerit qua datum positione circulum contingat, acta linea positione, & magnitudine data est.

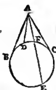


a 1. pet. primi. b 3. pet. primi. c 18. tertij. d 31. tertij. e 6. def. huius f 25. huius. g 26. huius.

SVpponamus DAEB, esse circulum positione datum, & G esse punctum datum, & GA esse lineam rectam tangentem circulum, & A esse punctum contactus. Dico AG esse datam positione, & magnitudine; Ducantur [a] rectæ DA, DG, & fiat [b] semicirculus DAG. Quoniam ex hypothesi D, & G sunt puncta data, & angulus [c] DAG est rectus, & punctum A est [d] in parte circumferentiæ DAG; ergo circulus DAG est [e] datus positione; est autem ex hypothesi circulus AEB positione datus, ergo punctum A erit [f] datum, & punctum G est ex hypothesi datum; ergo AG erit [g] data positione, & magnitudine, &c.

PROPOSITIO XCII.

Si extra circulum positione datum accipiatur aliquod punctum, à dato autem puncto, in circulum producatur quadam recta datum est id, quod sub acta linea, & ea, qua inter punctum, & connexam peripheriam comprehenditur rectangulum.

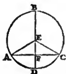


a 17. tertij. b 1. huius. c 52. huius. d 36. tertij. e 2. def. huius

SVpponamus BFE esse circulum datum, & punctum A esse datum, lineam AE esse arbitrariam. Dico rectangulum EAF esse datum; Fiat [a] AB, tangens circuli BFE; Quoniam AB data est [b] positione, & magnitudine, & quadratum AB est [c] datum, rectangulum EAF æquale [d] est quadrato AB; ac proinde rectangulum EAF erit [e] datū.

PROPOSITIO XCIII.

Si intra datum positione circulum sumatur aliquod datum punctum, per punctum autem, agatur in circulum aliqua recta, quod sub segmentis acta recta linea comprehenditur rectangulum datum est.



a 1. & 2. pet. primi. b 26. huius. c 6. def. huius. d 3. 4. huius. e 52. huius. f 35. tertij. g 2. def. huius

SVpponamus EABCD esse circulum datum, & F, esse punctum datum, & AFC esse rectam datam. Dico rectangulum AFC esse datum. Fiat [a] diameter BEFD. Quoniam F, & E sunt puncta data, ex hypothesi, ergo FE erit [b] data, & EB, vel ED est [c] data, & FB, ac FD erunt [d] datæ. Ergo rectangulum DFB est [e] datum; rectangulum autem AFC est [f] æquale rectangulo DFB, ergo rectangulum AFC erit [g] datum, &c.

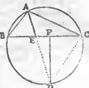
Vel.

Vel. Quoniam datum est vtrumque punctorum E, F ergo recta E F, erit [a] positione, & magnitudine data. Est autem circulus E A B C D positione datus, ergo utrumque punctorum B, D. datum erit [b]; punctum autem F est datum, igitur utraque rectarũ B F, F D data [c] erit, quamobrem rectangulum, quod sub D F, F B continetur datum erit; sed rectangulum A F C æquale est [d] rectangulo D F B ergo rectangulum A F C erit [e] datum.

a 26. huius. b 15. huius. c 26. huius. d 35. tertij. e 2. def. huius

PROPOSITIO XCIV.

Si in circulum magnitudine datum agatur recta linea, quæ segmentum auferat, quod angulum datum comprehendat, angulus autem, qui in segmento consistit bifariam secetur, simul vtraque rectarum, quæ angulum datum comprehendunt, ad lineam, quæ angulum bifariam secat, habebit rationem datam, & quod, sub simul vtrisq; quæ datum angulum comprehendunt rectis, & inferne abscissa, ab ea, quæ angulum in circumferentia datum bifariam secat, rectangulum datum erit.

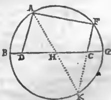


DAtus sit circulus B A C D, & angulus B A C sit quoque datus, præterea angulus, BAD, æqualis sit angulo D A C. Dico rationem BA plus AC, ad AD esse datam, & rectangulum sub BA plus A C, & E D, esse datum; ducatur [a] recta C D; Quoniam angulus BAC est ex hypothesi datus; ergo BC erit [b] recta data, & angulus CAD, est [c] datus, ergo CD data erit [d]. At verò, vt C A, ad A B ita est C E, ad E B, & ut C A, ad C E ita [f] erit A B, ad E B, & vt CA plus AB, ad CB, ita est [g] AB, ad E B, & angulus ABE æqualis est [h] angulo ADC; ex hypothesi verò angulus BAE æqualis est angulo DAC; ergo triangulum A B E æquiangulum est [i] triangulo A D C, quare vt AB, ad EB ita est [k] AD, ad DC, ergo vt CA plus AB, ad C B ita [l] est A D, ad D C; cum fuerit ut CA plus AB, ad C B, ita A B ad E B id enim superiùs demonstratum fuit; ergo est [m] ut CA plus AB, ad AD, ita CB ad DC, est autem ratio CB per primam huius ad DC, data, & ratio C A plus AB, ad AD erit [o] data. Angulus A B E æqualis est [p] angulo E D C, & angulus AEB æqualis [q] est angulo D E C, & triangulum AEB æquiangulum est [r] triangulo DEC, ergo vt CD, ad DE ita [f] est AB, ad BE, sed ut AB ad BE ita [t] est CA plus AB, ad CB, cùm ut CA plus AB, ad CB, ita AB sit demonstratum esse ad BE, & vt CD, ad DE ita [u] est CA plus AB, ad C B; ergo [x] rectangulũ sub C A plus AB, & D E æquale erit rectangulo sub CD, CB; ergo rectangulum sub CD, CB est [y] datum; ac proinde rectangulum sub CA plus AB, & DE, est [z] datum.

a 1. pet. primi. b 18. huius. c 2. huius. d 90. huius. e 3. sexti. f 16. quinti. g 12. quinti. h 21. tertij. i 32. primi. k 4. sexti. l 11. quinti. m 16. quinti. n 1. huius. o 2. def. huius. p 21. tertij. q 15. primi. r 32. primi. f 4. sexti. t 11. quinti. u 11. quinti. x 16. sexti. y 52. huius. z 2. def. huius.

PROPOSITIO XCV.

Si in Circuli positione dati diametro sumatur datum punctum à puncto autem in circulum producatur quædam recta, & agatur, à sectione ad rectos angulos in productam rectam lineæ, per punctum autem in quo linea, quæ, ad rectos angulos consistit; occurrit circumferentiæ circuli, agatur parallela productæ rectæ datum est illud punctum in quo parallela occurrit ipsi diametro, & quod sub parallelis rectis lineis comprehenditur rectangulum datum est.



SVpponamus circulum B A G K, & B G sit diameter; D, verò sit punctum datum; sitque D A linea arbitraria; DAE sit angulus rectus, & EC, AD sint parallelæ. Dico punctum C esse datum, & rectangulũ sub AD, EC esse datum. Protrahatur [a] recta EC, ad K. ducaturque [b] recta A K. Quoniam angulus D A E est rectus ex hypothesi; & angulus A E K est [c] rectus; & AK est [d] diameter, & BG est diameter, ex hypothesi; & H est [e] centrum circuli, punctum H est datum ex hypothesi, ut etiam punctum D; ergo D H erit [f] linea data; angulus autem E K A, æqualis est [g] angulo D A K, & angulus C H K æqualis [h] est angulo A H D, & triangulum C H K, æquiangulum est [i] triangulo A H D,

a 1. pet. primi. b 1. pet primi. c 29. primi. d 31. tertij. e 14. axio. 1. f 26. huius. g 29. primi. h 15. primi. i 32. primi.

k 15. def. 1. l 26. primi. m 26. huius. n 1. def. huius. o 27. huius. p 26. primi. q 93. huius. r 3. schol. def. 2. apud Herig. ſ 1. def. huius.

AHD, at HK, HA ſunt [k] æquales, & HC, HD ſunt [l] æquales; & DH erit [m] datā; ac proinde HC erit [n] data, punctum autem H eſt ex hypotheſi datum ergo Punctum C erit [o] datum; at AD æqualis eſt [p] rectæ CK; & rectangulum ſub KC, CE eſt [q] datum, itē rectangulū ſub AD, CE, æquale eſt [r] rectangulo ſub KC, CE ergo rectangulum ſub AD, CE erit [ſ] datum, &c.

SCHOLION.

HIc porrò conſiderandum eſt in maiorem declarationem eorum, quæ ſuperiùs attulimus, circa Propoſitionem LVI, & alias inde dependentes, vbi habetur; Si duo æquiangula parallelogramma habuerint ad inuicem rationem datam, eſt vt primi latus ad ſecundi latus, ita reliquum ſecundi latus ad eam, ad quām alterum primi latus habet rationem datam, quam habet parallelogrammū ad parallelogrammum. Cōcluditur autem data ratio CB ad BH; perinde eſt autem ac ſi dicamus, vt eſt AB latus primi parallelogrāmi ad BE latus ſecundi, ita BG reliquū ſecundi latus ad BH, ad quam alterum primi latus, nempe CB habet rationē datā quam habet parallelogrammū AC ad parallelogrammum BF; eſt enim AH æquale BF, cùm ſit ut AB ad BE, ita BG ad BH; vnde AC ad AH eandem habebit rationem, quam habet ad BF, ſed ut AC ad AH, ita eſt CB ad BH; quare AC ad EF erit, vt CB ad BH; eſt autem data ratio AC ad BF; ergo data eſt etiam ratio CB ad BH. Hoc autem eſt demonſtraſſe, vt eſt primi latus ad ſecundi latus, ita reliquum ſecundi latus ad eam, ad quam alterum primi latus habet rationem datam, quam habet parallelogrammum, ad parallelogrammum. Per Corollarium autem inferrebatur, vt CB, ad BH, ita parallelogrammum AC ad parallelogrammum BF. & non diſſimiliter de alijs, quæ inde ſequuntur, &c.

Cæterum plures ex ſupradictis Propoſitionibus, alia quoque ratione demonſtrari potuiſſent noluimus tamen in ijs demonſtrandis, varias demonſtrationes adhibere; ne tedio Lectorem afficeremus.

In epilogum rediguntur, quæ in Datorum libro tradita ſunt.

SVnt igitur hæc nonaginta Datorum Theoremata, quæ Pappus Alexandrinus initio ſeptimi Libri Collectionum Mathematicarum innuerat, quorum primò quidem vniuerſè in magnitudinibus Diagrammata fuerunt viginti tria. Vigeſimum quartum in rectilineis proportionalibus ſine poſitione. Deinceps autem ſequentia quatuordecim, in rectis lineis poſitione datis; decem verò quæ ſequuntur in triangulis ſpecie datis ſine poſitione. Sex reliqua ſequentia in parallelogrammis, & applicationibus ſpatiorum ſpecie datorum. Ex ijs, quæ deinceps ſequuntur, primum quidem eſt in lineis, quatuor autem in ſpatijs triangulis, quòd differentiæ quadratorum laterum ad ipſa triangula datam habeant rationem. Quæ verò ſequuntur ſeptem uſque ad ſeptuageſimum tertium de duobus ſunt parallelogrammis, quòd ob poſitiones in angulis, rationem inter ſe datam habeant. In ſequentibus verò ſex diagrammatibus, vſque ad ſeptuageſimum nonum, duo quidem ſunt in triangulis, quatuor autem in pluribus rectis lineis proportionalibus. Ex iis porrò, quæ deinceps ſequuntur tria ſunt in duabus rectis lineis proportionalibus datum ſpatium continentibus. At vero, qui in omnibus octo, videlicet ad nonageſimum vſque, in circulis oſtenduntur, vel magnitudine tantum datis, vel poſitione quoque, nimirum rectis lineis per datum punctum ductis. De his hactenus.

Libri de proportionis ſectione ab Apollonio conſcripti ad locum reſolutū faciunt. Problema.

Sequebantur autem ex eiuſdē Pappi teſtimonio Lib. Apollonii περὶ λόγου ἀποτομῆς nempe de proportionis ſectione, qui pariter ad locum faciunt reſolutum, quos tamen præſens ætas non vidit, niſi exiguè reſtitutos Snelij labore. Erat enim duorum librorum propoſitio vna ſubdiuiſa, quarum vnam Pappus ita deſcripſit.

Per datum punctum rectam lineam ducere ſecantem à duabus rectis lineis poſitione datis, ad data in ipſis puncta lineas, quæ proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sed vt ait ipſe contingit figuras differentes eſſe & numero plures ob ſubdiuiſionem factam, & linearum datarum inter ſe poſitionem, & differentes caſus puncti dati, & ob reſolutiones, compoſitioneſque ipſorum, & determinationum. Primus enim liber ipſo referente habebat de proportionis ſectione locos ſeptem, caſus vigintiquatuor, determinationes quinque, quarum tres quidem maximæ, duę verò minimæ erant; maxima autem erat ad tertium caſum quinti loci; minima ad ſecundum ſexti, & ſeptimi loci; maximæ autem ad ſexti, & ſeptimi quartos caſus.

Liber ſecundus de proportionis ſectione locos habebat viginti quatuor, caſus ſexaginta tres, & determinationes ex primo libro, ad quem totus referebatur, & Lemmata habebat

vi-

viginti; Duo verò commemorati libri Theoremata centum, & octoginta vnum, etsi iuxta Periclem etiam plura, ut præfatus auctor testatur.

Pappus non multum explicuit argumenta librorum, quos temporis iniuria periisse constat,& certè si cum iis quoque Datorum liber ex hominum memoria sublatus fuisset,ex relatis à Pappo, nemini profectò datum esset Euclidem rediuiuum reddere, atque Datorum doctrinam exuscitatam efficere. Non mirum igitur si cætera, quæ ad locum faciunt resolutum, eiusdem attestatione ad hanc vsque diem integrè restitui minimè potuerint; tametsi in hoc non obscuri nominis Viri, plurimum laboris pertulerint, plurimumque temporis insumpserint.

Pappus parū accuratè horum librorū retulit argumentum.

Ad Libros igitur de proportionis sectione quod attinet,præter ea,quæ Snellius industriosè præstitit, quisque poterit eius imitatione Apollonii quidem argumentum versare, atque adeo Theoremata ad hanc materiam spectantia condere,& problemata struere, quod etiam & nos præstare non grauabimur, cùm sese occasio obtulerit.

Sequebantur Libri Pappo referente eiusdem Apollonij περὶ χωρίου ἀποτομῆς hoc est De spatii sectione. Hi quoque ad locum faciebant resolutum. Erant autem duo, problema verò vnum bis subdiuisum, vnaque propositio, quæ alia quidem habet superioris similia, sed eo tantum differt, quod in illa opportet duas tantum lineas abscissas datam habere proportionem, in hac autem datum spatium continere. Sic enim se habebat. *Per datum punctum rectam lineam ducere secantem à duabus rectis lineis positione datis, ad data puncta, lineas, quæ spatium contineant dato spatio æquale.* Quæ quidem propositio figuras habet differentes ob causam superius allatam, & numero plures; itaque primus liber de spatij sectione habebat locos septem, casus viginti quatuor, determinationes verò septem,quarum quatuor maximæ, tres verò minimæ, & maxima quidem erat ad primum casum primi libri, ad primum & secundum casum quarti loci, & ad sexti loci tertium, minima ad tertium casum tertii loci, ad quartum casum quarti loci, & ad primum sexti loci.

Libri de spatij sectione, quos Apollonius dedit, perspicue ad locum eiusdem faciebant resolutum. Problema.

Secundus autem liber de spatii sectione tresdecim habebat locos, casus septem, determinationes autem ex primo libro, ad quem quidem referebatur; Primus autem liber continebat Theoremata quadraginta octo, secundus septuaginta sex.

Ita quidem Pappus, qui si exactiùs horum duorum de spatii sectione retulisset argumentum, operosum fortasse non fuisset præstare quæ ab Apollonio tradita fuerunt; Snellius tamen hac etiam in re suam interposuit industriam, quatuor problemata condens, quorum primum. *Datis duabus rectis, per datum in alterutra punctum rectam educere, quæ ad datos in expositis terminos, absumat segmenta datum spatium comprehendentia*; secundum. *Datis duabus rectis per datum punctum educere rectam, quæ ad earum concursum intercipiat segmenta spatium datum comprehendentia*; tertium. *A datis duabus parallelis recta per punctum, quod in neutra earum sit acta, ad datos in ipsis terminos, absumere segmenta datum spatium comprehendentia*; quartum. *Datis duabus rectis annuentibus per punctum extra ipsas datum, rectam ducere, quæ ad datos in ipsis terminos absumat segmenta datum spatium comprehendentia.*

Deinceps sequebantur libri περὶ διωρισμένης τομῆς,hoc est de determinata sectione, quorũ vna erat propositio, eaque disiuncta, nempe. *Datam infinitam rectam lineam uno puncto secare, itaut interiectarum linearum ad data ipsius puncta, vel unius quadratum, vel rectangulum duabus contentum datam proportionem habeat, vel ad rectangulum contentum vna ipsarum interiecta, & alia extra data, vel duabus interiectis contentum, punctis ad utrasque partes datis.* Notat autem Pappus, huius, veluti bis disiunctæ difficiles determinationes habentis demonstrationem, per plura fieri necesse esse, quod bifariam ab Apollonio præstitum esse, ait, vno quidem modo peruulgato, vsitatoque in nudis rectis lineis, ut habetur secundo elementorum Libro Euclidis, alio verò magis accomodatè, ac ingeniosè per semicirculos. Primus autẽ liber, eodem referente, sex habebat problemata, Epitagmata, hoc est auxiliaria sexdecim,& determinationes quinque, quarũ quatuor maximæ,atq;vna minima, erant autem maximæ ad secundum epitagma secundi problematis ad tertium quarti, ad tertiũ quinti,& ad tertiũ epitagma tertij problematis. Secundus verò liber continebat problemata tria, epitagmata nouem, & determinationes tres, quarum quidem, minimæ erant ad tertium primi, & ad tertium secundi; maxima autem ad tertium tertii problematis. Lemmata primi Libri erant viginti septem; secundi verò Libri viginti quatuor, & in vniuersum,

Libri de determinata sectione conscripti quoque sunt ab Apollonio qui faciebant ad locum resolutum.

vtriusque

utriusque libri de determinata sectione Theoremata erant octoginta tria.

Conatur autem hanc Geometriæ partem restituere Snellius, quatuor problematibus; quorum primum. *Datam rectam lineam infinitam vnico puncto secare, vt è rectis ad data duo puncta absumptis vnius quadratum ad rectangulum sub reliqua, & data externa comprehensam rationem habeat datam.* Secundum; *Datam rectam lineam infinitam vnico puncto secare vt è rectis ad data tria puncta absumptis, quod sub vna ipsarum, & data externa ad id quod sub duabus reliquis comprehenditur rationem habeat datam.* Tertium: *Datam rectam lineam infinitam vnico puncto secare, vt è rectis, ad data in ipsa tria puncta absumptis rectangulum sub duabus comprehensum, ad reliqua quadratum rationem habeat datam.* Quartum; *Datam rectam lineam infinitam, vnico puncto secare, vt è rectis ad data in ipsa quatuor puncta absumptis, rectangulum sub duabus optatis comprehensum ad rectangulum sub reliquis, rationem habeat datam.*

Nulla Geometria pars est vtilior, quã ea in qua de linea sectione agitur.

At si vlla est Geometriæ pars, quam locupletare liceat, hæc profectò est; Vnde hęc ætas beneficio speciosæ Analytices Antiquitatem superauit, nec vlla quidem videtur vberior, nulla færacior; Nos autem in hac multum insudauimus, & infinita propemodum, tam Problemata, quàm Theoremata condidimus, rati hinc plurimum emolumenti Geometram assecuturum, cum mirum sit quantum vtilitatis afferat lineę diuisio, ad omnia, quę in ipsa vniuersa Geometria tractari possunt; ea verò si Deo placuerit, atq; adeo hanc Geometriæ partem vberrime tractatam aliquando tandem afferemus. Vnde facile posset intelligere, qui se magnum iactat Geometram parum admodum esse in ipsa Geometria versatum, cùm Artem Analyticam nec à primo limine salutauerit; putat se Apolloniũ alterum, & tamen magnifacit solutionem trium problematum satis vulgarium, dum interim me in his nihil fecisse arbitror, quamuis plura, quàm tria milliũ propositionum proprio marte adinuenerim, adnotandum est autem; Veteres per ἐπίταγμα, intellexisse subsidiariũ quoddã.

Libri duo de tactionibus ab Apollonio cõscripti ad locũ faciebant resolutũ. Auctor nil in his se fecisse arbitratur, quamuis plus quam tria millium propositionum proprio marte adinuenerit.

Succedebant deinceps duo libri ἐπαφῶν, hoc est tactionum in quibus propositiones videbantur plures è quibus vnam tantum attulit Pappus, nimirum. *Punctis, & rectis lineis, & circulis tribus, quibuscumque positione datis, circulum describere per vnumquodque datorum punctorum, qui vnamquamque datarum contingat*; & rectè ipse obseruat ob multitudinem datorum huius in propositionibus similium particulares propositiones differentes fieri necesse esse; & quæ sequuntur apud Pappum videri possunt. Primus autem liber tactionũ habebat problemata septem, secundus problemata quatuor; Lemmata vero ipsorum duorum librorum erãt viginti vnũ theoremata vero sexaginta; Geometriæ hæc pars Recentiorum labore satis copiosè exculta fuit, vnde facta est rediuiua, ita ut parum in ea desiderari possit; id autem contigit, quoniam materia satis est obuia, nec subobscurum argumentum, adeo ut operosum non fuerit quid hac in re Veteres præstiterint, abundè coniicere, & mirum est, quòd in re facili Pappus magna vsus sit diligentia, quam in difficilioribus omisit.

Tres Libri porismatum Auctore Euclide agnouit antiquitas.

Tres sequebantur Euclidis Lib. πορισμάτων hoc est Porismatũ auctore Pappo, quod quidẽ opus commendans ait. *Opus quidem artificiosissimum, ac perutile ad resolutionem obscuriorum problematum, ac eorum generum, quæ haud comprehendunt eam, quæ multitudinem præbet naturam.* Hisce autem verbis non exigua subest obscuritas, vel propter græci textus corruptionem, vel propter interpretis mendosam versionem. Hieronymus Vergerius Iustinopolitanus claritate generis illustris, ac multiplici refertus eruditione, quem dilexi quo die cognoui, meque ab eo ita diligi iudicaui, vt ausim dicere mihi eum fortunam dedisse amplificatorem dignitatis meæ; ostendit mihi Pappi Græcum codicem, quem amicus illi commodauerat. Codex autem sic legebat. πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβυθιστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γένων ἀπερίληπτον τῆς φύσεως αὐτῶν παρεχομένης πλῆθος; quæ quidem lectio superiori non congruit interpretationi; quædam enim verba videntur omissa, & casus vnus pro altero vnius dictionis: hoc est versio illorum verborum πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον prætermissa fuit, & casum adhibet ἀπεριλήπτων pro ἀπερίληπτον; tunc autem versio non sic; quæ haud comprehendunt, sed potius, quæ haud comprehenduntur, non in actiua, sed in passiua significatione, quinimo quidam suspicatur in illis verbis καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος deesse aliquid, cùm non constet cuius φύσιν hoc in loco auctor intelligat qui ad Porismatum naturam retulisse videtur; vnde codex iuxta ipsum sic restituendus πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβυθιστέρων προβλημάτων καὶ τῶν

γνῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως αὐτῶν παρεχομένης πλῆθος, quorum verborum latina versio sic se haberet. *Porismata à multis sic intelliguntur, ut artificiosa collectio, videlicet propositionum sit ad analysin grauiorum, seu difficiliorum problematum, & generum, incomprensibilem multitudinem, prabente scilicet ipsorum porismatum natura.* Adhuc tamen Pappus quid sibi velit hisce verbis obscurum est; non deest qui putet eorum sensum esse, videlicet, ut porismata conferant ad analysin obscuriorum problematum, & generum, nempe generalium problematum, cùm ex dictis appareat, porismatum propositiones generalissimas esse; quando autem Pappus subiungit. *Cum natura multitudinem, qua vix potest animo comprehendi subministret*, videtur Bullialdo, infinitas eiusdem problematis solutiones indicare; mihi tamen potiùs multitudo ipsa referenda videtur ad problemata, adeo ut sensus reddatur Porismata suppeditare materiam ad analysin obscuriorum problematũ multitudinis infinitę, ut dubitare non liceat, an τὸ γένος vsurpauerit Pappus pro γενικῶτάτων, & an subaudienda sit vox ἀναλύσεων, ut sensus reddatur porismata ex natura sua multitudinem solutionum eiusdem problematis præbere; id enim parum rationi consentaneum est; non enim inficiandum multitudinem quoque solutionum uniuscuiusque problematis illinc suppeditari, tamen nullum problema est, quod solutionum multitudinem infinitam patiatur. Vt autem summatim dicam, existimo Pappi consilium eò tendere, vt doceat porismatum opus tribus Libris comprehensum, nil aliud fuisse quàm congeriem plurium propositionum maximè conducentium ad resolutionem problematum, quibus difficillimum est modica industria satisfacere; Quatenus enim ex eius verbis conijcere licet, cuique facillimum erit intelligere eius ordinis propositiones illas fuisse, vt late se extenderent, eodem semper modo se se habentes, adeo ut hinc multum adiutus Analysta obscuriorum problematum solutiones aggressus, felicissimè tandem absolueret. Cæterum Pappi verba ita mihi videntur vertenda. *Porismata multis, seu apud multos, est collectio artificiosissima ad resolutionem obscuriorum problematum, & eorum generum naturâ sic se habentis incomprehensibilis multitudo.* Quasi græcus Codex videatur supplendus, & ita legendus τῆς φύσεως ὄντος παρεχομένης. Vt autem præfatus Auctor magis explicatam redderet nobis porismatis naturam, hunc in modum prosequitur. *horum autem specie, omnes neque theorematum sunt, neque problematum, sed mediam quodammodo inter hac formam, ac naturam habent, ita vt eorum propositiones formari possint, ut theorematum, vel ut problematum. Quo factum est, ut ex multis Geometris, alij quidem ea genere esse theoremata, alij verò problemata opinati sint, dum ad solam tantùm propositionis formã respicerent.* Vnde coniicere licet, ad quem propositionum ordinem pertineant, videlicet medium tenere locum inter theoremata, atque problemata, eà ratione, quia formari possunt, ut theoremata, videlicet per modum theorematum enunciari, ita ut in sola rei contemplatione sistant, ac in affectionis inuestigatione versentur, & insuper per modum problematum, in quibus rei alicuius ortum intra Mathematicos limites docemur; cum itaque medium locum obtineant porismata, quamuis ad enunciationis formam externam, quæ ijs accidentaria est, vtriusque naturam induant, intrinsecè tamen inter theoremata, ac problemata medium obtinent locum, ita ut Theorematibus succedant, & Problematibus præeant, atque adeo per ipsa à theorematibus ad problemata gressus fiat, vnde porismatum talis natura sit, vt à theoria ad effectionem tendat, rationem atque modum ostendat id efficiendi, quod theoremate demonstratur quod est; ita Bullialdus ratiocinatur, immo, & addit has propositiones dum considerantur, vt media ad finem, pura theoremata non esse; quoniam efficiendi modum exhibent, non esse autem problemata, quia nondum in ipsis efficitur propositum, sed solummodo ad illud alio in loco efficiendum afferuntur. Hanc suam explicationem confirmat ijs, quæ sequuntur Pappi verbis: *horum autem trium differentiam Veteres multo melius cognouisse ex definitionibus perspicuum est. Dixerunt enim theorema esse, quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema, quod affertur in constructionem propositi. Porisma verò, quod proponitur in porismum, hoc est in inuentionem, & inuestigationem propositi.* Hæc Pappus, ex qua porismatis definitione colligit Bullialdus Veteres Geometras, eo nomine propositiones aliquas connotasse quatenus ad effectionem, & inuentionem dirigebantur, & rationem efficiendi problemata continebant, atque adeo esse, ut media ad finem. Vnde colligit humodi propositiones seorsim acceptas, nec ad inuentionem quæsiti, & effectionem problematis, cui inueniendo inseruire possint, adhibitas, porismata amplius esse, sed pura

Pappi sententia ex Bullialdo.

Ex sententia Auctoris quid Pappus docuerit.

Ad quem propositionum ordinem pertineant porismata.

theoremata; quod si rationem cuiusdam effectionis contineant, in problemata conuerti posse, quibus aliquid efficietur; quod si ad aliud, ut medium ad finem applicabitur, problema sine ipso haud facilè efficiendum, absoluturum, atque porismata propositiones illas esse futuras. Affert postmodum eiusdem Pappi alia verba, videlicet. *immutata est autem hęc porismatis definitio à iunioribus, qui nequeunt omnia inuestigare, sed his elementis vtuntur, & ostendunt solummodo, quod hoc est quod quaritur; non autem illud ipsum inuestigant; Cumque ex definitione ipsa, & ex ijs quæ nobis tradita sunt redarguerentur, ab accidente sic porisma definierunt. Porisma est, quod hypothesi deficit à locali theoremate;* Conquæritur igitur quòd iuniores porismatis definitionem antiquam immutauerint, causam afferens immutationis, quòd videlicet omnia porismata necessaria ad inuentionem propositi inuestigare non possent; vnde ostendebant tantummodo hoc esse quod quæritur, nec illud inuestigabant, quamobrem Geometricam effectionem assequi minimè poterant; non aduerterunt igitur porismatis naturam, veluti mediam inter naturam theorematis, atque problematis, nec agnouerunt in ijs theoriam cum effectione connecti, cum per id, quod illis propositionibus efficitur propositum ipsum problema absoluatur, ita Bullialdus ratiocinatur existimans illa Pappi verba: *sed his elementis utuntur*; sic intelligenda esse, ut iuniores Euclidis porismatibus velut elementis vsi sint, non vt propositionibus ad effectionem Geometricam immediatè conducentibus: atque adeo nullus erit admirationi locus quòd porismatum naturam ignorauerint, cum eius finem, ac usum perspectum non habuerint, utpote nescientes propositiones illas in porismum, siue propositi inuestigationem afferri, nouam autem definitionem porismatis effinxerunt, dicentes videlicet Porisma esse; quod hypothesi deficit à locali theoremate ne reprehensionem incurrerent eorum, qui veterem definitionem amplectebantur; vnde sibi suaserunt porisma esse propositionem, in quà pauciora data supponerentur, quam in locali theoremate. Explicat autem Bullialdus huiusmodi theorema dicens, Propositionem esse, in qua ostenditur aliquid in tali loco esse, & ad eum pertinere, ut punctum esse in linea, circulo, parabola, ellipsi, &c. Quòd autem id uniuersim rectè dictum sit, haud facilè mihi persuadeo, cum satis liqueat ex iis, quæ superius tradita fuerunt, id hac in re dicendum, præsertim iuxta ea, quæ ex Proclo retulimus; non inficiandum tamen id ex parte concedendum esse.

Vt probe autem innotescat ipsius porismatis natura iuuabit aduertere illud deriuari à verbo πορίζω quod latinè vertitur pluribus modis, & præsertim aditum patefacio, viam aperio, suppedito, copiam facio, item quæro, acquiro, inuenio siue comparo, & aliquando quæstum facere, ut apud Aristotelem Polit. primo Cap. quinto. Budæus verò loquens de hac voce Porisma, in Commentariis Græcæ linguæ, hæc habet πόρισμα verbum est Dialecticorũ, & significat proloquium vel problema quod consecutionem habet necessariam atq; hærentem iis, quæ iam probata sunt & comperta. Philoponus enarrans illa verba Arist. ex 1. Post. εἰ δὲ φανερὸν τοῦτο, φανερὸν καὶ ὅτι οὐκ ἔστι τὰς ἑκάστου ἰδίας ἀρχὰς ἀποδεῖξαι. πόρισματι. (inquit Philoponus) κατὰ τοὺς γεωμέτρας ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγει. εἰ γὰρ μὴ ἐνδέχεται, φησίν, ἀποδεῖξαι τι εἰ μὴ ἐκ τῶν ἰδίων ἑκάστου ἀρχῶν φανερὸν ἂν εἴη ὡς οὐκ ἐνδέχεται οὐδεμίαν ἐπιστήμην τὰς οἰκείας ἀρχὰς ἀποδεικνύναι, εἴγε τὴν ἀπόδειξιν ἐκ τῶν ἰδίων δεῖ γενέσθαι ἀρχῶν, τῶν δὲ ἀρχῶν ἀρχὰς εἶναι οὐχ οἷόν τε. Alibi superiùs explicans illud dictum eiusdem, οὐκ ἄρα ἔστιν ἐκ τοῦ ἄλλου γένους μεταβάντα δεῖξαι, οἷον τὸ γεωμετρικὸν ἀριθμητικῇ πόρισματι συνάγει (inquit idẽ Philop.) τὸ νῦν δεικνύμενον. est autem πόρισμα additamentum, & quasi corollarium τῆς ἀποδείξεως. Hoc autem præhabito, & in memoriam etiam reuocato discrimine, quod superiùs attulimus inter theorema, & problema, considerandum occurrit propositionem eandem pluribus modis spectari posse, & secundùm rationem diuersam, diuersam sibi quoque nomenclaturam vindicare; vna igitur eademque propositio theorema dici poterit, itemque porisma, & quidem theorema dicetur, quatenus in ea aliquod attributũ alicui conuenire ostenditur, nullo habito respectu ad aliud, at verò porisma nuncupabitur respectu ad id, quod assumitur construendum, quodq; est problematis propositum, illique inseruit, aditum patefacit, viam aperit, modumque suppeditat ad propositi nimirum inuestigationem, si tamen in formam theorematis enuncietur. Quod si efferatur ad modum problematis, adhuc ex hoc capite à problemate distinguetur. Neque propterea credendum hoc idem conuenire posse cuicunque propositioni elementari, nam hoc interest inter hæc, quod elementis nimis remotè sit illud accomodatum, his autem immediatè videlicet ad effectionem Geometricam conducere.

Budæus in commentariis Græcæ linguæ

Auctoris sententia de Porismatis natura.

Vt

Vt verò ſuperiùs aduertimus illud idem verbum πορίζω ſignificat inter cætera quæſtum facio, vnde non mirandum ſi Proclus etiam in tertium librum Euclidis ita ſcripſerit. Τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, ὅσα τὰ Εὐκλείδῃ γεγραμμένα. λέγεται δὲ ἰδίως ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν. ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασιν ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως. *Procli authoritas in 3. lib. Euclidis.*

Poriſma etiam de quibuſdam problematibus dicitur, qualia ſunt ab Euclide conſcripta poriſmata. propriè verò talia dicuntur quando ex demonſtratis aliud quodlibet theorema nobis non proponentibus emergit, & offertur; quod propterea poriſma appellarunt, quaſi lucrum ex ſcientifica demonſtratione, obiter, & præter expectationem factum.

Itaque iuxta definitionem hanc poriſma dicetur theorema aliquod ex demonſtratiuo ſylogiſmo neceſſariò deductum, & quaſi lucrum eius dicendum ſit, quoniam non ex profeſſo theorematis huius inſtituta ſit demonſtratio, ſed tamen ex demonſtratis rectè ſequatur; itaque ex eo dictum videtur Proclo, quod obiter, & alind agendo, nouum theorema lucri faciamus. Atque hunc in modum explicari poriſma poſſe perſpicuè conſtat, cum verbum illud πορίζω præter cætera illud quoque ſignificet, quæſtum facio. *Poriſmatis definitio ex Proclo.*

Id autem prætereundum non videtur hac tempeſtate vſum obtinuiſſe, ut poriſma dicatur id, quod ex analyſi conſequimur, nam analyſi quidē inſtituta propoſitionem inferimus nobis præſcribentem, quo pacto ſit operandum ad abſolutionem problematis, & qua ratione Geometrica effectio perficienda ſit, quod utique non lucriſacimus, quaſi aliud agendo, ſed potius ex inſtituto nos aſſequi operando contendimus, cū non aliā ob cauſam, nec ob alium finem analyſis ipſa inſtituta ſit; eadem itaque ratione poriſma dicetur, quatenus videlicet quidam eſt quæſtus, nihil autem refert, quod illum ex inſtituto conſequamur. Conuenit porro poriſmati hoc modo accepto Veterum definitio, ſiquidem immediatè conducit ad effectionem tamquam ad finem, vnde purum theorema non videtur, quoniam efficiendi modum exhibet, nec purum problema, quia nondum in ipſo propoſitum efficitur, ſed tantummodo ad illud efficiendum affertur. Cæterum ad theorema locale quod attinet, quid illud ſit iam ſuperiùs innuimus; admitti tamen poſſe videtur quod iuniores tradiderunt diſcriminis inter poriſma, & theorema locale, ex Pappi ſententia vbi habet. *Huius autem generis poriſmatum loci ipſi ſunt vna ſpecies; atque de hac ipſa abundè tractatur in reſoluto loco, ſeorſum autem à poriſmatibus collecta, inſcriptaque, ac tradita ſunt, quod magis, diffuſa, ac copioſa ſit cæteris ſpeciebus;* itaque is quandam ſpeciem poriſmatis agnouit, quæ deficiat hypotheſi à locali theoremate; ſed hoc ſpecificum accidens, immeritò quidem refertur ad genus. Sed hactenus de natura poriſmatis, ſolùm addam, non propterea illud, prout à nobis explicatur cum Lemmate confundi; tametſi enim hoc quoque videatur aliquando acceptum pro lucro, tamen, vt à Mathematicis vſurpatur pro Sumptione, quæ propoſitio eſt fide indigens; cum enim vel in conſtructione, vel in demonſtratione, aliquod ſumimus eorum quæ oſtenſa non ſunt, ſed ratione indigent, tunc id quod ſumptum eſt, veluti per ſe ambiguum inquiſitione dignum eſſe arbitrati, Lemma nos appellamus. Non autem ſic poriſma, quemadmodum ex ſupra traditis facilè conſtat. Illud inſuper non prætermittam ſcilicet à plerisque confundi poriſma cum Deductione, quod à noſtra explicatione alienum eſt. Quid autem Deductio ſit iam ſuperiùs à nobis fuit explicatum; eſt enim tranſitus ab vno problemate, vel theoremate ad aliud, quo cognito, vel comparato, etiam illud quod propoſitum eſt apparet, cuius exemplum inter cætera habetur apud Pappum Libro ſeptimo propoſitione octogeſimaquinta, quando ait.

Hac tempeſtate quid per Poriſma intelligatur.

Poriſma non confunditur cum Lēmate.

Perperam aliqui Poriſma confundunt cū Deductione.

Ergo deueniendum eſt ad aliquam determinatam ſectionem, &c.

Pergit verò idem Auctor dicens locorum igitur ſpecies ſunt decem ex Comandini verſione, & ita quidem ſi Græcus Codex habet τῶν τόπων οὖν εἴδη ἐστὶ δέκα ſed fortaſſe non ſic legendum, ſed potius εἴδη ἐστὶ δ, vt rectè notat Bullialdus, & congruit ſequentibus verbis, nam locorum quatuor ſpecies enumerat tantummodo, videlicet planorum, ſolidorum, linearium, & eorum, quæ ad medietates pertinent: Vnde ita vertendum. Locorum igitur ſpecies ſunt quatuor, ſiquidem alii ſunt planorum, alij ſolidorum, alij linearium, & in ijs quæ ad medietates pertinent.

Illud etiam facit ad maiorem poriſmatum notitiam, quod Pappus ſubiungit ijs videlicet contingere propoſitiones difectas ob difficultatem multarum rerum, quæ ſubintelligi conſueuerunt, ità videlicet, ut complures Geometræ aliqua ex parte ea aſſequantur,

quæ verò magis necessaria sunt, significata ignorant. Testatur verò facillimum esse multa in his vna propositione complecti; Cum ipsemet Euclides non multa de vnaquaque posuerit specie; sed de his præfatus Auctor pauca scripsit; vnde ex iis minimè licet præcisè coniicere, quæ eo in opere ab Euclide tradita fuerunt, accedit etiam quod mendosus codex non permisit, ut interpres integram nobis sententiam exprimeret: Vnde præstat, quæ ipse vniuersalius tradidit attendere, ut. *Si quotcunque rectæ lineæ se se mutuo secent, non plures, quàm duæ per idem punctum, omnia autem in una ipsarum data sint, relinquorum multitudinem habentium triangulum numerum huius latus singula habet puncta tangentia rectam lineam positione datam, quorum trium non ad angulum existens trianguli spaty, vnumquodque reliquum punctum rectam lineam positione datam, tangere.* Ait vero verisimile non esse Euclidem hoc ignorare, sed principium dumtaxat statuere, & in omnibus porismatibus apparere principia. & seminaria sola multarum, ac magnarum multitudinum ab eo iacta, quorum vnumquodque non iuxta positionum differentias distinguere oportet, sed iuxta differentias accidentium, & quæsitorum. Reliqua autem omitto, siquidem apud Pappum ipsum cuique legère licebit, apud quem etiam extant aliqua spectantia ad proportionis sectionem, quædam ad spatij sectionem, item Lemmata in libros de determinata sectione, in libros Inclinationum, tactionum, planorum locorum, porismatum, in libros conicorum, &c.

Libri duo de locis planis. Succedebant autem libri duo de locis planis, quorum argumentum apud eundem quisque intueri potest, quorum doctrinam rediuiuam reddidit Franciscus à Schooten, satis quidem industriosè.

De Inclinationibus. De inclinationibus quoque scripserat Apollonius libros duos, quorum meminit idem Pappus, & quorum doctrinam rediuiuam fecit Marinus Ghetaldus, quatenus tamen licuit ex ijs coniicere, quæ Pappus tradiderat.

Libri octo Conicorum. Faciebant quoque ad locum resolutum octo libri conicorum Apollonij, quorum quatuor iamdiu evulgati fuerunt, & Commentariis illustrati à Federico Comandino, & a Maurolyco etiam paraphrasi explicati, qui pariter duos libros proprio marte adiecit; quatuor autem relinqui libri iuxta candorem quo ab Apollonio descripti fuerunt desiderantur, nam tres saltem ipsorum nempe quintus, sextus, & septimus vulgati extant, ex Arabico in Latinum conuersi.

Libri de proportionis sectione. De spatij sect. De determinata sectione. De tactionib. Libri Porismatum. Ex ijs, quæ pertinent ad libros de proportionis sectione, item de spatij sectione, non nulla iam sunt restituta, vt superiùs innuimus, nec operosum est uberius idem argumentare. Ad libros autem de determinata sectione quod attinet, hæc ætas profectò non inuidet antiquitati, siquidem mirâ facilitate innumera sunt, quæ beneficio Speciosæ analytices reperiri possunt.

Ad ea vero quod attinet, quæ in libris tactionum tradita fuerunt, maximum adiumentum trahitur ex veteri analysi, beneficio Datorum.

Ad porismatum verò libros multum conducit vetus analysis, nec tamen minus nouiter inuenta. Vnde illud exploratum esto beneficio speciosæ Logistices, innumera porismata reperiri posse, quæ ad effectiones Geometricas conducant.

Ad loca plana restituenda, & vetus, & noua resolutiua conducit;

Ad libros inclinationum, æque etiam utraque, & fortasse magis noua, quàm vetus.

Nec dissimiliter sentiendum de Conicis.

Tractandorū Argumentum ac Auctoris partes. Nostræ autem erunt partes utramque methodum resolutiuam, scilicet antiquam, & nouam explicare, ut quantum fieri poterit theoremata condere, eorumdemque demonstrationes contexere summa facilitate liceat; problematibus verò, quamuis difficillimis, ac obscurrissimis quam citissimè satisfacere. Illud porrò non prætermittam animaduersione dignum, cùm quis fuerit utramque methodum assecutus, vni non adeo se adigat, vt alteram deijciat; mutuò enim se adiuuant, imò plerumque aptior est vna altera, ad aliquod theorema ostendendum, vel problema soluendum; Prudentis igitur Analystæ erit theorematis, vel problematis occasione oblata, utramque experiri, seu de utraque periculum facere, eam verò seligere, quam opportuniorem aduerterit. Vnde nulla iis est adhibenda fides, qui putant noua methodo omnia perficienda esse, cùm potiùs plerumque contingat, quod nos frequenter experti sumus, noua methodo per longas ambages, & tricas perfici, quæ alias, antiquâ expeditè præstantur. Cautè itaque in hoc se gerat Analysta, ne irritionem

sionem incurrat; quod animaduertisse operæpretium duximus. Nunc proximum est, ut in arenam descendentes methodos ipsas explicemus, initio facto ab antiqua, & primò quatenus in theorematibus exercetur, nec immerito, nam theorema naturà quidem problemati antecedit.

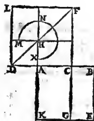
Quæ hactenus dicta sunt de methodo antiquà exemplis illustrantur quantum ad Resolutionem, & compositionem Theorematum.

CAPVT SECVNDVM.

AD explicandam doctrinam Resolutionis, & Compositionis Theorematum, quã in primis excoluit Antiquitas; primùm exordientes à simplicioribus illam illustrabimus exemplis Theorematum, quæ plana dicuntur, & quidem priori loco; Vtemur autem ad id primò vnà, vel altera Resolutione, & Compositione, quarum meminit Euclides lib. xiii Elementorum. Primum autem Theorema sic se habet.

THEOREMA.

Si recta linea extremà, ac media ratione secta fuerit maior portio assumens dimidium totius quintuplum potest eius, quod à dimidia sit quadrati. Exemplum I.



REcta AB extremà, ac medià ratione secetur[a] in C, sitque AC portio maior, & producatur[b] vsque ad D, ità ut A D sit dimidia ipsius A B. Dico quadratum ex C D quintuplum esse quadrati ex A D. Describantur[c] quadrata D C, & A B, nempe DCFL, & ABEK; ducaturque[d] per A recta K H parallela alterutri ipsarum DL, CF, quæ diametrum D F secet in puncto H, & per H ducatur[e] HM recta alterutri ipsarum LF, DC parallela, & producatur[f] FC ad G. Quoniam ergo AB extremà, ac medià ratione secatur in C, erit[g] rectangulum sub A B, B C comprehensum æquale quadrato ex A C; sed rectangulum quod sub A B, B C continetur est C E, & quadratum, quod fit ex A C est FH, ergo rectangulum CE erit æquale quadrato F H. Quoniam verò AB dupla est ipsius DA, estque æqualis ipsi AK, & DA æqualis ipsi AH; erit ob id KA dupla eiusdem A H. Quia autem H C, A G sunt rectangula sub eadem altitudine posita, nempe inter easdem parallelas; erit[h] A G ad H C vt K A ad A H, atque adeo duplum; Cum vero L H, HC sint[i] æqualia, erunt LH, HC simul sumpta duplum ipsius HC, ob id[k] æqualia rectangulo AG; Ostensum est autem CE æquale quadrato HF; ergo MNX gnomon erit[l] æqualis quadrato A E; cum autem A B dupla sit ipsius DA, erit[m] quadratum ex A B, nempe AE quadruplum quadrati DH, sc. ex DA, sed gnomon MNX æqualis est quadrato AE; ergo & idem gnomon quadruplus erit quadrati DH, ergo totum quadratũ, nempè DF quintuplum erit ipsius DH, quadrati sed D F est quadratum ex DC, & DH ex DA, ergo quadratum ex DC quintuplum erit quadrati ex DA. Quod erat demonstrandũ.

a 30. sexti.
b 2. pet primi.
c 46 primi.
d 31. primi.
e 31 primi.
f 2 pet. primi.
g 17. sexti.
h 1. sexti.
i 43. primi.
k 9. quinti.
l 2. axioma 1.
m cor. 20. 6.

Antecedentis Theorematis Resolutio.

D A C B

REcta AB extremà, ad medià ratione secetur in C, & portio sit maior A C, minor autem C B; ponatur A D ipsius A B dimidio æqualis. Dico quadratum ex C D, quadrati ex DA quintuplum esse. Quoniam igitur quadratum ex C D quintuplum est quadrati ex D A; quadrato autem ex C D æqualia sunt quadrata ex C A, AD vna cum eo, quod bis CA, AD continetur; erunt quadrata ex CA, AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla; ergo diuidendo quadratum ex CA vna cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplum est

est quadrati ex AD; sed ei, quod bis C A, A D continetur æquale est rectangulum B A C; cum B A sit dupla ipsius A D, quadrato autem ex AC æquale est rectangulum A B C, cum AB extremâ, ac mediâ ratione secta sit in C; Rectangulû ergo B A C, vnà cum rectangulo ABC, quadruplum est quadrati ex AD. Sed rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC est id, quod fit ex AB quadratum, ergo quadratum ex A B quadruplum est quadrati ex AD, Quod quidem ita se habet; est enim AB dupla ipsius AD.

Resolutionis examen.

PRimò ergo ponitur linea AB secta extremâ, ac mediâ ratione in C. supponit autem resolutio tamquam verum, quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum esse; hoc est si maior portio assumat dimidium totius quintuplum posse eius, quod à dimidia fit quadrati. ex hoc vero supposito per ea, quæ consequuntur ipsa resolutio procedit; Cum enim quadrato ex C D æqualia sint quadrata ex CA, AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur; sequitur quadrata ex CA. AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur; quadrati ex AD quintupla esse. Hinc sequitur diuidendo quadratum ex CA vna cum eo, quod bis CA AD; continetur quadruplum esse quadrati ex AD. Hinc verò sequitur rectangulum BAC vna cum rectangulo A B C quadruplum esse quadrati ex AD. Per hæc itaque consequentia resolutio procedit donec hoc verum occurrat; quod inde quoque deducitur quadratum ex A B quadruplum esse quadrati ex AD; quod quidem verum est. cum AB sit ipsius AD dupla. Vides ergo quo pacto Resolutio sit sumptio quæsiti tamquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod verum concessum.

Eiusdem Theorematis Compositio.

QVoniam igitur quadruplum est quadratum ex AB quadrati ex A D quadratum autem ex AB est rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC; erit igitur rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum; Sed rectangulum BAC æquale est ei, quod bis DA, AC continetur; Rectangulum verò ABC æquale est quadrato ex AC, ergo quadratum ex AC vna cum eo, quod bis continetur DA, AC quadruplum est quadrati ex AD; proindè quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis DA, A C continetur quintuplum est quadrati ex D A; sed quadrata ex D A, A C vna cum eo, quod bis continetur D A, A C est id quod fit ex D C quadratum, ergo quadratum ex DC quadrati ex DA quintuplum erit. Quod oportebat ostendere.

Compositionis examen.

VIdes ergo quo pacto compositio sit quædam sumptio concessi per ea, quæ consequuntur in quæsiti conclusionem, seu depræhensionem; sumit enim hoc verum concessum, nempè quadratum ex AB quadruplum esse quadrati ex A D; ex hoc autem sequitur rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum esse, ex quo sequitur quadratum ex AC una cum eo, quod bis continetur DA. AC quadruplum esse quadrati ex AD, atq; adeo quadrata ex DA. AC vna cum eo quod bis DA. AC continetur quintuplum esse quadrati ex DA. Per hæc autem ratiocinatur, atque procedit Analysta donec in quæsiti Conclusionem perueniat; nempè quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum esse.

SCHOLION.

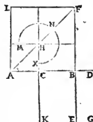
Notāda quædam. *IN superiori autem resolutione illud occurrit animaduersione dignum, quod semper est etiam obseruandum videlicet Analystam in resoluendo sistere ubi adinuenerit verum aliquod concessum utpotè non ui resolutionis, sed aliunde constans, quia scilicet aliàs deprehenditur firmà demonstratione uerum id esse, ut in hac presenti resolutione sistit ibi; quadratum ex A B quadruplum est quadrati ex AD, quod inde perspectum fit quia AB dupla est ipsius A D. Illud quidem uerum, quod nos in resoluendo offendimus aliundè nobis constare debet non ex resolutionis ui; quandoquidem illud inferimus ex eo, quod in quæstione positium est, atque adeo non licet eo uti in compositionis regressu; sed cum in aliquod uerum incidimus alio argumento demonstratum, ac propterea concessum statim possumus per resolutionis filum demonstrationem componendo perficere.*

Initio autem Compositionis afferri solet ratio ipsius ueri, quod nos in resoluendo offendimus, Animaduersione digna. *vt passim videre licet apud Pappum. Plerumque verò contingit ut illud verum, quod nobis resoluentibus occurrit constet ex hypothesi, unde nulla alia quærenda est ratio, quià iam supponimus quod uerissimum est: perinde enim est, imò plus quam si fuerit demonstratum, cum id iam in dato sit Theorematis, quod in sequentibus planum fiet.*

THEOREMA.

Exemplum. *Si recta linea partis ipsius quintuplum possit dupla dictæ partis extrema, ac mediâ ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio recta linea.*

Recta



RECta AB partis AC quintuplum possit, hoc est quadratum rectę A B quintuplum sit quadrati ipsius A C, & eiusdem AC sit dupla CD. Dico si CD extremâ, ac mediâ ratione secetur, CB esse partem maiorem. Describantur ª ex utraque ipsarum AB, C D quadrata A B FL; CDGK, & perficiatur figura ut supra, &c. producaturque ᵇ FB vsque ad E. Quoniam ergo quadratum AF est quintuplum quadrati A H, hoc est quadrati ex A C; proinde gnomon M N X quadruplus erit eiusdem quadrati A H; Cum autem DC dupla sit ipsius C A; quadratum ex DC quadruplum erit ᶜ quadrati ex C A, nimirum quadratum C G quadrati AH; at verò demonstratum est gnomonē MNX quadruplum esse quadrati AH; proindè gnomon idem M N X æqualis erit ᵈ quadrato CG. Rursus quoniam D C dupla est ipsius C A, & D C est æqualis ipsi CK, & AG ipsi CH, erit ᵉ ob id K C ipsius C H dupla; quapropter parallelogrammum KB duplum erit parallelogrammi B H; sunt enim inter easdem parallelas suntque * parallelogramma LH, HB ipsius HB duplum; ergo K B est ᶠ æquale ipsis L H, HB simul sumptis; at verò totus gnomon MNX toti C G est æqualis ut supra demonstratum est; ergo reliquū HF æquale erit ᵍ reliquo BG; sed BG est quod CD, DB continetur; cùm CD, D G sint æquales; H F autem est quadratum ex C B; ergo rectangulum C D B æquale erit quadrato ex CB; proindè ut AD CB ita est ʰ C B ad B D; at verò maior est DC quam CB, ergo etiam CB maior erit quam BD. Recta igitur linea C D extremâ, ac mediâ ratione secta; portio maior est CB. itaque si recta linea partis ipsius quintuplum possit &c. Quod erat demonstrandum.

a 46 primi.
b 1. pet primi.
c coroll. 10. sexti.
d 9 quinti.
e prim. sexti.
* 41 primi.
f 9. quinti.
g 3. axioma primi.
h 17. sexti.

Superest ostendendum duplam ipsius AC maiorem esse, quàm BC, namque, ut CB euadat pars eius, quæ dupla est ipsius AC, necesse est duplam AC maiorem esse ipsa BC, quod hoc pacto demonstrabitur.

Si dupla ipsius AC maior non sit quàm CB. sit, si fieri potest, BC ipsius CA dupla. igitur quadratum ex BC quadruplum erit ª quadrati ex C A; proindè quadratorum utrumque simul ex BC, CA quintuplum erit quadrati ex CA; at verò quadratum ex BA ponitur quintuplum quadrati ex AC, ergo quadratum ex BA æquale erit quadratis ex B C, C A, quod esse non potest, non est ergo B C dupla ipsius C A. Neque dissimili modo ostendemus minorem B C non esse duplam ipsius C A, &c. ergo A C dupla maior est quàm B C. Quod oportebat ostendere.

a 1. Corol. 20. sexti.

Antecedentis Theorematis Resolutio.

D A C B

REcta enim quædam C D partis ipsius D A quintuplum possit, ipsiusque D A dupla ponatur A B; Dico A B extremâ, ac mediâ ratione sectam esse in puncto C, maioremque partem esse A C, quæ reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniam autem A B extremâ, mediaque ratione secta est in C, & AC est portio maior, erit rectangulum ABC æquale quadrato ex AC, at verò rectangulum B A C æquale est ei, quod bis D A, AC continetur, siquidem BA dupla est ipsius AD, ob id rectangulum A B C vna cum rectangulo B A C, quod quidem est ipsius AB quadratum, æquale est ei, quod bis D A, A C continetur vna cum quadrato ex AC, sed quadratum ex AB quadruplum est quadrati ex A D, ergo quod bis DA, AC continetur vna cum quadrato ex AC quadruplum est eius, quod sit dx AD quadrati, ergo & quadrata ex DA, AC, vna cum eo quod bis sub D A, A C continetur rectangulo hoc est quadratum ex CD quintuplū erit quadrati ex DA, Quod ex hypothesi ità se habet.

Resolutionis Examen.

SVpponit hæc Resolutio rectam AB extremâ, ac mediâ ratione sectam esse in C, &c. Si CD partis ipsius DA quintuplum possit, & ipsius DA dupla sit AB, &c. deducit rectangulum A B C quadrato ex A C æquale esse, deindè autem infert rectangulum ABC vna cum rectangulo BAC æquale esse ei, quod bis DA, AC continetur, vna cum quadrato ex AC, ex quo resolutio deducit illud, nempè quod bis D A, AC continetur, vna cum quadrato ex A C quadruplum esse huius quadrati, quod fit ex

A D,

AD, hinc tandem colligit quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis D A, A C continetur, hoc est quadratum ex C D quintuplum esse quadrati ex A D, quod verum est. Patet ergo resolutionem esse sumptionem quæsiti tanquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod verum concessum.

Eiusdem Theorematis compositio.

QVoniam igitur quadratum ex CD quintuplum est quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia sunt quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis DA, AC continetur rectangulo; erunt ergo quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis sub DA, AC continetur rectangulo, quintuplū ipsius quadrati ex D A, & diuidendo, quod bis sub DA, AC continetur, vna cum quadrato ex AC quadruplū erunt quadrati ex A D; est autem & quadratum ex AB quadrati ex AD quadruplum; cùm A B dupla sit ipsius A D; ergo quod bis continetur DA, AC, vna cum quadrato ex A C æquale est quadrato ex A B; sed quadratum ex AB est rectangulum ABC vna cum rectangulo BAC; rectangulum igitur BAC vna cum rectangulo ABC est æquale duplo rectangulo D A C vna cum quadrato ex A C sed rectangulum BAC æquale est duplo rectangulo D A C; ablatis æqualibus rectangulis BAC, & duplo rectangulo D A C erit reliquum rectangulum A B C reliquo quadrato ex AC æquale; est igitur, vt BA ad AC; ita AC ad CB, maior est autem BA, quàm AC, ergo & AC maior erit, quàm CB; quamobrem AB extremâ, ac mediâ ratione secta est in C, & AC est maior portio, &c.

Compositionis Examen.

COmpositio ista sumit concessum hoc, nimirum quadratum ex DC quintuplum esse quadrati ex DA, ex quo infert quadrata ex DA, AC vna cum eo, quod bis continetur DA, AC quintuplum esse quadrati ex DA, & diuidendo, quod bis D A, AC continetur vna cum quadrato ex AC quadruplum esse quadrati ex AD, & indè deducit quod bis continetur DA AC, quod est rectangulum BAC vna cum quadrato ex AC æquale esse quadrato ex AB, ex quo arguit rectangulum B A C, vna cum rectangulo ABC æquari duplo rectangulo D A C vna cum quadrato ex AC vnde infert ablatis æqualibus rectangulis BAC, & duplo rectangulo DAC reliquum rectangulum A B C quadrato ex AC esse æquale; vndè colligit ut est AB ad AC, ità AC ad CB, undè infert AC maiorem esse, quàm CB, ac demum AB extremâ, ac mediâ ratione sectam esse in C, & AC maiorem esse portionem, &c. quod est quæsitum.

Vides itaque, quam bene in Compositiònem quadret illa definitio. Cōpositio est sumptio concessi per ea, quæ consequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem; sumit enim illud concessum; nempè quadratum ex C D; quintuplum esse quadrati ex DA, & per ea, quæ consequuntur ratiocinatur donec perueniat ad hoc, quod est quæsitum, nimirum AB extremâ, ac media ratione sectam esse in C, & A C maiorem esse portionem.

Supradictorum Theorematum resolutionibus, atque compositionibus in medium allatis non erit abs re alia quoque resoluere, simulque componere maioris doctrinæ gratia.

Primum autem occurrit Theorema illud resolutum, atque compositum a Pappo Alexandrino Lib. 4. Collectionum Mathematicarum prop. 4. Illud autem erit ut infra.

S C H O L I O N.

Ex hactenus facilè constant, quæ superius attulimus de Resolutione, & Compositione Theorematum, cùm diceremus Resolutionem esse sumptionem quæsiti tamquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod verum concessum. Compositionem autem esse sumptionem concessi per ea quæ sequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem,

Præceptū ad Resolutionem.

Itaque ad Resolutionem, quod attinet illud esto præceptum, ut quæsitum tanquam concessum supponatur, ex qua suppositione discurramus per ea, quæ ex suppositis deducuntur donec occurrat aliquod verum, & concessum, quòd scilicet aliunde, quam ex vi resolutionis illud esse verum constet,

Præceptū ad Compositionē.

Hoc autem vero inuento, atque concesso retrogrado ordine per analyseos vestigia incedendo, ac demonstrando progrediamur ipsiusque demonstrationis compositionem faciamus ratiocinantes, ex illo vero invento, atque concesso ad quæsiti conclusionem; & hoc esto præceptum pro Compositione.

De præcepto demonstrationis ducentis ad impossibile, paulò infra loquemur.

THEO-

THEOREMA.

Sit semicirculus A B C, & inflectatur A B D, sitque A B æqualis B D, ipsi verò B D ducatur ad rectos angulos D E, & B E iungatur; cui ad rectos angulos ducatur E F, sitque centrum G, & vt A G ad G D ità sit D H ad H F; & iungatur H E, Dico angulum B E D, angulo DEH æqualem esse.

Exemplum III.
Ex Pappo lib. 4 prop. 12.

Præparatio.

DVcatur [a] à puncto G ad BE, perpẽdicularis GK, & iũgatur [b] KD, ergo BK est [c] æqualis K E, atque est angulus B D E rectus, tres igitur rectæ lineæ K B, K D, KE inter se æquales sunt, [d] si namq; centro K, & interuallo KB circulus describatur transibit is per punctum D, atque adeò KD ipsi KB erit æqualis, itemque KE; & GK parallela est ipsi EF.

a 12. primi.
b 1. pet primi.
c 3. tertij.
d 1. Axioma primi.

Resolutio.

Quoniam igitur angulus K E D est æqualis angulo D E H, atque est D K æqualis K E, erit [e] angulus K D E æqualis angulo KED; & propterea KDE angulus æqualis est angulo DEH, & DK parallela est [f] EH, ducatur [h] ipsi DE parallela KL, & CD, ad L producatur [i], iungaturque [k] B L. Quoniam igitur K L ipsi DE parallela est, & K G ipsi EF parallela est; quemadmodum KD parallela est ipsi EH, erit [l] triangulum KLG æquiangulum triangulo EDF, & triangulum DKG triangulo HEF; quare [m] vt LG ad GK, ità DF, ad FE, & ut KG ad GD ità EF ad FH, ergo ex æquali [n] ut LG ad GD ità DF ad FH, & diuidẽdo [o] ut LD ad DG ita DH ad FH, ponebatur autem & vt DH ad FH ità A G ad GD, ut [p] igitur L D ad DG ità D H ad FH, hoc est AG ad GD, quapropter LD ipsi AG est [q] æqualis, & ob id ablata communi AD remanebit [r] LA ipsi DG æqualis. Sed & AB est [s] æqualis BD, ergo LB ipsi BG æqualis erit; Quoniã enim AB est ęqualis BD erunt [t] anguli BAD, BDA inter se æquales, & æquales itidem qui ex duobus rectis relinquuntur BAL, BDG, latera verò LA, AB æqualia sunt lateribus G D, DB, utrumq; vtriq; ergo & basis BL basi BG est æqualis, at verò BG æqualis est vtrique LD, AG, cum LD ostensa sit æqualis AG, & AG ipsi BG æqualis est, cum à centro ad circumferentiam ducantur, ergo BL ipsi LD æqualis [x] est.

e 5. primi.
f 1. axioma primi.
g 27. primi.
h 31. primi.
i 2. axioma primi.
k 1. pet. primi.
l 29. & 32. 1.
m 4. sexti.
n 22. quinti.
o 17. quinti.
p 11. quinti.
q 9. quinti.
r 3. axioma primi.
s ex hypothesi.
t 4. primi.
u 5. primi.
x 1. axioma primi.

Quod ita se habet, & sic ostenditur. Quoniam K L parallela est D E, & D K ipsi KE æqualis, erit BKL angulus æqualis angulo LKD, [y] & quoniam B K æqualis est K D, & angulus BKL angulo DKL, erit [z] & BL ipsi LD æqualis; si quidẽ cùm KL, DE sint parallelæ, sitque DK æqualis K E, erit angulus B K L æqualis angulo KED, & angulus KED æqualis angulo KDE, hoc est angulo LKD, igitur angulus BKL æqualis erit angulo L K D, atque adeo basis BL basi LD.

y 29. 5. 29. & 1. axioma 1.
z 4. primi.

Compositio.

QVoniam igitur DK æqualis est KE, & angulus KDE angulo quidẽ [α] KED est æqualis; angulus autem KED æqualis [β] est angulo BKL, & angulus KDE ipsi DKL ob lineas parallelas KL, ED; ergo & angulus BKL æqualis [γ] erit angulo D K L; sed & BK æqualis [δ] est KD, basis proinde BL basi LD æqualis [ε] erit; quãobrem [ζ] & angulus LBD angulo BDA, [η] hoc est angulo DAB, hoc est angulo ABG, communis autem auferatur angulus ABD, reliquus igitur LBA æqualis [θ] est reliquo DBG, sed & BD G æqualis [ι] est ipsi BAL, ergo duo triangula B D G, B A L duos angulos duobus angulis æquales habent, & latus AB æquale lateri BD, quapropter BG ipsi BL, & DG ipsi LA æqualis [κ] erit; reliquus enim angulus erit æqualis reliquo angulo, & triangulum triangulo simile; [λ] quamobrem ut AB ad BD ità LB ad BG, & LA ad DG, [μ] est autẽ AB æqualis B D, ergo & L B ipsi BG, & LA ipsi DG est æqualis; propterèaq; L D æqualis [ν] est A G, Quoniam igitur ut A G ad

α 5. primi.
β 29. primi.
γ 1. axioma primi.
δ ex constructione.
ε 4. primi.
ζ 5. primi.
η 15. def primi, & 5. primi.
θ 3. axioma primi.
ι 3. axioma 1. & 31. primi.
κ 26 primi.
λ 4. sexti.
μ ex hypothesi.
ν 2. axioma primi.

K GD,

ξ 7. quinti. GD, ità ponitur esse DH ad HF, atque est A G æqualis LD, ξ erit ob id ut L D ad D G ità
ο 18 quinti. DH ad HF, & ο componẽdo ut LG ad GD ità D F ad F H; est autem vt L G ad GK ità DF ad FE ob quartam Sexti Elemẽtorum; siquidem rectæ lineæ LK, DE parallelæ sunt, itemque sunt parallelæ K G, E F, erunt propterea triangula inter se similia π, & erit tandem ut KG ad GD, ità E F ad F H, cùm sit enim, ut L G ad G K, ità D F ad F E, ob similitudinem triangulorũ LKG, & DEF, ρ & conuertendo ut KG ad GL ita EF ad FD, sed ut L G ad GD ità DF ad FH, ut ostẽdimus; ergò σ ex æquali ut KG ad GD ità EF ad FH, τ est autẽ angulus EFH æqualis angulo KGD ob lineas parallelas E F, K G; ergo angulus E H F æqualis erit angulo KDG, siquidem est ut K G ad G D, ità E F ad F H, & angulus ad G æqualis est angulo ad F, undè reliqui anguli reliquis angulis æquales υ sunt ex sextà propositione Libri sexti; ergo recta KD rectæ EH erit parallela, quare angulus KDE, hoc est KED erit æqualis angulo DEH.

π ut in Resolutione visum est.
ρ 4 quinti.
σ 22. quinti.
τ 29. primi.
υ 6 sexti.

S C H O L I O N.

Hic porrò, quod superius etiam innuimus, aduertendum est resolutionem sistere ibi, ergo BL æquabitur DL *quod ità esse constat ex eo, quia K L parallela est ipsi D E, & D K æqualis est ipsi K E; propterea angulus B K L æqualis est angulo L K D, & quia B K est æqualis K D, & angulus BKL angulo DKL propterea BL æquabitur LD, vndè vides resolutionem progredi donec perueniat ad aliquod verum concessum, quod cum nos ratiocinando offendimus aliundè constare debet, ut hic cernis, aliàs non liceret eo assumpto compositionem contexere, etenim illud ex quæsito deduximus, quod in quæstione est positum, & nondum liquet, ità neque illud, quod tanquam verũ assumeremus; eo vsque igitur per resolutionis viam progrediendum est, donec aliquod occurrat, quod aliundè nobis verum esse perspectum sit. Ita quidem in superiori exemplo cùm resolutio perueneris ad illud, quod latera LB, LD, sint æqualia, necesse est ostendere id verùm esse, quod præstatur vt visum est. Hæc autem non erant silentio prætereunda, ne id reliquisse videremur intactum, quod magnoperè facit ad resolutionis naturam perfectè comparandam.*

Desumamus itidem aliud exemplum ex Pappo resolutionem tamen, quemadmodum compositionem nonnihil mutatis verbis afferemus cum is subobscurus videretur.

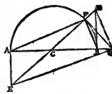
Libro 7. Propos. 157.

T H E O R E M A.

Exemplum IV.

Sit Semicirculus in rectà lineà AB, atque a punctis A, B, ipsi ACB ad rectos angulos agantur rectæ lineæ BD, AE, & ducatur utcunque D E, a puncto autem F ipsi D E ad rectos angulos agatur F G, quæ cum A B in puncto G conueniat. Dico rectangulum contentum A E, B D rectangulo AGB æquale esse.

Resolutio.



QVoniam igitur rectangulum contentum A E, B D æquale est rectangulo A G B, erit ut A E ad AG, ità B G ad B D per 16. sexti; sunt autem circà æquales angulos latera proportionalia, siquidem anguli ad A, B ponuntur recti; propterea triangulum AEG triangulo BGD æquiangulũ erit; a quãobrem angulus A G E erit æqualis angulo B D G; sed angulus quidem AGE æqualis est b angulo AFE, qui in eadem portione consistit; c angulus verò BDG rursus æqualis est, ipsi BFG, qui est in eadem portione; Cùm enim EAG, EFG recti sint, si circa diametrum E G describatur semicirculus, is transibit per puncta A, F, atque erit angulus AFE æqualis angulo AGE, qui in eàdem est portione; & similiter, cum anguli GBD, GFD sint recti, circulus circa diametrum GD descriptus per B, F transibit, d eruntque anguli BFG, BDG inter se æquales, ergo angulus AFE æqualis erit angulo BFG; quod quidem ità se habet; cùm enim angulus AFB rectus, sit æqualis recto EFG, dempto ab utrisque communi angulo E F B, erit reliquus AFE, reliquo BFG æqualis.

a 6. sexti.
b 21. tertij.
c 21. tertij. 31. tertij.
d 21. tertij.

Compositio.

α 31. tertij, & ex hypothesi.
β 3. axioma.

QVandoquidem uterq; angulorum AFB, EFG α est rectus, dempto communi angulo EFB β erit angulus AFE æqualis angulo BFG, sed angulo quidem AFE æqualis est

angu-

[y] angulus AGE, cùm in eadem portione consistant, angulo autem BFG eadem ratione æqualis est angulus BDG; angulus igitur AGE angulo BDG [d] est æqualis; atque est EAG rectus, æqualis recto GBD; quare & reliquus æqualis reliquo, & triangulum [e] triangulo simile erit. Vt igitur [ζ] EA ad AG, sic GB ad BD; & propterea rectangulum, quod continetur AE, BD, rectangulo AGB [n] est æquale.

y 31. & 21. tertij.
d 1. axioma.
e 32 tertij.
ζ 4. sexti.
n 16. sexti.

AVCTORIS EXEMPLA.

PRætermissis Veterum exemplis, quæ nostra sunt afferemus. Lubet autem primùm adducere Theorema, quod apud Archimedem reperitur in Assumptis, à nobis tamen longè aliter demonstratum; eius igitur Resolutio & Compositio à nobis contexitur ad eum, qui sequitur modum.

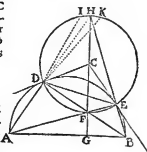
THEOREMA.

Exemplum V.

Si fuerit semicirculus super diametrum AB; & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, & E; iunctæque fuerint EA, DB, se mutuò secantes in F; & iuncta fuerit CF, & producatur ad G. Dico CG perpendicularem esse ipsi AB.

Præparatio.

SVpponatur ita esse; & intelligatur protracta GC ad partes C in infinitum, & BE ad partes E, donec occurrat ipsi GC protractæ in H; Intelligatur per puncta F,E,H, circulus descriptus, qui necessariò transibit etiam per D, vt paulò post demonstrabimus; gaaturque DE.



Resolutio.

QVoniam igitur angulus CGB, seu FGB est rectus; ergo [a] æquabitur angulo ADB; communis autem est angulus ad B vtrique triangulo ADB, & FGB; ergo angulus DAB [b] æquabitur angulo BFG; sed angulus DFC æqualis est [c] angulo BFG; ergo angulus DFC [d] æquabitur angulo DAB; [e] est autem angulus CDF æqualis angulo DAB; est enim DC tangens, & DB secans; ergo angulus DFC, seu DFH [f] æquabitur angulo CDF; sed angulus DFH æqualis [g] est angulis FHB, FBH; ergo angulus CDF æqualis est [h] duobus angulis FHB, FBH; sed angulus EDB, seu EDF æqualis est [i] angulo FHE; in eodem enim sunt circuli segmento; ergo angulus CDF [k] æquabitur duobus angulis EDB, & DBE: angulus verò CDF æqualis est duob. CDE, & EDF angulis; erit ob id angulus CDE; æqualis angulo DBE; nam totus angulus CDF æquatur suis partibus, nēpè angulis CDE, & EDF, æqualis est etiam demonstratus duobus angulis EDB, & DBE, vtrinq; ablato cõmuni angulo EDB; reliquus CDE [l] æquabitur reliquo DBE. Quod ita se [m] habet; siquidē CD tãgit circulum, & DE [n] secat eundem; angulus verò DBE, est in alterno circuli segmento.

a 11. axioma primi.
b 32. primi.
c 15. primi
d 1. axioma primi.
e 32. tertij.
f 1. axioma primi.
g 32 primi.
h 1. axioma primi.
i 21. tertij.
k 1. axioma.
l 3. axioma primi.
m 32. tertij.
n 31. tertij.

Lemma.

Quod autem, si fuerit circulus descriptus per FEH, transire debeat per punctum D; sic ostendo. *Quoniam enim angulus DFE æqualis est [a] angulis DAF, & ADF; sed angulo ADF, vtpotè recto, æquales sunt [b] anguli EAB, & EBA; ergo angulus DFE æquabitur [c] angulis DAE, EAB, et EBA, hoc est angulis DAB, & EBA; Sed angulus CDB æqualis est [d] angulo DAB, & angulus CEA æqualis est [e] angulo EBA; ergo anguli CDF, & CEF æquales sunt [f] angulo DFE, hoc est angulis DFC, CFE. Vel igitur angulus CDF æqualis est angulo CFD, vel non est æqualis. Si primum, habetur intentum; nam CD æquabitur [g] CF; sed CD æqualis est [h] CE; vtraque enim est tangens; ergo CD, CE, CF, erunt inter se æquales; ergo circulus transiens per puncta H, E, F, transibit [i] per D. Si non est æqualis, esto maior angulus CDF. Quoniam igitur quatuor sunt quantitates, quarum prima angulus CDF, secunda angulus CFD, tertia angulus CFE, quarta angulus CEF; aggregatum autem primæ, & quartæ æquale est aggregato secundæ, & tertiæ; si primæ; nempè*

a 32. primi.
b 32. primi.
c prim. ax. pr.
d 32. tertij.
e 32. tertij.
f prim. ax. primi.
g 6 primi.
h 36. tertij.
i 9. tertij.

angulus CDF fuerit maior secundâ, scilicet angulo CFD; etiam tertia, nempè angulus CFE, maior erit quartâ, videlicet angulo CEF; ergo latus CE maius erit [k] *latere CF; sed latus CE æquale est* [l] *lateri CD; ergo latus CD maius erit* [m] *latere CF; ergo angulus CFD maior erit* [n] *angulo CDF; sed supponebatur minor; ergo foret minor, & maior, quod est inconueniens. Non dissimiliter si angulus CDF supponeretur minor.*

k 19. primi. l 36 tertij. & 8. ax. primi. m prim. ax. primi. n 18 primi.

Angulos quantitates appello sensu supra explicato.

Compositio.

α 32. tertij. β 21. tertij. γ 32. primi. δ 1. axioma primi. ε 32. tertij. ζ 1. axioma. η 15. primi. θ 32. primi.

QVoniam igitur CD tangit circulum, & eundē secat DE; erit [α] angulus CDE æqualis angulo DBE; sed angulus CDF æqualis est duobus CDE, EDF; ergo angulus CDF æquabitur duobus angulis EDB, & DBE; sed EDB, seu EDF æqualis est [β] angulo FHE; in eodem enim sunt circuli segmento; ergo angulus CDF æqualis est duobus FBH, & FHB; sed his æqualis [γ] est externus DFH, seu DFC; ergo angulus DFC [δ] æquabitur angulo CDF, sed angulus CDF [ε] est æqualis angulo DAB; ergo āgulus CFD æqualis erit [ζ] angulo DAB; at verò angulus DFC [η] est æqualis angulo BFG; ergo angulus DAB æqualis erit angulo BFG; communis est autē angulus ad B; ergo reliquus FGB [θ] æquabitur angulo ADB; hic autem est rectus; ergo & FGB rectus erit.

ι 10. def. 1. κ 31. tertij. λ 12. axioma primi.

Hinc sequitur, quòd AD protracta debeat peruenire ad pūctū H, & hūc in modū cōfirmabitur. Si non peruenit ad H, vel suprà, vel infrà. Si suprà, vt ad punctum I; Quoniam igitur ADI est linea recta; estque angulus ADB rectus; ob id rectus erit ei [ι] deinceps angulus IDB, seu IDF; sed si à puncto D ad pūctum H recta ducatur, fiet [κ] angulus HDF rectus; cùm sit in semicirculo; ob id angulus HDF [λ] æquabitur angulo IDF, pars toti; quod est absurdum. Non dissimiliter ratiocinandum, si dicatur peruenire ad K; angulus enim KDB, rectus erit; siquidem ADK recta esse supponitur; angulus verò ADB rectus; ob id angulus deinceps illi KDB rectus quoque erit. Atsi supponatur ducta DH, vtique cum DF faciet angulum rectum: quare angulus KDB, seu KDF æquabitur angulo HDF, pars toti; quod est impossibile.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam angulus CGB, seu FGB, est rectus; ergo
Angulus FGB, æquabitur angulo ADB; sed
Angulus ad B, communis est vtrique triangulo ADB, FGB; ergo
Angulus DAB, æquabitur angulo BFG; sed
Angulus DFC æqualis est angulo BFG, ergo
Angulus DFC, æquabitur angulo DAB. sed
Angulus CDF, æqualis est angulo DAB, (est enim DC tangens & DB secans) ergo
Angulus DFC, seu DFH, æquabitur angulo CDF; sed
Angulus DFH æqualis est angulis FHB, FBH ergo.
Angulus CDF, æqualis erit duobus angulis FHB, FBH; sed
Angulus EDB, seu EDF, æqualis est angulo FHE; in eodem enim sunt circuli segmento; ergo
Angulus CDF, æquabitur duobus angulis EDB, DBE;
Angulus verò CDF, æqualis est duobus angulis CDE, & EDF, ergo

Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

Angulus CDE, æqualis erit angulo DBE; siquidem totus angulus CDF, æquatur suis partibus, nempè angulis CDE, & EDF; æqualis est etiam demonstratus duobus angulis EDB, & DBE; vtrinque ablato communi angulo EDB, reliquus CDE, æquabitur reliquo DBE. Quod ita se habet, &c.

Aduertendum autem omnem Analysin desinere in propositionem illatam, & hoc præ oculis habendum, non autem in assumptam; ità fit vt cùm ea fuerit ex antecedentibus deducta, & aliunde veritas eius comprobetur, statim Analysis sistat, nec vlteriori indigeat progressu, ac proinde tunc primùm liceat Analyseos repetendo vestigia, Synthesin ipsam perficere.

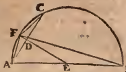
THEOREMA.

Exemplum VI.

Si super AB rectam ex centro E descriptus sit semicirculus ACB, & in eo aptata sit AC æqualis semidiametro, nempè AE, vel EB; sitque AC bifariam diuisa in D; & ex E ducta sit ED, quæ protracta perueniat ad peripheriam in F: ductæque sint BF, AF. Dico BF, EF, AF, esse in continua ratione.

Resolutio

Resolutio.



DVcatur CF. Quoniã igitur est, vt BF ad EF, ita EF ad AF; & est EF æqualis tàm EB, quàm AC; item CF æqualis est AF; ergo erit vt BF ad BE, ita AC ad CF; [a] sunt autem anguli ACF, ABF, seu EBF, inter se æquales, vtpote existentes in eodẽ circuli segmento; ergo æquiangula sunt triangula ACF, EBF; per sextam Sexti; Quod ita se habet; angulus enim FBE ęqualis [b] est angulo ACF, angulus verò CAF ęqualis [c] est angulo ACF, cùm triangulum ACF sit isoscele, & angulus EFB æqualis [d] est angulo EBF, cũ triangulum EBF sit isoscele; quare angulus EFB æquabitur [e] angulo FAC, & reliquus AFC [f] æquabitur reliquo BEF. Cæterùm triangulum EBF esse isoscele facilè constat; siquidem EF, EB ex centro E ad peripheriam terminantur. Triangulum AFC huiusmodi esse sic demonstratur. Quoniam enim ex centro E ducta est EF, quæ bifariã [g] diuidit AC, [h] faciet cum ipsa AC in puncto D angulos rectos; quare quadratum AF [i] æquabitur quadratis AD, DF, sed DC æqualis est ipsi AD, & DF est communis vtrique triangulo rectangulo ADF, CDF; ergo quadratum AF ęquabitur quadratis CD, DF; sed huiusmodi quadratis ęquale est [k] quadratum CF; ergo quadratum AF æquabitur quadrato CF; quare AF æquabitur CF.

a 21. tertij.
b 21 tertij.
c 5. primi.
d 5. primi.
e 1. axiomat. primi.
f 32. primi.
g 3. tertij.
h 3. tertij.
i 47. primi.
k 47. primi.

Compositio.

QVoniam igitur triangula ACF, & FBE æquiangula sunt; siquidem angulus FBE æqualis est angulo ACF; angulus verò CAF æqualis est angulo ACF, cùm triangulum ACF sit isoscele, & angulus EFB æqualis est angulo EBF, cùm triangulum EBF sit isoscele; quare angulus EFB æquabitur angulo FAC, ergo reliquus [α] æquabitur reliquo; atque adeò æquiangula erũt triãgula; propterea similia, vnde [β] erit, vt BF ad BE, seu EF, ita AC, seu EF ad CF, seu AF; sunt igitur BF, EF, AF in continua ratione.

α 32. primi.
β 4. sexti.

Conspectus Resolutionis, atq; Compositionis.

Quoniam igitur est vt BF, ad EF, ita EF, ad AF; estque EF, aequalis tàm EB, quàm AC; item CF, est aequalis AF; erit ergo
Vt BF, ad BE, ita AC ad CF. At verò
Anguli ACF, ABF, seu EBF, sunt inter se aequales, vtpotè existentes in eodem circuli segmento; ergo triangula ACF, & EBF, erunt aequiangula per 6. sexti.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

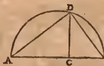
Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

THEOREMA.

Exemplum VII.

Si rectá linea extremâ, ac mediâ ratione secetur. Dico quadratum totius; rectangulum sub tota, & segmento maiori; rectangulum sub tota, & segmento minori in continua esse ratione.

Preparatio ad Resolutionem.



SIt recta AB secta in C extremã, ac mediã ratione; itã vt pars maior sit AC, pars minor CB. Dico vt est quadratum AB ad rectangulum BAC, ita esse rectangulum BAC ad rectangulum ABC. [a] Describatur semicirculus ADB super AB & ex puncto C [b] excitetur perpendicularis CD; [c] agantur que AD, BD.

a 3. pet prim.
b 11. primi.
c 1. pet primi.

Resolutio.

QVoniam igitur est, vt quadratum AB, ad rectangulum BAC, ita rectangulum BAC ad rectangulum ABC; est autem rectangulum BAC [d] æquale quadrato ex AD; rectangulum verò ABC æquale [e] est quadrato ex BD; propterea erit vt quadratum AB ad quadratum AD, ita quadratum AD ad quadratum BD; quare [f] vt AB ad AD, ita AD ad DB; sed [g] vt AB ad AD, ita AD ad AC; ergo AC, & BD erunt inter se æquales; atque adeò earum quadrata æqualia erunt. Quod ita se habet; nam rectangulum ABC æquale est quadrato AC, cùm AB sit in C diuisa extremã, ac mediã ratione; est autem idem

d Per corol. 8. sext. & 17. eiusdem.
e 17. sexti.
f 22. sexti.
g Per corol. 8. sexti.

idem rectangulum ABC æquale quadrato ex BD, cùm triangulum ABD sit rectangulum, & recta DC perpendicularis sit ipsi AB.

Compositio.

QVoniam igitur quadrata AC, BD æqualia sunt; rectangulum enim ABC æquale est quadrato ipsius AC; siquidem AB in C extremâ, ac mediâ ratione diuisa est, & idem rectangulum ABC æquale [a] est quadrato ex BD ob triangulũ ADB. &c. propterea AC, BD erunt inter se æquales; [b] est autem vt AB ad AD, ita AD ad AC; ergo erit vt AB ad AD, ita AD ad DB; ob id [γ] erit vt quadratũ AB ad quadratum AD, ita quadratum AD ad quadratum BD; [δ] est autem rectangulum ABC æquale quadrato BD; rectangulum verò BAC æquale quadrato AD; erit proinde vt quadratum ex AB ad rectangulum BAC, ita rectangulum BAC ad rectangulum ABC. Quod erat operæ pretium ostendere.

[a] Per Coroll. 8. sex. & 17. eiusdem. [b] Per Coroll. 8. sexti. [γ] 22. sexti. [δ] Per coroll. 8. sexti. & 17. eiusdem.

Non dissimili modo ac supra fiet conspectus resolutionis, & compositionis.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam est vt quadratum AB, ad rectangulum BAC, ita rectangulum BAC ad rectangulum ABC. Sed rectangulum BAC æquale est quadrato AD, & rectangulum ABC æquale est quadrato BD; propterea erit, vt quadratum AB ad quadratum AD, ita quadratum AD, ad quadratum BD; quare

Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

Vt AB ad AD, ita AD, ad DB; sed

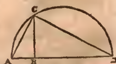
Vt AB ad AD, ita AD ad AC; ergo AC, & BD erunt inter se æquales; ergo earum quadrata æqualia erunt. Quod ita se habet, &c.

THEOREMA.

Exemplum VIII.

Si fuerint tres quantitates proportionales, aggregatum quadratorum ex media, & maiori extrema ad rectangulum sub ijsdem contentum rationem habet vt aggregatum extremarum ad mediam.

Resolutio.



SInt tres proportionales AB, BC, BD, & earum extremæ sint AB, BD, è quibus maior sit BD. Disponantur in directum, vt constituant rectam AD; ex puncto B [*] erecta sit perpendicularis media BC, [a] erunt quidem A, C, D puncta in circulo, actis igitur AC, DC; consideretur triangulum ACD, item & BCD. Quoniam igitur aggregatum quadratorum à media, & maiori extrema ad rectangulum sub ijsdem contentum rationem habet, vt extremarum aggregatum ad mediam; est autem AD aggregatum extremarum AB, BD, media verò BC, rectangulum autem sub media, maiorique extrema continetur sub BC, & BD, quarum quadratis æquale [b] est quadratum CD; igitur est vt AD, ad BC, ita quadratum CD ad rectangulum sub BC, & BD; [c] est autem rectangulum ADB ad rectangulum sub BC, & BD, in eadem ratione vt AD ad BC, propter communem altitudinem BD; ergo rectangulum ADB [d] æquabitur quadrato CD; quamobrem [e] erit, vt AD ad CD, ita CD ad DB; est autem angulus ad punctum D communis vtrique triangulo; propterea triangulum ADC æquiangulum [f] erit, & simile triangulo CDB. Quod ita se habet, vt constat ex Elementis.

[*] 11 primi. [a] ex Elementis. [b] 47. primi. [c] 1. sexti. [d] 9. quinti. [e] 17. quinti. [f] 6. sexti.

Compositio.

QVoniam igitur triangulum ADC æquiangulo est triangulũ CDB, eidemque simile; propterea [a] erit vt AD ad CD, ita CD ad DB, ergo rectangulum ADB [b] æquabitur quadrato CD, [γ] est autem rectangulum ADB ad rectangulum sub BC, & BD in eadem ratione, in qua est AD ad BC, propter communem altitudinem BD, ergo erit [δ] vt AD ad BC, ita quadratum CD ad rectangulum sub BC, & BD, sed quadratum CD æquale [ε] est quadratis ipsarum BD, & BC, nempè maioris extremæ, & mediæ; rectangulum verò sub BC, & BD sub ijsdem continetur; estque AD aggregatum extremarum AB, BD, media verò est BC; ergo aggregatum quadratorum à media, & maiori extrema ad rectangulum sub ijsdem contentum rationem habet, vt aggregatum extremarum ad mediam.

[a] 4. sexti. [b] 17. sexti. [γ] 1. sexti. [δ] 9. quinti. [ε] 47. primi.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

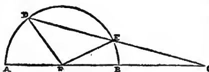
Quoniam igitur aggregatum quadratorum, &c. *Initium Resolutionis, & finis Compositionis.*
Est autem AD aggregatum extremarum A B, B D, media verò B C; Rectangulum autem sub media, & maiori extrema, continetur sub B C, BD, quarum quadratis est aquale quadratum CD, igitur est
Vt AD ad BC ita quadratum CD ad rectangulum sub BC & BD.
Rectangulum autem AD B ad rectangulum sub B C & B D est in eadem ratione vt A D, ad BC ob communem altitudinem BD ergo
Rectangulum ADB, aquabitur quadrato CD. erit ergo
Vt A D ad C D ita C D ad D B.
At verò angulus ad punctum D, communis est vtrique triangulo; ergo *Finis Resolutionis, & initium Compositionis.*
Triangulum ADC, aquiangulum erit, ac simile triangulo CDB. Quod ita se habet, &c.

T H E O R E M A.

Sit semicirculus in recta AB, ita ut sit protracta hac ad quodcunq; punctum C, & ab eo ducta sit CD, occurrens conuexo peripheria in E. Dico Arcum AD maiorem esse arcu BE. Exemplum IX.

Resolutio.

Sit centrum F, & agantur rectæ FD, FE.



QVoniam igitur arcus A D maior est arcu BE, a erit angulus AFD, maior angulo B F E, sed angulus AFD æqualis b est angulis FDC, & FCD; ergo anguli FDC, FCD maiores erunt angulo E FC, at verò angulus FDC seu FDE æqualis c est angulo DEF; ergo angulus DEF vna cum angulo E C F maior erit angulo EFC. Quod ita se habet; angulus enim solus DEF maior est d angulo EFC; ob id multò maior erit idem D E F, vnà cum ECF, multo maior inquam erit ipso EFC.

a ex Elementis. b 32. primi. c 5. primi. d 16 primi.

Compositio.

QVoniam angulus ECF vna cum angulo DEF maior α est angulo CFE; angulus verò F D E æqualis β est angulo FED; ergo angulus F D E, seu F D C vna cum angulo DCF maior erit angulo C F E; sed angulis FDC, & DCF æqualis γ est angulus A F D; ergo angulus A F D maior est angulo C F E, seu B F E; ergo arcus A D, cui insistit angulus AFD maior δ erit arcu BE, cui insistit angulus BFE. Quod oportebat ostēdere.

α 16. primi. β 5. primi. γ 32. primi. δ ex Elementis.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

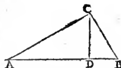
Quoniam igitur arcus A D, maior est arcu B E. ergo *Initium Resolutionis, atque finis Compositionis.*
Angulus A F D, maior erit angulo B F E, sed
Angulus AFD, aqualis est angulis FDC, & FCD, ergo
Anguli FDC, & F C D, maiores erunt angulo EFC, at verò *Finis Resolutionis & initium Compositionis.*
Angulus FDC, seu FDE, aqualis est angulo DEF. ergo
Angulus DEF, vna cum angulo ECF, maior erit angulo EFC. Quod ita se habet, &c.

T H E O R E M A.

In omni triangulo rectangulo ut est hypothenusa ad aggregatum laterum ambientium angulum rectum, ita hoc aggregatum ad aggregatum ex hypothenusa & duplo catheto. Exemplum X.

Sit

Sit triangulum rectangulum A C B, cuius hypothemusa A B, latera verò circa angulum rectum sint AC, BC; cathetus verò CD; Dico, ut est A B ad aggregata ex A C, & B C, ita esse huiusmodi aggregatum ad aggregatum ex A B, & dupla DC.



Resolutio.

Quoniam igitur est, ut AB ad aggregatum ex AC, & B C, ita huiusmodi aggregatum ad aggregatum ex AB, & dupla D C propterea rectangulum sub AB & sub composita ex AB, & dupla DC æquabitur quadrato aggregati ex AC,& BC.Sed rectangulum ab A B in aggregatum ex AB, & dupla DC æquale est quadrato ex AB, vna cum rectangulo sub A B & dupla DC; ergo quadratum aggregati ex A C, & B C æquabitur quadrato ipsius A B, vnà cum rectangulo sub AB, & dupla DC, hoc est quadratis ex AC, & BC vnà cum rectangulo sub AB & dupla DC, hoc est vnà cum rectangulo duplo sub AB, & C D, seu sub A C, BC duplo, (vt simplum enim rectangulum sub A B, & DC æquale est simplo sub A C, & BC, ita duplum æquale est duplo) id autem ita se habet per quartam secundi.

a 16. sexti.

Compositio.

Quoniam igitur si intelligatur BC in directum posita ipsi AC, fit recta quædam diuisa in C utcumque; propterea per quartam secundi, quadratum huiusmodi aggregati æquale est quadratis A C, B C, plus duplo rectangulo sub A C, & B C; at verò duplum rectangulum sub A C & B C, æquale est rectangulo duplo sub A B & DC, idem est enim rectangulum sub AC & BC, ac est rectangulum sub AB & CD; quare duplum æquatur duplo, seu quod idem est rectangulum duplum sub AC & BC æquatur rectangulo sub AB,& dupla CD; ergo quadratum compositæ, seu aggregati ex AC,& BC æquabitur quadratis AC, BC, hoc est quadrato A B, & rectangulo sub A B, & dupla C D sed quadrato AB vna cum rectangulo sub AB & dupla CD æquatur rectangulum sub AB, & sub aggregato ex AB, & dupla CD, ergo quadratum aggregati ex AC, & BC æquale est rectangulo sub AB, & composita ex AB, & dupla CD; quamobrem erit; vt A B ad aggregatum ex A C, B C, ita huiusmodi aggregatum ad aggregatum ex AB & dupla CD. Quod erat operæ pretium demonstrare.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam igitur vt AB ad aggregatum ex AC, & B C, ita huiusmodi aggregatum ad aggregatum ex AB, & dupla DC; propterea

Rectangulum sub A B, & sub composita ex AB, & dupla DC, æquabitur quadrato aggregati ex A C, & BC. Sed

Rectangulum sub A B in aggregatum ex A B & dupla C D æquale est quadrato ex A B, vnà cum rectangulo sub A B, & dupla C D; ergo

Quadratum aggregati ex A C & B C æquabitur quadrato ipsius A B, vna cum rectangulo sub A B & dupla C D, hoc est quadratis ex A C & B C, vnà cum rectangulo sub A B & dupla CD.

Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

Hoc est vnà cum rectangulo duplo sub A B, & C D, seu sub A C, B C duplo, &c.

THEOREMA.

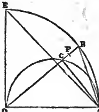
Exemplum XL.

In quadrante D E A, & semicirculo D C A, sit ducta vbilibet D C B, & D B ad B F, sit in duplicata ratione arcus E B A, ad arcum A B. Dico punctum F, cadere vltra punctum C versus B.

Intelligantur ductæ AE, AB, AC.

Reso-

Resolutio.



QVoniam igitur punctum F cadit ultra C. versus B; erit FB, minor quàm CB; quare D B ad B F, maiorē habebit [a] rationem, quàm ad CB, sed ex hypothesi D B, ad F B, est in duplicata ratione, arcus EBA, ad arcum B A, propterea duplicata ratio arcus E B A, ad arcum B A, maior est, quàm ratio D B ad C B; sed ut D B, ad C B ità rectangulum [b] sub dupla D B,& DB, ad rectangulum sub eadem dupla D B, & B C, ob communem altitudinem scilicet, quæ est dupla DB;hoc est [c] ita duplum quadratum D B, seu D A, hoc est quadratum E A, ad quadratum A B; est enim dupla D B, diameter circuli, cuius centrum D, & ad ipsam cadit [d] perpendicularis A C, estque A B, accommodata in circulo; proinde ratio duplicata arcus EBA,ad arcum AB, maior erit ratione quadrati EA, ad quadratum AB; ergo maior erit duplicata ratione rectæ E A, ad rectam A B, quare simplex ratio arcus EBA, ad arcum AB maior erit ratione EA ad A B;Quod quidem ita se habet, arcus enim ad arcum maiorem habet rationem, quàm chorda, ad chordam, &c.

a 8 quinti.
b 1. sexti, & coroll. 8 sexti.
c 47 primi.
d 31. tertij.

Compositio.

QVoniã simplex ratio arcus EBA, ad arcum BA, maior est ratione chordæ EA, ad cordam B A, ergo ratio duplicata arcus ad arcum maior est ratione duplicata chordæ ad chordam; ergo ratio duplicata arcus E B A, ad arcum B A, maior erit [α] ratione quadrati rectæ EA, ad quadratum rectæ AB, hoc est [β] dupli quadrati D A, seu D B, ad quadratum A B, hoc est rectanguli sub dupla D B, & D B, ad rectangulum [γ] sub eadem dupla DB, & BC, cùm DB, dupla, sit diameter circuli, cuius centrum D, & A C cadat perpendicularis ad illam, sitque AB,accomodata in circulo,sed vt rectangulũ sub dupla DB & D B,ad rectangulum sub eadem dupla DB,& BC,ita est DB ad BC ob communem altitudinem scilicet, quæ est dupla D B; ergo ratio duplicata arcus E B A, ad arcum B A, maior erit ratione DB, ad B C, sed ratio D B ad B F; ex hypothesi est duplicata arcus E B A, ad arcum B A, ergo ratio DB, ad BF, maior erit ratione DB, ad BC, ergo B F, minor est,quàm B C; quare punctum F, cadit vltra C versus B Quod opportebat ostendere.

α Coroll. 20. sexti.
β 47. primi.
γ Coroll. 8. sexti.

Superius Theorema mihi resoluendum fuit propositum a P. Stephano de Angelis Geometra præstantissimo.

Conspectus Resolutionis atque Compositionis.

Quoniam igitur punctum F cadit vltra C versus B; ergo
F B minor erit quàm CB: ergo
D B ad BF maiorem habebit rationem quàm ad CB, sed ex hypothesi
DB ad FB est in duplicata ratione arcus EBA ad arcum B A; propterea
Duplicata ratio arcus EBA ad arcum BA maior erit, quàm ratio DB ad CB, sed
Vt DB ad CB, ita rectangulum sub dupla D B, & D B ad rectangulum sub eadem dupla D B, & BC, ob communem altitudinem scilicet qua est dupla D B.
Hoc est ita duplum quadratum DB, seu D A,
Hoc est quadratum EA ad quadratum AB; est enim dupla D B, diameter circuli, cuius centrum D, & ad ipsam cadit perpendicularis AC, estque A B accommodata in circulo; ergo
Duplicata ratio arcus E B A ad arcum A B, maior erit ratione quadrati EA ad quadratum A B; ergo
Duplicata ratio arcus EBA ad arcũ AB. Maior erit duplicata ratione rectæ EA ad rectã AB; ergo
Simplex ratio arcus EBA ad arcum AB maior erit ratione EA ad AB. Quod ita se habet, &c.

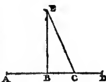
Initium Resolutionis, & finis Compositionis.
Finis Resolutionis & initium Compositionis.

THEOREMA.

Exemplum XII.

Sit BE perpendecularis rectæ BD, quæ bifariam secta sit in C, & protracta ad partes B in A, vt CA æqualis sit CE. Dico esse AB ad BE, vt B E ad A D.

Resolutio.



a 17. sexti.
b 1. axioma primi.
c 47. primi.
d 6. secundi.

QVoniam igitur est vt A B ad B E, ita BE ad A D, ergo rectangulum D A B æquabitur [a] quadrato B E, addito communi quadrato B C, ergo rectangulum D A B, vna cum quadrato B C æquabitur [b] quadrato B E, vna cum quadrato B C, sed quadratum B E, vna cum quadrato B C æquale est quadrato C E, ergo rectangulum D A B, vna cum quadrato B C æquabitur quadrato C E, sed quadratum C E æquale est [c] quadrato A C, siquidem A C facta est æqualis CE, ergo rectangulum DAB, vna cum quadrato BC æquabitur quadrato AC. Quod ita se habet; [d] est enim BD bifariam diuisa in C, & ei addita A B, vnde rectangulum D A B vna cum quadrato BC, per sextam secundi Elem. æquabitur quadrato A C.

Compositio.

a 6. secundi.
β 1. axioma primi.
γ 47. primi.
δ 3. axioma primi.
ε 17. sexti.

QVoniam igitur rectangulum D A B, vnà cum quadrato B C æquale est α quadrato A C, est autem quadratum A C æquale quadrato E C, siquidem A C supponitur æqualis E C, ergo rectangulum DAB, vna cum quadrato BC æquabitur β quadrato E C, sed quadratum E C æquale est γ quadratis E B, B C, ergo rectangulum DAB, vnà cum quadrato B C æquabitur quadrato E B plus quadrato B C, ablato communi quadrato BC, ergo reliquum rectangulum D A B æquabitur δ reliquo quadrato E B; quamobrem erit ε vt A B ad E B, ita E B ad AD, Quod initio propositum erat ostendendum.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam igitur est ut A B ad B E, ita B E ad A D; ergo
Rectangulum D A B æquabitur quadrato B E,
Addito communi quadrato B C; ergo
Rectangulum D A B, vna cum quadrato BC æquabitur quadrato B E, vnà cum quadrato B C, sed
Quadratum B E, vna cum quadrato BC æquale est quadrato CE; ergo
Rectangulum D A B vna cum quadrato B C æquabitur quadrato C E, sed
Quadratum C E æquale est quadrato AC, siquidem AC facta est æqualis CE; ergo
Rectangulum DAB vna cum quadrato B C, æquabitur quadrato A C. Quod ita se habet, &c.

Finis Resolutionis & initium Compositionis.

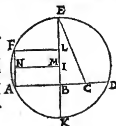
THEOREMA.

Exemplum XIII.

Ijsdem positis.

Si per puncta A, E, D, transeat circuli peripharia, & ex puncto A erecta sit perpendicularis AF occurrens peripheria in F. Dico quatuor rectas AF, AB, BE, AD esse proportionales in continua ratione.

Præparatio.



a 12. primi.
b 2. pet. primi.
c 1. petitio.
d 31. primi.
e 3. tertij.
f 34. primi.
g 3. axioma.

EX circuli centro M cadat a M N perpendicularis ipsi A F, & protrahatur b ad partes M donec in puncto I occurrat rectæ E B, quæ protrahatur c ad partes B donec occurrat periphæriæ in K, agatur d autem FL parallela ipsi NI. Manifestum est e ex Elem. N F, & N A esse inter se æquales, quibus, cùm æquales f sint I L, I B, etiam I L, I B inter se æquales esse, quibus sublatis ex æqualibus IE, IK, remanere g æquales LE, BK.

Resolutio.

a 17. sexti.
b 34. primi.

QVoniam igitur AF, AB, BE, AD sunt proportionales in continua ratione, erit quidem AB media [a] proportionalis inter A F, & B E, quare quadratum A B, æquabitur rectangulo sub A F, & B E hoc est rectangulo E B L, est [b] enim BL

BL æqualis AF,) additis æqualibus [c] rectangulis ABD, & KBE, seu BEL, (est [d] enim EL æqualis BK) ergo quadratum AB, vnà cum rectangulo ABD æquabitur [e] rectangulo EBL plus rectangulo BEL, sed quadratum AB plus rectangulo ABD æquale est rectangulo DAB, & rectangulum EBL plus rectangulo BEL, æquale est [f] quadrato BE; ergo rectangulum DAB æquabitur [g] quadrato BE, quare addito communi quadrato BC, rectangulum DAB plus quadrato BC æquabitur [h] quadrato BE, vna cùm quadrato BC, sed rectangulum DAB plus quadrato BC æquatur [i] quadrato AC, & quadratum BE plus quadrato BC æquatur [k] quadrato EC; ergo quadratum AC æquabitur [l] quadrato EC; ergo AC æquabitur EC, Quod ita se habet ex constructione.

c 35. tertij. d 1. axioma primi. e 2. axioma 1. f 2. secundi. g 1. axioma primi. h 3. axioma primi. i 6. secundi. k 47. primi. l 1. axioma primi.

Compositio.

QVoniam igitur AC æqualis est EC, ergo quadratum AC æquabitur quadrato EC, sed quadratum AC æquale est [α] rectangulo DAB vna cum quadrato BC, & quadratum EC æquale est [β] quadrato BE vna cum quadrato BC; ergo rectangulum DAB plus quadrato BC æquabitur [γ] quadrato EB plus quadrato BC; ablato communi quadrato BC; ergo rectangulum DAB æquabitur [δ] quadrato BE; sed rectangulo DAB æquale est quadratum AB, vna cum rectangulo ABD, & quadratum BE æquale est [ε] rectangulo EBL plus rectangulo BEL; ergo quadratum AB plus rectangulo ABD æquabitur [ζ] rectangulo BEL seu KBE plus rectangulo EBL, seù sub BE, & AF; sunt [η] autem rectangula ABD, & KBE inter se æqualia, sublatis igitur æqualibus rectangulis ABD, KBE, reliquum quadratum AB æquabitur [θ] reliquo rectangulo sub AF, & BE. Quare [ι] vt AF ad AB, ita AB ad BE; erat autem, ut AB ad BE, ità BE ad AD, ergo AF, AB, BE, AD, sunt quatuor quantitates in continua ratione, Quod initio propositum erat ostendere.

α 6. secundi. β 47. primi. γ 1. axioma primi. δ 3. axioma primi. ε 2. secundi. ζ 1. axioma. η 35. tertij. θ 2. axiom. 1. ι 17. sexti.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Quoniam igitur AF, AB, BE, AD, sunt proportionales in continua ratione; ergo
AB media proportionalis erit inter AF, & BE; quare
Quadratum AB æquabitur rectangulo sub AF, & BE, hoc est rectangulo EBL (est enim BL æqualis AF)
Additis æqualibus rectangulis ABD, & KBE, seu BEL (est enim EL æqualis BK;) ergo
Quadratum AB, vnà cum rectangulo ABD æquabitur rectangulo EBL, plus rectangulo BEL; sed
Quadratum AB, plus rectangulo ABD æquale est rectangulo DAB.
Et rectangulum EBL. plus rectangulo BEL æquale est quadrato BE; ergo
Rectangulum DAB æquabitur quadrato BE; quare
Addito communi quadrato BC
Rectangulum DAB plus quadrato BC æquabitur quadrato BE vnà cum quadrato BC, sed
Rectangulum DAB plus quadrato BC æquatur quadrato AC.
Et quadratum BE plus quadrato BC, æquatur quadrato EC; ergo
Quadratum AC æquabitur quadrato EC; ergo
AC æquabitur EC. Quod ita se habet, &c.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis. — Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

T H E O R E M A.

Exemplum XIV.

Si sit quædam recta AE diuisa in punctis, B, C, D, ea lege vt AB ad CD sit in ratione FH ad FG, & BD ad BE sit in ratione GH ad FH.
Dico AE ad CE in ratione esse, vt FH, ad FG.

Resolutio.

QVoniam igitur est ut FH ad FG, ita AE ad CE, ut verò FH ad FG, ita supponitur AB ad CD; ergo vt [a] AB ad CD, ita AE ad CE. & permutando [b] & conuertendo, ut AE ad AB ita CE ad CD, & diuidendo [c] vt BE

A B C D E
F G H
L a ad

a 11. quinti. b 16. & corol. 4. quinti. c 18. quinti.

d 4. quinti. e 46. quinti. f 11. quinti. g coroll. 19. quinti. h coroll. 4. quinti.

ad AB, ita DE ad CD, & [d] conuertendo, vt AB ad BE[e] ita CD ad DE, & permutando [e] vt AB ad CD, ita BE ad DE; sed ut A B ad C D ita F H ad F G; ergo [f] ut FH ad F G, ita BE ad DE, & per conuersionem [g] rationis, ut FH ad GH, ita BE ad BD, & inuertendo [h] ut GH ad F H, ita B D ad B E. Et ita est; hunc enim in modum suoponitur linea diuisa ex constructione.

Compositio.

α coroll. 4. 5. β coroll. 19. quinti. γ 8. quinti. δ 16 quinti. ε corollar. 4. quinti. ζ 17. quinti. η corollar. 4. quinti. θ 11 quinti.

QVoniam igitur supponitur diuisa A E ea ratione, vt sit B D ad B E, quemadmodum GH ad FH, erit [α] conuertendo vt FH ad G H, ita BE ad B D, & per conuersionem [β] rationis, vt FH ad FG, ita BE ad DE; est autem ut A B ad C D, ita F H ad F G ex hypothesi; ergo [γ] vt AB ad CD, ita BE ad D E; & permutando [δ] ut A B ad B E, ita C D ad D E, & [ε] conuertendo vt B E ad A B, ita D E ad C D, & [ζ] componendo vt A E ad A B, ita C E ad C D, & conuertendo [η] & permutando, vt A B ad C D, ita A E ad CE; est autem ex hypothesi vt F H ad F G, ita A B ad C D; ergo [θ] vt F H ad F G, ita A E ad C E. Quod erat operæ pretium ostendere.

SCHOLION.

QVando sunt consequentiæ numero multæ præstat hunc in modum resolutionis conspectum adhibere, in quo descendendo resoluimus & ascendendo componimus, vt superius etiam obseruauimus.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam igitur est, vt F H ad F G, ita A E ad C E, &
Vt F H ad F G, ita A B ad C D, ergo
Vt A E ad C D, ita A E ad C E, permutando & conuertendo
Vt A E ad A B, ita C E ad C D, & diuidendo
Vt B E ad A B, ita D E ad C D, & conuertendo
Vt A B ad B E, ita C D ad D E, & permutando
Vt A B ad C D, ita B E ad D E, sed
Vt A B ad C D, ita F H ad F G, ergo
Vt F H ad F G, ita B E ad D E, & per conuersionem rationis
Vt F H ad G H, ita B E ad B D, & conuertendo
Vt G H ad F H, ita B D ad B E. Et ita est cùm hunc in modum
Linea A E supponeretur diuisa ex constructione.

Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

THEOREMA.

Exemplum XV.

Si sit recta A F diuisa in partes A B, B C, C D, D E, E F, ita ut A B sit aqualis E F, sit autem ut F C, ad C E, ita A C, ad C D, & ut G H media proportionalis inter B C, C E, ad C E, ita C D ad G I. Dico esse G H, C E, C D, G I quatuor discretè proportionales, ita vt H I differentia extremarum ad D E differentiam mediarum, rationem habeat, vt AB vel EF ad G H.

Resolutio.

G H I

A B C D E F

a 16. sexti. b 1. axioma primi. c 1. secundi. d 1. Axioma primi.

QVoniam G H, C E, C D, G I, sunt quatuor discretè proportionales, ita ut IH differentia extremarum G H, & G I, ad D E differentiam mediarum CE, CD sit, vt FE ad GH; ergo rectangulum IHG æquabitur [a] rectangulo FED, communi addito rectangulo sub FE, CD; ergo rectangulũ IHG plus rectangulo sub FE, CD, æquabitur [b] rectangulo FED plus rectangulo sub FE, CD, sed rectangulum FED plus rectãgulo sub F E, C D, ex Elementis, æquale est [c] rectangulo F E C; ergo rectangulum I H G plus rectangulo sub F E, C D, æquabitur rectangulo F E C, vtrinque addito communi rectangulo B C E; ergo rectangulum B C E plus rectangulo I H G, plus rectangulo sub F E, C D æquabitur [d] rectangulo F E C plus rectangulo B C E; sed rectangulo B C E æquale est

eſt [e] quadratum GH, & quadrato GH plus rectangulo IHG æquale eſt [f] rectangulum IGH; ergo per ſubſtitutionem æqualium rectangulum IGH plus rectangulo ſub FE, CD æquabitur rectangulo FEC, plus rectangulo BCE, ſed quia AB, & EF, ſunt æquales; vnde rectangulum FEC plus rectangulo BCE æquatur rectangulo ACE, ob id per ſubſtitutionẽ æqualis, rectangulum IGH, plus rectangulo ſub FE, CD, æquabitur rectangulo ACE, vtrinque addito rectangulo DCE, fiet [g] rectangulum IGH plus rectangulo D C E, vnà cum rectangulo ſub FE, CD, æquale rectangulo DCE vna cum rectangulo ACE; eſt autem ex Elemẽtis [h] rectangulum F C D æquale rectangulo D C E plus rectangulo ſub FE, CD, facta ſubſtitutione rectanguli F C D in locum rectanguli D C E plus rectangulo ſub F E, C D, rectangulum I G H plus rectangulo F C D, æquabitur rectangulo D C E plus rectangulo A C E. Et quoniam ex hypotheſi eſt, vt G H ad C E, ita C D ad G I, erit [i] rectangulum I G H æquale rectangulo D C E; erat autem rectangulum I G H plus rectangulo F C D, æquale rectangulo D C E plus rectangulo A C E; ergo rectangulum F C D æquabitur rectangulo A C E, hoc eſt rectangulum ſub F C, C D æquabitur rectangulo ſub A C, C E; quamobrem erit, vt F C ad C E, ita A C ad C D. Quod ita ſe habet; ſuppoſuimus enim lineam hunc in modum eſſe diuiſam.

[e] 8. ſexti. & 17. eiuſdem. [f] 3. ſecundi. [g] 2. axioma primi. [h] 1. ſecundi. [i] 16 ſexti.

Compoſitio.

QVoniam G H eſt media inter B C, C E, propterea rectangulum B C E æquabitur [α] quadrato G H; Deinde cùm ſit, ut F C, ad C E, ita A C ad C D, erit [β] rectangulum ſub extremis C D, & F C, æquale rectangulo ſub medijs C E, & A C, hoc eſt rectangulum F C D æquabitur rectangulo A C E. Et quoniam etiam eſt, vt G H ad C E, ita C D ad G I, erit [γ] rectangulum I G H æquale rectangulo D C E; quamobrem rectangulum I G H vnà cum rectangulo F C D æquabitur [δ] rectangulo D C E, vnà cum rectangulo A C E; vtrinque ſublato communi rectangulo D C E; (eſt enim, vt conſtat [ε] ex Elementis, rectangulum F C D æquale rectangulo D C E vnà cum rectangulo ſub F E, & C D). Quibus ſubſtitutis in locum rectanguli F C D fiet rectangulum I G H plus rectangulo D C E plus rectangulo ſub F E, & C D, æquale rectangulo D C E vnà cum rectangulo A C E, vtrinque (inquam) ſublato rectangulo D C E remanebit [ζ] rectangulum I G H plus rectangulo ſub F E, C D, æquale rectangulo A C E; ſed quia A B, & E F, ſunt æquales, propterea rectangulum F E C plus rectangulo B C E æquabitur rectangulo A C E; huius igitur loco ijs ſubſtitutis fiet rectangulum I G H plus rectangulo ſub F E, C D æquale rectangulo F E C plus rectangulo B C E. At verò rectangulum I G H æquale eſt [η] quadrato G H vnà cum rectangulo I H G, rectangulum verò B C E æquale eſt [θ] quadrato G H, per ſubſtitutionem æqualium, fiet rectangulum B C E plus rectangulo I H G, vnà cum rectangulo ſub F E, C D æquale rectangulo F E C plus rectangulo B C E; vtrinque ſublato communi rectangulo B C E, remanebit [ι] rectangulum I H G plus rectangulo ſub FE, C D æquale rectangulo F E C, ſed rectangulum FEC per Elementa æquale eſt [κ] rectangulo ſub F E, C D, vnà cum rectangulo F E D, ergo rectangulum I H G plus rectangulo ſub F E, C D, æquabitur rectangulo F E D, plus rectangulo ſub F E, C D ablato communi rectangulo ſub F E & C D, reliquum rectangulum I H G æquabitur [λ] reliquo F E D. quamobrem [μ] vt I H ad D E, ita F E ad G H; ſed I H eſt differentia extremarum G H, & G I, & inſuper D E eſt differentia mediarum C E, C D, ſuntque lineæ ipſæ G H, C E, C D, G I proportionales diſcretè. Id autem oportebat oſtendere.

[α] 17. ſexti. [β] 16. ſexti. [γ] 16. ſexti. [δ] 2. axioma primi. [ε] 1. ſecundi. [ζ] 3. axioma primi. [η] 3 ſecundi. [θ] 14 ſexti. [ι] 3. axioma primi. [κ] 1. ſecundi. [λ] 3. axioma primi. [μ] 16. ſexti.

Conſpectus Reſolutionis, atque Compoſitionis.

Quoniam igitur I H eſt differentia extremarum G H, G I, atque
D E, eſt differentia mediarum C E, C D, ſuntque quatuor diſcretè proportionales, G H, C E, C D, G I. vtque I H ad D E, ita eſt A B vel F E ad G H. ergo
Rectangulum I H G æquabitur rectangulo F E D. addito communi rectangulo ſub F E, CD.
Rectangulum I H G, vna cum rectangulo ſub F E, C D, æquabitur
Rectangulo F E D plus rectangulo ſub F E, CD. ſed
Rectangulum F E C, per Elementa æquale eſt rectangulo ſub F E, C D vna cum rectangulo F E D. ergo
Re-

Initium Reſolutionis, & finis Compoſitionis.

Rectangulum IHG, plus rectangulo sub FE, CD, æquabitur rectangulo FEC. vtrinque addito communi rectangulo BCE; ergo

Rectangulum BCE plus rectangulo IHG vna cum rectangulo sub FE, CD, æquabitur rectangulo FEC, plus rectangulo BCE

Rectangulum verò BCE, æquale est quadrato GH, & quadrato GH plus rectangulo IHG æquale est rectangulum IGH; ergo per substitutionem æqualium:

Rectangulum IGH plus rectangulo sub FE, CD æquabitur rectangulo FEC, vna cum rectangulo BCE; sed quia AB, & EF, sunt æquales.

Rectangulum FEC, plus rectangulo BCE, æquale est rectangulo ACE; propterea eorum loco hoc substituto.

Rectangulum IGH, vna cum rectangulo sub FE, CD æquabitur rectangulo ACE.

Vtrinque addito rectangulo DCE, fiet

Rectangulum IGH, vna cum rectangulo DCE, plus rectangulo sub FE, CD, æquale rectangulo DCE, plus rectangulo ACE.

Est autem ex Elementis rectangulum FCD, æquale rectangulo DCE, plus rectangulo sub FE, CD, hoc substituto in locum rectanguli DCE, plus rectangulo sub FE, CD, fiet

Rectangulum IGH plus rectangulo FCD, æquale rectangulo DCE, plus rectangulo ACE,

At vero ex hypothesi ut GH ad CE, ita CD ad GI, ergo

Rectangulum IGH æquabitur rectangulo DCE.

Erat autem rectangulum IGH plus rectangulo FCD æquale rectangulo DCE, plus rectangulo ACE, ergo

Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

Rectangulum FCD æquabitur rectangulo ACE, hoc est

Rectangulum sub FC, CD æquabitur rectangulo sub AC, CE ergo

Vt FC ad CE, ita AC ad CD. Quod ita se habet ex hypothesi, &c.

T H E O R E M A.

Exemplum XVI.

Sit circulus DBFG, cuius diameter DG diuisa sit in puncto C, vnde sit erecta perpendicularis CF, diameter vero GD producta sit ad partes D, vsque ad A, ita vt rectangulum GAD sit æquale quadrato CF; per puncta verò A, & C descripto semicirculo AEC, itemque DIC, & circumferentia AKH sumpta DH æquali ipsi AD, erectisque HI, DE, atque ductis CI, AE.

Dico esse, vt AE ad CF, ita CI ad CD.

Resolutio.

a 17. quinti.
b 22. sexti.
c 16 quinti.
d Corollar. 8. sexti, & 17. eiusdem.
e Coroll. 8. & 17. eiusdem.
f 16. quinti.
g 16. tertij.
h 7. quinti.
i 1. sexti.
k 1. sexti.
l 16. quinti.
m 19. quinti.
n 16. sexti.
o 8. sexti, & 17. eiusdem.

QVoniam igitur est, ut AE ad CF, ita CI ad CD; est autem ut CI ad CD, ita HC ad CI; ergo erit, [a] vt AE ad CF, ita HC, ad CI; vt [b] ergo quadratum AE ad quadratũ CF, ita quadratum HC ad quadratum CI; quare permutando erit [c] ut quadratũ AE ad quadratũ HC, ita quadratum CF ad quadratũ CI; Rectangulum autem DAC æquale est [d] quadrato EA, & rectangulum DCH æquale est [e] quadrato CI; ergo, ut rectangulum DAC ad quadratum HC, ita quadratum CF ad rectangulum DCH; & permutando erit, [f] ut rectangulum DAC ad quadratum CF, ita quadratum HC ad rectangulum DCH. Est [g] autem rectangulum GAD æquale quadrato CF; quamobrem erit, [h] vt rectangulum DAC ad rectangulum GAD, ita quadratum HC ad rectangulum DCH; est [i] autem, vt HC ad DC, ita quadratum HC ad rectangulum DCH, & vt AC ad AG, ita quoque est [k] rectangulum DAC ad rectangulum GAD; quare vt AC ad AG, ita HC ad DC; & permutando erit [l], vt ablata AC ad ablatam HC, ita tota AG ad totam DC, seu vt tota AG ad totam DC, ita ablata AC ad ablatam HC; ergo, [m] ut tota AG ad totam DC, ita reliqua GC ad reliquam DH, quæ est æqualis AD; quamobrem rectangulum GAD æquabitur [n] rectangulo DCG. Quod ita se habet, nam quadratum CF æquale est [o] rectangulo DCG; & rectangulum GAD factum est æquale quadrato CF; ergo rectangulum GAD æquabitur rectangulo DCG.

Com-

Compositio.

QVoniam igitur quadratum ex C F æquale est α rectangulo D C G. At verò rectangulum G A D factum est æquale quadrato C F, proinde rectangulum G A D æquale erit β rectangulo D C G; quamobrem erit γ reciprocè; vt AG ad D C, ita C G ad AD, cum itaque sit, ut tota AG ad totam D C, ita ablata C G ad ablatam D H, quæ est æqualis AD; ob id vt tota AG ad totam D C, ita reliqua A C ad reliquam H C, seu reliqua A C ad reliquam H C, erit δ vt tota AG ad totam D C; quare permutando ε, vt A C ad AG, ita H C ad D C. At verò, vt A C ad AG, ita est ζ rectangulum C A D ad rectangulum G A D, & vt HC ad D C, ita est η quoque quadratum H C ad rectangulum D C H; quamobrem erit, θ ut rectangulum C A D ad rectangulum G A D, ita quadratum HC ad rectangulum D C H; est ι autem rectangulum G A D æquale quadrato C F; proinde erit vt rectangulum DAC ad quadratum C F; ita quadratum H C ad rectangulum D C H; & permutando erit κ vt rectangulum D A C ad quadratum H C, ita quadratum C F ad rectangulum D C H; sed rectangulum D A C æquale est λ quadrato A E, & rectangulum D C H æquale est μ quadrato C I; ergo erit, ut quadratum A E ad quadratum H C, ita quadratum C F ad quadratum C I; quare permutando ν, vt quadratum A E ad quadratum C F, ita quadratum HC ad quadratum C I; ergo erit, ξ vt AE ad C F, ita H C, ad C I; sed ut H C ad C I, ita CI, ita C I ad C D, ergo erit ο ut A E ad CF, ita C I ad C D. Quod oportebat ostendere.

α 16. sexti. β 1. ax. primi. γ 14 sexti. δ 14 quinti. ε 16 quinti. ζ 1. sexti. η 1. sexti. θ 11. quinti. ι 36 tertij. κ 16 quinti. λ corol. 8 sexti. & 17 eiusdem. μ corol. 8 sexti. & 17 eiusdem. ν 16 quinti. ξ 22. quinti. ο 11 quinti.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis;

Quoniam vt A E ad C F, ita C I ad C D; est autem
Vt C I ad C D, ita H C ad C I; ergo
Vt A E ad C F, ita H C ad C I; ergo
Vt quadratum A E ad quadratũ C F, ita quadratũ HC ad quadratũ C I; ergo permutando erit,
Vt quadratum A E ad quadratum H C, ita quadratum C F ad quadratum C I; sed
Rectangulum D A C æquale est quadrato A E, &
Rectangulum D C H æquale est quadrato C I; ergo
Vt rectangulum D A C ad quadratum H C, ita quadratum C F ad rectangulum D C H, & permutando erit,
Vt rectangulum D A C ad quadratum CF, ita quadratum HC ad rectangulum DCH; sed
Rectangulum G A D æquale est quadrato C F; ergo
Vt rectangulum D A C ad rectangulum GAD, ita quadratum H C ad rectangulum DCH; sed
Vt H C ad D C, ita quadratum H C ad rectangulum D C H, &
Vt A C ad A G, ita rectangulum D A C ad rectangulum G A D; ergo
Vt A C ad AG, ita HC ad D C; & permutando
Vt ablata A C ad ablatam H C, ita tota AG ad totam D C; ergo
Vt tota AG ad totam DC, ita reliqua G C ad reliquam D H, quæ est æqualis A D; quare
Rectangulum G A D æquabitur rectangulo D C G. Quod ita se habet; nam quadratum C F æquale est rectangulo D C G, & rectangulum G A D; factum est æquale quadrato C F, ergo rectangulum GAD æquabitur rectangulo DCG.

Initium Resolutionis, et que finis Compositionis.

Finis Resolutionis & initium Compositionis.

SCHOLION.

COntingit autem plerumque, ut Tyrones aliquod superfluum intrudant in Theorematibus concinandis, à quo præcipuè abstinendum, vt si præscriberetur duci à puncto A tangentem peripheriam, ita ut æqualis foret recta C F eaque adhiberetur tanquam potens rectangulum GAD; nihil afferret noui, vnde perinde est quod natura prius, rectangulum ipsum adsciscere; inire autem demonstrationem gratia æqualitatis inter duas rationes, quarum vnà sit A E ad prædictam tangentem, altera vero C I ad C D puerile foret, siquidem perinde est ac inter AE, & CF, illam concipere conferendam cum ea quæ est C I ad C D.

Aduertenda quædam.

Illud etiam passim contingit in resoluendo, minus exercitatis, vt in progressu instituta Analyscos

Aliud notandum.

lyseos tandem eò, deueniant, vt credant ibi sistendum, tanquam ad verum concessum, cum tamen id quidem verum sit, sed iam superius adhibitum; vnde paralogizzant ostendendo idem per idem; non aduertentes eo peruenisse ex illatione inde deducta, non secus ratiocinantes, ac si ex A, tanquam supposito vero, inferant B, deinde hinc inferant C, postmodum inferant A, quod verum sit; nec aduertunt A deductum ex A fuisse, Vt si rectam diuisam supponant in duas partes æquales, & ex hac diuisione multa deducant, atque tandem hoc verum ostendant, quod linea illa bifariam diuisa sit, per diuersas consecutiones deductum, illudque confirment, quoniam hunc in modum linea fuerit initio diuisa. Hoc plane detestabile; permittendum tamen quotiescunque, nos ratiocinando, ad aliquod constructum peruenimus, tanquam aliunde tamen deductum, quod confirmare licebit, quia ita ex constructione se habeat; vel ut exploratum iam constet; nam illud quod verum supponimus ita sit vèrum, vt non sit quæsitum, sed nobis manifestè pateat. Vnde si exempli gratia triangulum foret æquilaterum, hoc ipso supponimus, & latera, & angulos æquales, si quæsitum fuerit huiusmodi, ut ex eius suppositione ratiocinantes deueniamus ad hoc verùm, quod duo ipsius trianguli æquilatteri latera sint æqualia; illudque confirmemus, quoniam trianguli æquilateri latera sunt, ac propterea æqualia, bene habet.

Quo pacto Analystæ suppositis vti debeant Hypothesis nõ afficit, nisi sit in quæstione.

Imò è pluribus suppositis veris, quorum neutrum quæsitum sit, optime quidem adhibitis uno vel pluribus ex ijs, si tandem ad unum peruenimus, tanquam verum ex antecedentibus deductum ratiocinatione; poterimus synthesin deinde auspicari, eo confirmato, quod ita se habeat, ex hypothesi.

Non enim hypothesis officit, nisi quæ in quæstione posita est, tunc siquidem inde nobis regredientibus non licet eodem regredi velut ab explorato, quod tantummodo innotuis, quatenus ex semetipso deductum; nihil enim magis insulsum, cùm idem sui ipsius comparatione notius, ac ignotius forte; ad eum tamen, quem explicuimus modum, sternitur optima ad resoluendum via; unde quam maximè etiam idonea ad componendum. Hæc autem sunt in primis habenda præ oculis, ne crimen incurramus violata legis Analystarum, quibus nihil est carius, nec magis quidquam in delitijs, quàm adeo candidam demonstrationem contexere, ut nihil in ea dedecoris notari queat, atque adeo nihil superfluum in se contineat, nec aliqua ex parte deficiat, nec paralogysma, nec alio vitio laboret.

Ad demonstrandi candorem magis valent Artis præcepta, quã asuetudo.

Ad huiusmodi demonstrandi candorem si quis etsi præceptis destitutus artisque luminibus orbatus se perventurum asuetudine demonstrandi, & imitatione Vtterum, qui in hoc plurimum excelluerunt, existimet, toto quidem aberrat Cœlo; nam casu, non artificiosa disserendi ratione dum operatur, non rarò decipiatur oportet; quamobrem opera erit pretium, vt in hac incumbat, quod si exercitatio accesserit tuto in resoluendo procedet, quod animaduertisse non fuit ab instituto prorsus alienum.

THEOREMA.

Exemplum XVII.

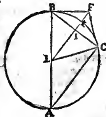
Sit circulus ABC, cuius centrum L, diameter autem AB, & recta FB tangat illum in B, & FC, in C, ductaque sit BC, & insuper FL, quæ occurrat peripheriæ in K, & ipsi BC in I, ducta insuper AC. Dico esse vt FK ad KI, ita BA ad AC.

Resolutio.

a 4. sexti.
b Ex Auctore in Libro de Circulo per conuersiõ propositionis 129
c 31. tertij.
d 3. tertij.
e 4. primi.

QVoniam igitur est vt FK ad KI, ita BA ad AC, est a autem, vt BA ad AC, ita BL, ad LI, cum triangula BAC, BLI sint æquiangula, atque adeo similia, vt mox demonstrabo, quamobrem vt FK ad KI, ita BL, ad LI; ergo circulus cuius diameter BL transibit b per I; ergo anguli ad I recti erũt, c unde æquales & BI æquabitur d IC; latera igitur BI, IL, cũ æqualia sint lateribus CI, IL, vtrunque vtrique; ergo angulus BLI æquabitur e angulo CLI, seu BLF æquabitur angulo CLF; in duobus igitur triangulis BLF, CLF, cum duo latera BL, LF æqualia sint duobus lateribus CL, LF vtrunque vtrique, & anguli ad verticem L sunt inter se æquales; ergo basis BF æqualis erit f basi CF: Quod ita se habet g ex Elementis.

f 4. primi.
g 17. tertij.



L E M M A.

Dico triangulum BLI simile esse triangulo BAC.

Quoniam enim in duobus triangulis BLF, CLF duo latera BL, LF æqualia sunt duobus lateribus CL, LF vtrunque vtrique, & basis BF æqualis est basi CF; ergo angulus BLF æquabitur a angulo CLF, seu B L I æquabitur angulo CLI; ergo angulus BLC duplus est anguli a 8 primi.
B L I, sed angulus BLC, duplus est b anguli B A C. cum sit ad centrum, & angulus B A C b 20. tertij.
sit ad peripheriam; ergo angulus B L I æquabitur c angulo BAC, angulus autem ad B communis est vtrique triangulo; ergo reliquus angulus æquabitur d reliquo; quamobrem triangulum B L I æquiangulum erit, atque adeo simile triangulo B A C. c 7. ax. primi. d 32. primi.

Compositio.

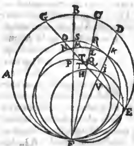
QVoniam igitur basis BF est α æqualis basi C F, & latera BL, LF æqualia β sunt lateri- α 36. tertij. & 1. ax. pr.
bu, CL, LF vtrunque vtrique in duobus triangulis B L F, C L F; ergo angulus BLF β 15. def. 1.
γ æquabitur angulo C L F, atque adeo angulus B L I æquabitur angulo C L I in γ 8. primi.
duobus triangulis BLI, CLI; δ sunt autem latera BL, LI æqualia lateribus CL, LI vtrunque δ 15. def. pri.
vtrique in ijsdem triangulis; ergo & BI ε æquabitur I C, & anguli ad I erunt recti; ergo ε 4. primi.
circulus, cuius diameter BL ζ transibit per I; quamobrem ut BL ad LI, η ita F K, ad K I; sunt ζ 31. tertij.
autem, vt superius demonstratum fuit, triangula B L I, B A C æquiangula; vnde, vt BL, ad η Ex Auctore in Libro de Circulo, Prop. 119.
LI, θ ita BA ad AC; ergo ut BA ad AC, ι ita FK ad KI. Quod oportebat ostendere. θ 4. sexti. ι 11 quinti.

T H E O R E M A.

Sint Circuli FOK, FPI interius tangentes circulum ABE in puncto F, sint deinde circuli secantes priores iam dictos in punctis F & E. Ducta sit FC occurrens peripherijs in punctis H, Q, L, R, C. Dico esse, vt HL ad LC, ita Q R ad RC, atque ita omnia intercepta linearum segmenta inter arcus circulorum tangentium proportionalia esse omnibus interceptis inter arcus circulorum secantium. Exemplum XVIII.

Ducatur FB, transiens per centra tangentium circulorum, agatur FD, per puncta I, & K, in quibus secantes secant tangentes, &c.

Resolutio.



QVoniam igitur est, vt HL ad LC, ita Q R ad R C, sed ut H L ad LC; ita IK ad KD, vt mox demonstrabitur, proinde erit ut IK ad KD, ita a Q R ad R C, at verò vt IK ad K D, ita P S ad S B, propterea vt P S ad S B, ita b Q R ad R C, proinde latera F B, F C erunt in punctis S, R, P, Q, proportionaliter secta, atque adeo rectæ B C, S R, P Q erunt c inter se parallelæ, sed FB est diameter, ergo angulus B C F, item SRF, & PQF erunt inter se æquales. Quod ita se habet; sunt enim anguli in semicirculo, atque adeò recti d vnde inter e se æquales.

a 11. quinti. b 11. quinti. c 2. sexti. d 31. tertij; e 14. primi.

L E M M A.

Quod autem sit ut IK ad KD, ita HL ad LC sic ostenditur. *Ducatur E G per punctum H secans FD in V, & occurrens peripherijs in punctis T, N, O, G. Quoniam igitur rectangulum H V E æquale est f rectangulo I V F, erit g vt FV ad V E, ita H V ad V I, & ita N V* f 35. tertij.
ad V K, atque GV ad V D; quamobrem etiam erit vt H V ad V I, ita NH ad I K, & GV ad g 16. sexti.
V D, hoc est GN ad KD; atque adeo vt IK ad HN, ita K D ad G N. Rursus autem quoniam rectangulum NHE æquale est rectangulo FHL, erit ut F H ad H E, ita NH ad HL; quemadmodum etiam & GH ad HC; quapropter vt NH ad HL ita erit h G N ad L C. Erat autem vt I K ad H N, ita K D ad N G, modo verò ut H N ad H L, ita N G ad LC; proinde h 19. quinti.

M erit

i 22. quinti. k 16. quinti. l 11. quinti.

erit [i] ex æquali vt IK ad HL, ita KD ad LC, atque adeo, [k] vt IK ad KD, ita HL ad LC; Hæc autem nobis erant proposita demonstrare,

Compositio.

DVcatur FB transiens per centra tangentium circulorum, agatur FD, &c.

Quoniã igitur FB, est diameter, angulvs BCF quippe qui in semicirculo rectus erit [α] itaetiam angulus SRF, ut & PQF; Omnes itaque anguli erunt inter se æquales, ac proinde rectæ BC, SR, PQ erunt [β] inter se parallelæ atque adeo latera FB, FC erunt [γ] in punctis S, R, & P, Q proportionaliter secta, vnde consequenter est, vt PS ad SB, ita QR ad RC; at vero vt PS ad SB, ita est IK ad KD; proinde erit, ut IK ad KD, ita QR ad RC; sed vt IK ad KD, ita HL ad LC, ut modo ostendimus; proinde erit vt HL ad LC, ita QR ad RC.

α 31. tertij. β 28. primi. γ 4. sexti.

THEOREMA.

Exemplum XIX.

Sit circulus KDFHG, in cuius circumferentia duobus assumptis punctis D, & F, itemque duobus æqualibus arcubus KG, GH itant ductis rectis KD, GF; atque continuatis ad C, item GD, HF, & continuatis ad B, ductaque DH centro H interuallo HD, descripto circulo DEO, & centro G interuallo GD, descripto circulo ADP. ductis tangentibus CA, BI, & perpendicularibus AM, IN; item AL, & IE, chordis, quæ angulos CAM, BIN bifariam secent. Dico circulum, cuius centrum G, ad circulum cuius centrum H, rationem habere, vt quadratum chordæ AL, ad quadratum chordæ IE.

Resolutio.

QVoniam igitur est circulus IEO ad circulum ALP, ut quadratum chordæ IE ad quadratum chordæ AL; est autẽ quadratũ circumscriptum ad quadratũ circumscriptum, [a] vt circulus ad circulum, circa quos nimirũ quadrata circumscripta sunt; ob id vt quadratum circumscriptum circulo IEO, ad quadratum circumscriptum circulo ALP, ita [b] erit quadratũ IE ad quadratum AL. Et permutando, [c] ut quadratum circumscriptum circulo IEO, ad quadratum chordæ IE, ita quadratum circumscriptum circulo ALP, ad quadratum chordæ AL, & subduplatis antecedentibus, erit, ut quadratum inscriptum circulo IEO, ad quadratum chordæ IE, ita quadratum inscriptũ circulo ALP, ad quadratum chordæ AL. Sed ut HB ad BE, [e] ita GC ad CL, & ut GC ad CL, ita quadratum circulo ALP inscriptum ad quadratum chordæ AL, vt mox demonstrabitur. Propterea ut HB ad BE, [f] ita quadratum circulo IEO inscriptum ad quadratum IE; at vero rectangulo sub EO, & EN æquale est [g] quadratũ IE, rectangulo sub EO, & HE, æquale est quadratum circulo inscriptum; ergo, vt HB, ad BE, ita [h] rectangulum sub EO, & EH ad rectangulum sub EO, & EN, at verò ut rectangulum sub EO, & HB, ad rectangulum sub EO, & BE, ita [i] est HB, ad BE; erit igitur ut rectangulum sub EO, & HB, ad rectangulum sub eodem EO, & BE, [k] ita rectangulum sub EO, & HE ad rectangulum sub EO, & EN; assumpta autem semel ipsa HE dimidia ipsius EO, erit

a Ex Elem. b 15. quinti. c 16. quinti. e ex Auctore Lib. de Circulo prop. 67. f 1. quinti. g corell. 8. sex. & 17. eiusd. h 7. quinti. i 1. sexti. k 11. quinti.

erit l vt H E ad EN, ita HB ad BE, & proinde per conuersionẽ rationis, m ut H E seu I H ad l 1. sexti.
HN, ita BH ad HE seu IH, & præterea vt BE ad EN, ita BI, ad IN. Quod ita se habet ex ijs m coroll. 19. quinti.
quæ demonstrauimus in Elementis.

L E M M A.

Quod autem sit ut GC ad GL, ita quadratum inscriptum circulo ALP ad quadratum chordæ AL sic ostenditur.

Rectangulum PLG, æquale est quadrato inscripto circulo ALP. Rectangulum verò PLM a coroll. 8 sexti.
æquale est a quadrato AL, ergo quadratum inscriptum ad quadratum chorda AL, erit vt & 17. eiusd.
rectangulum PLG ad rectangulum PLM. Sed rectangulum PLG ad rectangulum PLM b est b 1. sexti.
vt GL ad LM, ergo quadratum inscriptum ad quadratum chorda AL, c erit vt GL ad LM; c 11. quinti.
Quoniã verò ut est GM ad GL, d ita est GL, ad GC; ergo erit vt GM ad GL, e ita ML ad d 4. sexti. e 19. quinti
LC, & permutando f vt GM ad ML, ita GL ad LC; & componendo g ut GL ad ML, ita f 6. quinti.
GC ad LC, sed vt GL ad ML, ita erat quadratum inscriptum circulo ALP ad quadratum g 17. quinti.
chorda AL; ergo erit vt GC ad CL, ita quadratum inscriptum circulo ALP ad quadratũ chorda AL. Quod ita se habet, &c.

Compositio.

QVandoquidem ex alibi demonstratis α est ut BH, ad HD, ita CG ad GD, est autem α ex Auctore
HE, æqualis HD, & GL æqualis GD; proinde erit ut BH ad HE, ita CG ad GL, & Lib. de Circulo prop. 67.
per conuersionem rationis β erit ut HB, & BE, ita GC, ad CL. Ex puncto A ca- β 19. quinti.
dit perpendicularis AM super CG; & ex puncto I cadit perpendicularis IN super BH. γ 3. sexti.
Quoniam igitur est, vt constat ex Elementis; γ ut BE ad EN, ita BI ad IN, & præterea δ IH, δ 8. sexti.
hoc est EH ad HN, vt BH ad HI, hoc est ad HE, erit proinde, vt EH, ad HN, ita BH ad
HE, & per conuersionem rationis ε vt HE ad EN, ita HB ad BE, assumptaque ipsa HE ε Corollar.
dupla, nempe diametro EO; erit quidem, ut rectangulum sub EO, & HB, ad rectangulum 19 quinti.
sub eadem EO, & BE, ita rectangulum sub EO, & HE, ad rectangulum sub EO, & EN; at
verò vt rectangulum sub EO, & HB ad rectangulum sub EO, & BE, ita ζ est HB ad BE; ζ 1. sexti.
ergo vt HB, ad BE, η ita rectangulum sub EO, & EH ad rectangulum sub EO, & EN. η 11. quinti.
Rectangulo autem sub EO, & EH æquale est quadratum circulo inscriptum; rectan-
gulo verò sub EO, & EN æquale θ est quadratum IE; proinde, ut HB ad BE, ι ita quadratum θ Corol 8. sex. & 17. eiusd.
circulo inscriptum ad quadratum IE, sed ut HB, ad BE, vt supra ostensum est, ita GC ad ι 7. quinti.
CL, & vt GC ad CL ita quadratum circulo ALP inscriptum, ad quadratum chordæ AL.
Quamobrem erit, ut quadratum inscriptum circulo IEO, ad quadratum chordæ IE, κ ita
quadratum circulo ALP inscriptum ad quadratum chordæ AL. Duplatis autem antece- κ 11 quinti.
dentibus, ut quadratum circumscriptum circulo IEO, ad quadratum chordæ IE, ita qua-
dratum circumscriptum circulo ALP, ad quadratum chordæ AL. Et permutando, ut λ qua- λ 16. quinti.
dratum circumscriptum circulo IEO, ad quadratum circumscriptum circulo ALP, ita erit
quadratum IE ad quadratum AL, sed quadratum circumscriptum, ad quadratum circum-
scriptũ, est μ ut circulus ad circulum, circa quos nimirum quadrata circumscripta sunt; pro- μ Ex Elem.
inde erit vt circulus IEO, ad circulum ALP, ν ita quadratum IE, ad quadratum AL. Id ν 11. quinti.
autem nobis erat propositum demonstrare.

T H E O R E M A.

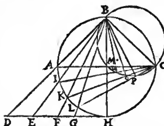
Si circulus ABC cuius centrum M, diameter BH, & recta DH tangat illum in H ductis quot- Exemplum XX.
cumque BD, BE, BF, BG proportionalibus occurrentibus peripheria in punctis A, I, K, L, & accepto quouis puncto C, ductisque AC, IC, KC, LC, atque ducta BC, circa hanc descripto circulo, qui secet prædictas rectas in punctis M, N, O, P.

Dico LP, KO, IN, AM proportionales esse in eadem ratione cum rectis DB, EB, FB, GB.

Resolutio.

QVoniam DB, EB, FB, GB sunt proportionales in eadem ratione in qua LP, KO, IN,
AM, videlicet, ut DB, ad EB, ita IN, ad AM, & vt EB ad FB, ita KO ad IN, & ut
FB ad GB, ita LP ad KO; a sunt autem, ut DB ad EB, ita IB ad AB; ergo ut IN ad a Ex Auctore Lib. de Circulo prop. 3.

b 11. quinti. AM, b ita IB ad AB; vt vero EB ad FB, c ita
c Ex Auctore Lib. de Circulo Prop. 3 KB ad IB; ergo vt KO ad IN, d ita KB ad IB, &
vt FB ad GB, e ita LB ad KB; ergo ut LB ad
d 11. quinti. ad KB, f ita LP ad KO; & permutando, g vt
e Ex Auctore Lib. de Circulo prop. 3. AM ad AB, ita IN ad IB, & ut IN ad IB, ita
KO ad KB, & vt KO ad kB, ita LP ad LB. Quod
f 11. quinti. ita se habet. Quoniam enim anguli BLC, BKC,
g 16 quinti. BIC, BAC, h sunt in eodem circuli segmento
h 21. tertij. inter se æquales, anguli vero BPL, BOK, BNI,
PMA i sunt recti, vnde æquales; ergo reliqui k
i 31. tertij. erunt æquales; triangula igitur sunt æquiangu-
k 32 primi. la, atque adeo similia; unde latera l erunt pro-
l 4 sexti. portionalia circa æquales angulos L, K, I, A, &c.



Compositio.

a 21. tertij. Quoniam anguli BLC, BKC, BIC, & BAC, sunt in eodem circuli segmento, a erunt
β 31. tertij. inter se æquales; anguli verò ad P, O, N, M, β sunt recti, atque adeo γ æquales; er-
γ 12. ax pr. go reliqui LBP, KBO, IBN, ABM, δ erunt inter se æquales; similia igitur sunt
δ 32. primi. triangula, quare circa angulos æquales L, K, I, A, latera ε erunt proportionalia, unde ut
ε 4. sexti. LP ad LB, ita KO ad KB, ita IN ad IB, ita AM ad AB; & ζ permutando ut LP ad KO, ita
ζ 16. sexti. LB ad KB, & ut KO ad IN, ita KB ad IB, & vt IN ad AM, ita IB ad AB, sed ut LB ad KB, η ita
η Ex Auctore Lib. de Circulo prop. 3. FB ad GB, & ut KB ad IB, ita EB ad FB, & ut IB ad AB, ita DB ad EB; ergo ut LP ad
θ 11. quinti. KO, θ ita FB ad GB, & ut EB ad FB, ita KO ad IN, & ut DB ad EB, ita IN ad AM; Quod
oportebat ostendere.

THEOREMA.

Exemplum XXI.

Sit AD diuisa bifariam in E, & ad extremum D erecta sit perpendicularis DC; & ex E ducta sit EC, quæ sit protracta ad partes C, mox autem acceptis quotcunque punctis G, H, I, &c.; à punctis autem G, H, I, ducta sint ad punctum A, recta GA, HA, CA, IA, & ad punctum D ducta sint GD, HD, ID. sitque DC bifariam diuisa in K.

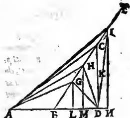
Dico differentiam quadratorum AG, GD, ad triangulum AGD; vel differentiam quadratorum AH, HD ad triangulum AHD, & sic de reliquis, rationem habere ut AD ad DK.

Ex punctis G, H, I ad rectam AD protractam etiam, cum opus fuerit, cadant perpendiculares GL, HM, IN. Plerunque contingit, ut opus sit demonstrare eandem esse rationem in quibusdam magnitudinibus; præstat autem tunc illam præfinire, iuxta quam est instituenda Analysis. Præfinita sit ratio AD ad DK.

Resolutio.

Quoniam præfinita est ratio AD, ad DK, in qua ita se habet differentia quadratorum AG, GD ad triangulum AGD vel differentia quadratorũ AH, HD, ad triangulum AHD; & sic de reliquis, in eadem ratione supponitur; propterea differentia quadratorum AG, GD, ad triangulum AGD, sic vt AD ad DK.

Quoniam igitur differentia quadratorum AG, GD, ad triangulum AGD supponimus esse, ut AD ad DK; est
a Ex Elementis. autem a rectangulum sub dupla AD & EL, differentia
quadratorum AG, GD; ergo rectangulum sub dupla AD,
b 1. sexti & EL ad triangulum AGD, erit ut AD ad DK; est autem rectangulum sub dupla AD, & EL ad rectangulum b
sub EL, & DC, ut AD ad DK dimidium ipsius DC, seu ut dupla AD ad DC; ergo rectangulum sub dupla AD, & EL ad triangulum AGD eandem habet c rationem, quam habet
c 11. quinti. ad rectangulum sub EL, & DC; quare rectangulum sub EL, & DC æquabitur d triangulo
d 9 quinti. AGD



A G D, sed rectangulo sub E L, & D C æquale est [e] rectangulum sub G L, & E D (cùm sit [f] ut EL ad LG, ita ED, ad CD,) ergo rectangulum sub L G & E D æquabitur triangulo A G D. Quod ita se habet; est enim triangulum A G D duplum trianguli E G D, siquidem AD basis dupla est baseos ED, suntque eiusdem altitudinis, at verò rectangulum sub L G, & ED duplum est [h] trianguli EGD, cùm sint super eadem basi, & eiusdem altitudinis; ergo rectangulum sub LG, & ED æquale erit [k] triangulo AGD.

e 16. sexti. f 4. sexti. g 1. axio. pr. h 1. sexti. i Ex Elementis. k 6. axio. pri.

Compositio.

QVoniam igitur rectangulum sub LG, & E D duplum est [α] trianguli E G D, cùm sint super eadem basi, & eiusdem altitudinis; triangulum verò AGD duplum est [β] trianguli EGD; siquidem AD basis dupla est baseos E D; suntque eiusdem altitudinis; ergo rectangulum sub LG, & ED æquabitur [γ] triangulo AGD; sed rectangulum sub E L, & D C æquale est [δ] rectangulo sub L G, & E D (cùm sint [ε] ut E L ad L G ita E D ad D C); ergo rectangulum sub EL & DC æquabitur [ζ] triangulo A G D; quare rectangulum sub dupla AD, & EL ad triangulum AGD, eandē habebit [η] rationem, quam habet ad rectangulum sub EL & DC; est [θ] autem rectangulum sub dupla A D, & E L ad rectangulum sub E L, & DC, vt dupla A D ad D C, seu vt A D ad D K dimidium ipsius D C; ergo rectangulum sub dupla AD & EL ad triangulum AGD, erit [ι] vt AD ad DK; est [κ] autem rectangulum sub dupla AD & E L differentia quadratorum AG, G D; ergo differentia quadratorum AG, GD ad triangulum AGD rationem habebit, vt AD ad DK.

α Ex Elementis. β 1. sexti. γ 6. axio. pri. δ 16. sexti. ε 4. sexti. ζ 1. axio. pr. η 7. quinti. θ 1. sexti. ι 11. quinti. κ Ex Elem.

Atque hunc in modum deinde permutando differentia quadratorum A G, G D ad differentiam quadratorum AH, HD, & sic de reliquis, erit vt triangulum AGD ad triangulum AHD.

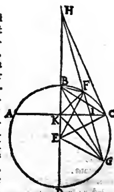
COROLLARIVM.

Hinc facilè intelliges, tam triangulum AGD ad triangulum AHD, quam differentiam quadratorum AG, GD, ad differentiam quadratorum AH, HD, in eadem esse ratione, in qua EG ad EH.

THEOREMA.

Sit circulus A B C D per cuius centrum E transeat recta H D, atque HC tangat ipsum in C, recta verò C A secet BD ad rectos angulos in K, ducta verò sit H G, Dico esse vt G I ad I F, ita quadratum H C ad quadratum H F. Exemplum XXII.

Resolutio.



QVoniam igitur est ut G I ad I F, ita quadratum H C ad quadratum H F; quadrato autem H C æquale [a] est rectangulum GHF; ergo ut GI ad I F, ita [b] rectangulum GHF ad quadratum H F, sed vt rectangulum GHF, ad quadratum HF, ita [c] est GH ad HF; ergo ut GI ad IF, ita GH ad H F; quare rectangulum sub G I, & H F [d] æquabitur rectangulo sub HG, & FI, hoc est [e] rectangulo HIF plus rectangulo G I F, communi addito rectangulo I H F, [f] erit rectangulum quidem G H F æquale rectangulo GIF plus rectangulo H I F, plus rectangulo I H F; at vero quadratum H I æquale [g] est rectangulo H I F plus rectangulo I H F; proinde rectangulum G I F vnà cum quadrato H I æquale [h] erit rectangulo G H F; est autem quadrato H C [i] æquale rectangulum G H F; ergo rectangulum G I F, vnà cum quadrato HI, æquale [k] erit quadrato HC; Cùm itaque quadratum H C, æquale sit quadrato H I plus rectangulo GIF, seu [l] quod idem est AIC; quadratum autem HK plus quadrato KI æquale [m] est qua-

a 16. tertij. b ex Elem. c 1. sexti. d 16. sexti. e 1. secundi; f 2. axiom. pr. & 1. secundi. g 2. secundi. h ex Elem. i 36. tertij. k 1. axio. pr. l 35. tertij. m 47. primi.

drato

drato H I, ergo quadratum H C æquale n erit quadrato H K plus quadrato K I, vna cum rectangulo AIC; sed quadratum KC æquale o est rectangulo AIC plus quadrato KI, ergo quadratum HC æquale p erit quadrato H K plus quadrato K C. Quod ita se habet per 47. primi; est enim angulus H K C, rectus.

n 7. ax. pr. o 3. tertij, & 3. secundi. p 1. axiom pr.

In Analysi, subintelligitur ex Elementis, quod rectangulum G H F, sit æquale rectangulo sub GI, HF, plus rectangulo IHF. Cateræ autem in Schemate lineæ hic non adhibitæ, alibi erunt vsui.

Compositio.

QVoniam igitur quadratum HC æquale α est quadratis H K, K C; quadratum verò KC æquale β est rectangulo AIC, plus quadrato K I, ergo quadratum H C æquale erit γ quadrato H K, plus quadrato K I, vna cum rectangulo A I C; sed quadrato H K, plus quadrato K I æquale δ est quadratum H I; proinde quadratum HC ε erit æquale quadrato H I, plus rectangulo A I C, seu quod idem ζ est G I F; cùm autem rectangulum GIF, vnà cum quadrato HI æquale sit quadrato H C; quadrato autem HC æquale η est rectangulum GHF, proinde rectangulum G I F, vna cum quadrato H I æquale θ erit rectangulo GHF; at verò quadratum HI æquale ι est rectangulis HIF, IHF, propterea rectangulum GIF plus rectangulo HIF, vnà cum rectangulo I H F, æquale κ erit rectangulo G H F; sed rectangulum GHF æquale λ est rectangulo sub G I, & H F plus rectangulo I H F; communi sublato rectangulo IHF, μ remanebit rectangulum sub GI, & HF æquale rectangulo H I F, plus rectangulo G I F, hoc est ν rectangulo sub H G, & F I, atque adeo vt G H, ad H F, ξ ita GI ad IF; sed ut GH ad H F ο ita rectangulum G H F, ad quadratum H F; ergo ut GI ad IF, π ita rectangulum GHF, ad quadratum HF; sed rectangulum GHF æquale ρ est quadrato tangentis HC; ergo ut GI ad IF, σ ita quadratum H C, ad quadratum H F.

α 47. primi. β 5 primi. γ 2. ax. pr. δ 47. primi. ε 1. ax. pr. ζ 35. tertij. η 36. tertij. θ 1. axiom pr. ι 2. secundi. κ 1. axiom. pr. λ 1. secundi. μ 3. axiom pr. ν 1. secundi. ξ 16. sexti. ο 1. sexti. π 11. quinti. ρ 36. tertij. σ 7. quinti.

THEOREMA.

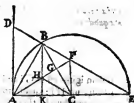
Exemplum XXIII.

Sit triangulum æquilaterum ABC, producto latere A C, vsque ad E, itaut AC, CE, sint æquales, excitata AD, perpendiculari, ductaque E B, quæ illi occurrat in D, ex B, cadat BK, perpendicularis ad A C.

Dico DB, esse semidiametrum circuli, in quo triangulum ABC, inscribi potest.

Ex C excitetur CF perpendicularis ipsi AE; agatur AF occurrens BK in H, ducatur HC.

Resolutio.



QVoniam H A æqualis est H C, anguli verò ad K sunt æquales, utpote recti ex constructione, & angulus HAK æqualis a est angulo HCK, ob æqualia latera HA, HC; ergo latus AK b æquabitur lateri KC. Quod ita se habet, nam in duobus triangulis ABK, C B K, anguli ad A, & C sunt æquales, utpotè anguli trianguli æquilateri, & anguli ad K sunt æquales, utpote recti, & latus B K est commune; ergo A K c æquabitur K C.

a 5. primi. b 26. primi. c 26. primi.

Quoniam HB est æqualis HC; ergo angulus HBC d est æqualis angulo HCB; quare reliquus angulus A B H e reliquo angulo A C H; sunt autem anguli ad A æquales, eum BAC f sit duplus ipsius F A C, latus verò A H, est commune; ergo AB g æquabitur AC. Quod ita se habet sunt enim latera trianguli æquilateri.

d 5. primi. e 3. axiom pr. f 32. & 5. pr. & 1. ax. pr. g 26. primi.

Quoniam B H est æqualis BF; ergo angulus B H F h erit æqualis angulo B F H; angulus autem HBG i est æqualis angulo G B F; est enim angulus B A C duplus anguli F E A, seu GBF, sicuti duplus est anguli HBG, cuius est duplus angulus A B C, qui æqualis est angulo BAC; ergo HG k æquabitur GF. Quod ita se habet, nam angulus HBC l est æqualis angulo FCB, ob parallelas BH, FC; anguli verò ad G m sunt æquales, utpote ad verticem; suntque BG, GC, æquales; ergo HG n æquabitur G F.

h 5. primi. i 32. & 5 pri. 7. ax. primi. k 26 primi. l 28. & 29. pr. m 15. primi. n 26. primi.

Quoniam BF æqualis est B D, anguli verò ad B o sunt recti, atque adeo æquales, & latus AB commune; ergo basis AD p æquabitur basi A F; quare angulus D A B æqualis erit angulo FAB. Quod ita se habet, nam angulus DAB æqualis q est angulo BEA, seu r FAE, sed FAE æqualis est angulo BAF, cùm angulus BAC sit duplus ipsius FAC; ergo angulus DAB s æquabitur angulo F A B.

o 31. tertij. p 4. primi. q 32. tertij. r 4. & 5. pri. s 1. ax. primi.

Com-

Compositio.

ET quoniam in duobus triangulis ABK, CBK anguli ad A, & C ſunt æquales, vtpote anguli triãguli æquilateri, & anguli ad K ſunt æquales vtpote recti, & latus BK eſt cõmune; ergo AK α æquabitur KC, KH eſt commune; ergo latera AK, KH æqualia erunt lateribus CK, KH, & anguli ad K ſunt æquales, vtpote recti, ex contruƈtione; ergo HA β æqualis erit HC. α 16. primi. β 4. primi.

Et quoniam AB, AC ſunt latera trianguli æquilateri, erunt inter ſe æqualia, ſunt autem anguli ad A æquales, cum BAC ſit duplus ipſius FAC, latus verò AH commune; ergo angulus ABH γ æquabitur angulo ACH; ergo reliquus angulus HBC δ erit æqualis reliquo angulo HCB; ergo HB ε erit æqualis HC. γ 4. primi. δ 3. axiom. pr. ε 6. primi.

Et quoniam angulus HBG æqualis eſt angulo FCG, ob parallelas BK, FC, anguli vero ad G ζ ſunt æquales, & BG, eſt æqualis CG ergo HG η æquabitur GF; ergo BH, æquabitur BF, per 4. Propr. primi. ζ 15. primi. η 26. primi.

Vel quoniã angulus HBG æqualis eſt angulo GBF, cùm angulus BAC duplus θ ſit anguli FEA, ſeu GBF, ſicuti duplus eſt anguli HBG, cuius eſt duplus angulus ABC, qui æqualis eſt angulo BAC; & anguli ad G ſunt æquales, utpote recti, & latus BG commune eſt; ergo angulus BHF, ι erit æqualis angulo BFH; quare BH, erit κ æqualis BF. θ 32. & 5. pr. & 2. axiom. pr. ι 26. primi. κ 6. primi.

Quoniam igitur angulus DAB æqualis λ eſt angulo BEA, ſeu μ FAE, ſed FAE æqualis eſt angulo BAF, cum angulus BAC ſit duplus anguli FAC; ergo angulus DAB ν æquabitur angulo FAB; latus autem AB commune eſt, anguli vero ad B ſunt ξ recti, atque adeo ο æquales; ergo BF æqualis erit π BD &c. λ 32. tertij. μ 4. & 5. pri. ν 1. ax pr. ξ 31. tertij. ο 12. axio. pr. π 26. primi.

S C H O L I O N.

SVpraꝑoſitum Theorema nos in exemplum attulimus, vt inde cautus fiat Analyſta, nam in eius reſolutione minori adhibita cura facilè incurret vitium: vnde reſolutionem ipſam minus benè perficiet; In huiuſmodi enim caſibus reſolutio ita procedit, vt in conſequentibus aſſumantur tanquam vera, quæ in antecedentibus fuerunt deducta, ac propterea in compoſitione, cùm reſolutionis conſequentia, euadant antecedentia inuerſo ordine probationes conſequuntur; vnde ipſius reſolutionis greſſus impeditur. Quamobrem erit opera pretium induſtriã omnem adhibere in hoc vitio vitando, ad quod præſtat membratim reſolutionem perficere, ut quodlibet quæſitum ſuam habeat Analyſin, ita ut cùm primùm facta fuerit hypotheſis per ea, quæ conſequuntur in aliquod verum incidamus, ſiſtat Analyſis; atque iterum alia repetita hypotheſi, iterum per ea quæ conſequuntur dum verum aliquod offendimus itidem Analyſis ſiſtat, atque hoc toties fiat, quoties Theorematis natura expoſcit, ità ut tandem ad hypotheſin illam perueniatur, principalis quæſiti, & per ea, quæ inde conſequuntur perueniamus ad aliquod verum conceſſum, vnde liceat repetitis Analyſeos veſtigijs, compoſitionem ipſam contexere, quæ toties, quoties reſolutio intercidet, atque hunc in modum ipſius Theorematis Analyſis erit abſoluta primùm, deinde verò Compoſitio. Notãda quædam.

Simile quid occurret infra in Theoremate, quod ad ſectiones conicas pertinet.

T H E O R E M A.

Sit recta AB diuiſa in punctis D, E, F, G, H, & vt IK ad HE, ita ſit EH, ad FH, & vt IK plus FH, ad FH, ita AE, ad ED. At vero DG poſſit rectangulum BDE, ſitque vt IK, ad EH, ita KL ad EG Exemplum XXIV.

Dico eſſe aggregatum quadratorum KL, AG, æquale rectangulo EAB.

Fiat CD, æqualis ipſi DE.

Reſolutio.

QVoniam igitur ſumma quadratorum KL, AG æqualis eſt rectangulo EAB, vtrinque ſubtracto quadrato AE; ergo ſumma quadratorum KL, EG, vna cum duplo rectangulo AEG æquabitur α rectangulo AEB; ſed rectangulum CGE æquale eſt rectangulo DEB, vt mox demonſtrabimus; ergo vt rectangulum CGE ad ſummam quadra- α 3. ax primi. Lemma primi.

I L K

A C D E F G H B

b a
c coroll. 4. 5. dratorũ KL.EG,vna cum duplo rectang. AEG,ita rectangulũ BED ad [b] rectang AEB;& inuertendo, vt [c] summa quadratorum KL, EG,vnà cum duplo rectangulo AEG ad rectang. CGE, ita rectangulum AEB ad rectangulum DEB; sed vt rectangulum AEB, ad rectangulum DEB, ita est [d] AE ad ED, seu ita summa quadratorum KL, EG ad quadratum EG;ergo ut summa quadratorũ KL, EG ad quadratum EG, ita [e] summa quadratorum KL, EG; vnà cum duplo rectangulo AEG ad rectangulum CGE, hoc est ad quadratum EG, vnà cum rectangulo CEG; ergo ut summa quadratorum KL, EG ad quadratum EG, ita erit [f] duplum rectangulum AEG ad rectangulum CEG; quare vt AE ad ED,ita [g] duplum rectangulum AEG, ad rectangulum CEG, hoc est ad duplum rectangulum GED, seu ità rectangulum simplex AEG, ad simplex rectangulum GED. Quod ita se habet ex prima sexti Elementorum.

d vt mox demonstr. ab inf.
e 11. quinti.
f 19. quinti.
g 17. quinti.

Lemma primum.

Quod autem rectangulũ CGE æquale sit rectangulo DEB sic ostenditur. *Quoniam DG potest rectangulum BDE, ex hypothesi, rectangulum autem CGE plus quadrato DE aequale est [a] quadrato DG; ergo rectangulum CGE, plus quadrato DE aequabitur [b] rectangulo BDE; sed rectangulum BDE aequale est [c] quadrato DE, plus rectangulo DEB, vtrinque subtracto quadrato DE, reliquum rectangulum CGE, aequabitur [d] reliquo rectangulo DEB. Quod oportebat ostendere.*

a 6. secundi.
b 1. axiom. pr.
c 3. secundi.
d 3. axiom. pr.

Lemma secundum.

Quod autem summa quadratorũ KL, EG ad quadratum EG sit, ut AE ad ED, sit demonstrabitur. *Quoniam igitur est, vt IK ad EH ex hypothesi, ita EH ad FH; ergo erit [a] vt IK ad FH, ita quadratum IK ad quadratum EH; quoniam verò est ut IK ad EH, ex hypothesi,ita kL ad EG; ergo erit,[b] vt quadratũ Ik ad quadratum EH, ita quadratum kL ad quadratum EG; sed quadratum Ik ad quadratum EH erat, vt Ik ad FH; ergo quadratum kL ad quadratum EG, erit [c] ut Ik ad FH; ergo componendo erit [d] ut Ik, plus FH, ad FH, ita quadratum kL, plus quadrato EG, ad quadratum EG; sed vt Ik plus FH, ad FH, ita ex hypothesi est AE ad ED; ergo, ut AE ad ED, ita erit [e] quadratum KL plus quadrato EG ad quadratum EG; quamobrem vt AE ad ED, ita summa quadratorum KL EG ad quadratum EG. Quod oportebat ostendere.*

a corollar. 20. sexti.
b 22. sexti.
c 11. quinti.
d 17. quinti.
e 11. quinti.

Compositio.

QVoniam igitur est, vt IK ad EH ex hypothesi, ita EH ad FH; ergo ut IK ad FH, ita [α] quadratum IK ad quadratum EH, seu ita [β] quadratum KL ad quadratum EG,cum sit [γ] vt IK ad EH, ita KL ad EG; igitur componendo erit, [δ] vt Ik plus FH, ad FH hoc est [ε] cum sit [ε] vt Ik plus FH ad FH, ita AE ad ED)vt AE ad ED,ita summa quadratorũ kL, EG ad quadratum EG; Quoniam autem ut AE ad ED, ita [ζ] rectangulum AEG ad rectangulum GED, vel ita [η] duplum rectangulum AEG ad duplum rectangulum GED, hoc est ad rectangulum CEG; ergo summa quadratorum KL, EG ad quadratum EG, erit vt duplum rectangulum AEG ad rectangulum CEG;igitur per 12. quinti, vt [θ] summa quadratorum KL, EG, plus duplo rectangulo AEG, ad summam quadrati EG, cum rectangulo CEG, hoc est ad rectangulum CGE, ita summa quadratorum KL, EG, ad quadratum EG, seu ut AE ad ED; sed vt AE ad ED, ita quoque est [ι] rectangulum AEB ad rectangulum DEB, quo circa, [κ] ut summa quadratorũ KL, EG, vna cum duplo rectangulo AEG ad ctangulum CGE, ita rectangulum AEB ad rectangulum DEB, & inuertendo, ut rectangulum CGE ad summam quadratorum KL, EG, vna cum duplo rectangulo AEG,ita [λ] rectangulum DEB ad rectangulum AEB; ergo cùm rectangulum CGE æquale sit ostensum rectangulo DEB, summa quadratorum KL, EG, plus duplo rectangulo AEG æquale erit [μ] rectangulo AEB, utrinque addito quadrato AE; ergo summa quadratorum KL, AG æqualis erit [ν] rectangulo EAB. Quod erat operæ pretium ostendere.

α coroll. 20. sexti.
β 22. sexti.
γ ex hypothesi
δ 18. quinti.
ε ex hypothesi
ζ prima sexti.
η 15. quinti.
θ 12. quinti.
ι primi sexti.
κ 11. quinti.
λ corollar. 4. quinti.
μ 16. quinti.
ν 2. axio. pr.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Quoniam igitur summa quadratorum KL, AG aequalis est rectangulo EAB, vtrinque subtracto quadrato AE. ergo

Sum-

Initium Resolutionis, & finis Composit.

Summa quadratorũ k L EG, vnà cum duplo rectangulo AEG, æquabitur rectangulo AEB. sed Rectangulum CGE, æquale est rectangulo DEB; ergo

Vt rectangulum CGE ad summam quadratorum k L, E G, vnà cum duplo rectangulo A E G ita rectangulum DEB ad rectangulum AEB, & inuertendo

Vt summa quadratorum kL, EG, vnà cum duplo rectangulo A E G ad rectangulum C G E. ita rectangulum AEB, ad rectangulum DEB. sed

Vt rectangulum AEB, ad rectangulum D E B, ita est AE ad E D, seu ita est summa quadratorum k L, E G ad quadratum EG. ergo

Vt summa quadratorum k L, E G, ad quadratum E G; ita summa quadratorum KL, EG, vnà cum duplo rectangulo AEG, ad rectangulum CGE, hoc est ad quadratum EG, plus rectangulo CEG. ergo Vt summa quadratorum K L, EG, ad quadratum EG, ita erit duplum rectangulum A E G ad rectangulum C E G. quare

Vt AE ad ED, ita duplum rectangulum A E G ad rectangulum C E G, hoc est ad duplum rectangulum G E D. seu

Ita rectangulum simplex A E G ad simplex rectangulum G E D. Quod ita se habet ex prima sexti, &c.

Finis Resolutionis, & initium Compos.

De Theorematibus pertinentibus ad Sectiones conicas, aliasque lineas Cap. III.

VTilissimum est linearum omnium genesim habere perspectam, nam cum quispiam ex earum natura solerti quadam indagine nonnulla deprompserit attributa, continuata serie consecutionum, ad plurima Theoremata demonstranda synthesin instituere commodissime valet. Hoc enim inter oblatum Theorema, & aliud propria industria parandum, interesse videtur, quod illi resolutione quidem occurrimus, atque adeo satisfacimus, eo siquidem tanquam vero supposito per ea, quæ consequuntur, in aliquod verum concessum incidimus; indeque redeuntes ad propositum tandem syntheticè peruenimus; subiecto siquidem inesse passionem supponentes, tantummodò causam inquirimus; quam resoluendo consequimur, quod non semel à nobis inculcatum fuit; sed huic, non ea est satisfaciendi ratio, cum nondum illud esse constet, sed simul & quod sit, & causam indagamus; priori enim modo, ne dum quid nomen significet, sed quod insit, atque existat, prænoscimus, cum inesse, sit eius esse, at secundo modo, nominis tantummodo notione habita, & quod insit, atque adeo sit, & causam cur insit inquirimus. Huc spectat illud Philosophi dogma, de affectione, non quod sit, sed quid nomen significet, prænoscendum.

Interest Analysta linear. omnium naturam habere perspectam.

Itaque non erit illi laboris, naturam ipsarum introspicere, harum siquidem contemplatio Geometrica est; Vt enim Arithmeticus numerum, Geometra magnitudinem, velut subiectam materiem, sua contemplatione persequitur; vnde rectè Philosophus; λέγω δὴ ἐκ προθέσεως, οἷον μονὰς οὐσία ἄθετος, στιγμὴ δὲ οὐσία θετός, ταύτην ἐκ προθέσεως. *Dico autem ex positione, vnitas substantia non posita, punctum verò substantia posita hanc ex positione.* Numerum enim, atque magnitudinem, substantias appellat, non quod veræ substantiæ sint, cùm accidentis naturam obtineant, sed quoniam affectionibus subsunt, & quatenus huiusmodi ab ipsis considerantur, secundum naturam, intra limites tamen, quos vtraq; sibi ipsi præscribit prænoscendam, quod ex eo quisque sibi persuasum habebit, quoniam vniuersæ subiectum est disciplinæ; inde siquidem affectiones dimanant, ac ob id per illud innotescũt. Hæc tamen obiter dicta sint; hac enim de re iterum infra.

Primo Post lib partic. 78

Cum in secundo huius tractationis Libro de Problematum resolutione sit nobis futurus sermo, eaque, cum linearum rectarum, & angulorum, quos illæ comprehendunt, & rectilinearum figurarum inde nascentium, circulique naturam, solerti quadam indagine Veterum explicatam supponat, quamuis è paucis eorundem primordijs Recentiorum industria Problemata ad planum locum pertinentia tractanda susceperit, haud infelici successu; propterea non erit abs re, si hactenus traditis præceptis Theorematum planorum, nonnulla prælibemus, antequam de Theorematibus solidis alijsq; verba faciamus.

De quibus agendum.

Rectè quidem Veteres linearum genesin considerantes ad motum illam retulerunt; quamobrem ijs lineę rectę puncti fluxus, circulus verò vnius rectæ lineæ extremo manente, alio autem in orbem acto, videbatur; simpliciora videlicet primordia spectantes, cùm alioquin ex planorum sectione, recta linea, & ex cylindri, vel coni sectione facta per planũ

Veteres genesim linearum ad motum retulerunt.

basi parallelũ circulus ortum ducat. Verùm enimvero altiùs mentis aciem attollentes, cæterarum linearum curuarum naturam, earundemq; symptomata perscrutaturi ad solidorum sectiones respexerunt; simpliciorem ortum omittentes quem, vel non perspectum habuerunt, vel neglexerunt iniuria; nam si quæ sunt, quæ profectò pauca non sunt, vel longa meditatione sunt assecuti, salebrosam viã suã calcando, per expeditiorem ad idem, imo & ad maiora peruenissent. Tanti refert introspicere diligenter naturam eorum, de quibus est disserendum, ut qualia sint cognoscantur, quæ enim facili perscrutatione perquiri possunt iuxta genium naturæ, simplicissimis legibus adstrictæ, insulsum est implicata meditandi ratione confundere; quod fortasis cùm ex parte fuisset Archimedi exploratũ, de Helice tractationẽ initurus, illius ortũ ab implicato vnius puncti motu explicat, vt inde facilè, ac expeditè præclara quidem symptomata depromeret, quod & etiam Conchoidi, Cissoidi, & alijs eiusdem ordinis commune est lineis, quamuis per sectiones quoque solidorum quorundam operosum non foret explicare; Id autem etiam & sectionibus conicis accidere non paucis innotuit, qui cum earum naturam, paulo alacriori animo persecuti essent, Veterum industriam, etsi laudibus in Cœlum efferendam, minus plausibilem duxerunt, existimantes ab ijs initam viam implicatiorem, & obscuriora principia perquisita fuisse; cum alioquin idem alia ratione longè faciliori, consequi liceat; etenim vniuscuiusque sectionis ortum in plano per simpliciora principia, non insulsè notarunt, cùm ijs quoque ab vnius puncti implicato motu procreari conueniat, quam quidem genesim, si quis diligenter aduerterit eorum sententia multa, & præclarissima quidem animo comprehendet, quæ harum consequuntur naturam; id autem hunc in modum se habere mihi videtur planum fieri Veterum monumentis inspectis; Apollonius enim qui in his principem obtinuit locum Proposit. 11. Libri Primi habet.

Conicarum sectionum ortus in plano.

Apollon. lib. 1 prop. 11.

Si conus plano per axem secetur: secetur autem, & altero plano secante basin coni secundùm rectam lineam, quæ basi trianguli per axem sit perpendicularis: & sit diameter sectionis trianguli per axem vni lateri æquidistans: recta linea quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni basis secantis, & basis coni vsque ad sectionis diametrum; poterit spatium æquale contento linea, quæ ex diametro abscissa inter ipsam, & verticem sectionis interijcitur, & alia quadam, quæ ad lineam inter coni angulum, & verticem sectionis interiectam, eam proportionem habeat, quàm quadratum basis trianguli per axem ad id, quod reliquis trianguli lateribus continetur. Dicatur autem huiusmodi sectio Parabole.

Hæc tamen nimis implicata sunt, atque adeò huius sectionis ortus valdè est obscurus, plurimisque tricis inuolutus.

Parabola ortus in plano.

Vide quanto elegantiùs, & clariùs genesis eiusdem sectionis habeatur iuxta recentiorem modum, si recta quæpiam sibi perpetuò parallela certo sui puncto, nempe extremò concipiatur moueri per quandam immotam rectam, eodemque motu secum ducere crus anguli cuiusdam circulariter mobilis circa punctum quoddam determinatum, adeò vt crus illud iam dictum semper transeat per commemoratæ lineæ sibi semper parallelæ punctum paulò antea designatum, simulque cruris alterius dictæque lineæ intersectione curua linea describatur. Huius igitur sectionis ortus simplicissimo quidem modo, rationeque cernitur, eademque symptomata sectionem ipsam consequuntur, quod si Veteribus perspectum exploratumque fuisset, implicatiori neglecta uia magis hanc expeditam calcassent, atque contemplationem ineuntes eadem minori labore fortasse præstitissent, atque facilius symptomata demonstrassent; & quidem hac ratione celebriora Theoremata faciliùs ostenduntur. Quæ verò superius attulimus, in omnibus casibus sic locum habent, ut nulla exceptione recipienda sint.

At ne dum in parabole, sed etiam in hyperbole hæc eadem contingunt; apud enim Veteres difficilis admodum, ac implicatus est eius ortus, vt videre licet apud Apollonium.

Apollonius prop. 12.

Si conus plano per axem secetur; secetur autem, & altero plano secante basim coni secundam rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; & sectionis diameter producta cum vno latere trianguli per axem, extra verticem coni conueniat; recta linea quæ à sectione ducitur æquidistans communi sectioni plani secantis, & basis coni vsque ad sectionis diametrum, poterit spatium adiacens lineæ, ad quam ea, quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangulum, eandem proportionem habet, quàm quadratum lineæ, quæ diametro æquidistans à vertice sectionis vsque ad basim trianguli ducitur, ad re-

rectangulum basis, partibus, quæ ab ea fiunt, contentum: latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abscinditur inter ipsam, & verticem sectionis interiectam, excedensque figura simili, & similiter posita ei, quæ continetur linea angulo extra triangulum subtensa, & ea iuxta quam possunt, quæ ad diametrum applicantur. Vocetur autem huiusmodi sectio Hyperbole.

Huius etiam sectionis longè facilior est genesis ea, quæ per motum unius puncti comparatur, vt si recta quæpiam circa punctum aliquod circulariter moueri concipiatur, suoque motu promouere, secumque ducere angulum quendam, ita ut eius crus vnum applicatum perpetuò maneat immotę rectæ cuidam, prędictaque mobilis linea semper transeat per idem punctum iam dicti cruris, simulque alterius cruris, & initio dictæ lineæ interfectione describatur curua linea, sitque ducta quædam secundo cruri parallela, necessariò euenit quò magis initio iam dicta linea ad hanc ipsam parallelam accedit, eò minorem fieri angulum interfectionis, quo curua describitur, vt demum ea ad parallelam perueniente euanescat, &c. & ex hac genesi Theoremata eadem, quæ ex Veteri ortu depromuntur. *Hyperbola ortus in plano.*

Nec dissimiliter de altera conica sectione censendum, quæ ellipsis dicitur, cuius antiqua genesis est illa, quam Apollonius tradit. *Lib. 1. prop. 13*

Si conus plano per axem secetur, & secetur altero plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, neque subcontrariè ponatur; planum autem, in quo est basis coni, & secans planum conueniat secundum rectam lineam, quæ sit perpendicularis, vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur; recta linea quæ à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni planorum vsque ad dimetrum sectionis, poterit spatium adiacens lineæ, ad quam sectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ diametro æquidistantis à vertice coni vsque ad trianguli basim ductæ; habet ad rectangulum contentum basis partibus, quæ inter ipsam, & rectas trianguli lineas interijciuntur; latitudinem habens lineam, quæ ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis, deficiensque figura simili, & similiter posita ei, quæ diametro, & linea iuxta quam possunt continetur. Dicatur autem huiusmodi sectio Ellipsis.

In plano etiam huius sectionis ortus contingit, si duo fuerint rectæ lineæ mutuò se secantes, atque triangulum fuerit effectum, cuius latus subtendens angulum, quem prædictæ lineæ in communi sectione efficiunt, vt si interfectio fuerit ad angulos rectos, latus subtendens rectum angulum moueatur, ita vt extremum vnum dum tendit ad punctum interfectionis, seu ad verticem trianguli rectanguli, aliud extremum recedat à prædicto vertice, &c. Comparabitur sectio prædicta, & hinc etiam antiqua Theoremata deducuntur; sed hęc cumulatiùs in sequentibus persequemur. *Ellipsis ortus in plano.*

De his enim secundo Libro iterum redibit sermo; interim superiora adnotasse non fuit alienum prorsus ab instituto.

THEOREMA.

Data sit parabole ABC, in qua diametrorum vertices sint A, & B, ducta verò sit A B, & E H ordinatim applicata sit ad diametrum BD, ut protracta, quæ supra AC, occurrat alteri diametro protracta ad partes A, in I & quæ infra, occurrat B A protractę ad partes A in I; ea tamen lege ducta sit vtraque ordinatim applicata, vt IE sit æqualis FG. *Exemplum XXV.*

Dico superiorem semiordinatam ab AB, & inferiorem à diametro AF diuidi in F extremà, ac medià ratione. *Resolutio.*

QVoniam igitur recta E G diuisa est in F extremâ ac mediâ ratione, propterea erit, vt EG ad GF, ita G F ad F E; quamobrem rectangulum GEF æquabitur [a] quadrato F G; est autem ex hypothesi IE æqualis FG; ergo rectangulum sub G E, & F E æquale erit rectangulo sub I E, & FG; ergo erit, [b] vt G E ad IE, ita F G ad FE, & componendo, [c] ut G I ad I E, ita G E ad F E, & permutando, [d] vt G I ad E G, ita IE ad FE, & conuertendo, [e] vt EG ad GI, ita FE ad I E; est autem H G æqualis E G; proinde vt HG ad GI, ita FE ad IE, & componendo erit, [f] ut

a 17. sexti
b 16. sexti.
c 18 quinti.
d 16. quinti.
e Corol. 4. 5.
f 18. quinti.

g 16. sexti. h 3. axio. pr. i 1. axio. pr. k 1. secundi. l 1. axio. pri.

HI ad GI, ita IF ad IE; ergo rectangulum HIE æquabitur g rectangulo GIF, vtrinque addito quadrato EG, erit h rectangulum HIE vnà cum quadrato EG æquale rectangulo GIF plus quadrato EG; est autem rectangulum IGF æquale quadrato EG; (vt mox ostendetur) ergo rectangulum HIE plus quadrato EG æquabitur i rectangulo GIF plus rectangulo IGF; sed rectangulum GIF vnà cum rectangulo IGF æquale k est quadrato IG; ergo rectangulum HIE vnà cum quadrato EG l æquabitur quadrato IG. Quod ita se habet ex sexta secundi Elementorum. Diuisa est enim EH bifariam in G, & ei adiecta est IE, propterea rectangulum HIE vnà cum quadrato EG æquabitur quadrato IG.

L E M M A.

m 34. primi. n 7. quinti. o 19 primi, & 4. sexti. p 11. quinti. q 17. sexti.

Est autem rectangulũ IGF æquale quadrato EG. *Quoniam enim est vt DB ad BG, ita quadratum AD ad quadratum EG (ex natura paraboles) m est autem AD æqualis IG, atque adeò quadratum AD æquale quadrato IG; proinde vt BD ad BG, n ita quadratum IG ad quadratum EG, sed vt DB ad BG, o ita est AD, hoc est IG ad FG; ergo quadratum IG ad quadratum EG p erit vt IG ad FG; quamobrem IG, EG, FG erunt continuæ proportionales, atque adeò rectangulum IGF q æquabitur quadrato EG.*

Non dissimiliter in diuisione inferiori; dicemus enim, vt DB ad BG, ita quadratum AD, seu FG ad quadratum EG, atq; adeò vt AD, seu FG ad IG, ita quadratum FG ad quadratum EG; quare FG, EG, IG erunt proportionales; vnde rectangulũ IGF æquabitur quadrato EG.

Quod nos offendimus resoluendo probatione indigens, à qua tunc declinamus, nè resolutionis cursum remoremur, cum tamen omninò ad fidem faciendam sit demonstrandum; quatenus resolutioni auxiliari potest, βοηθηματικὸν rectè diceretur, quod fortasse non inrationabiliter antiquà voce retenta ἐπίταγμα appellari posset.

Compositio.

α 6. secundi. β 1. secundi. γ 1. ax. pr. δ 1 axiom. pr. ε 3. ax. pr. ζ 16. sexti. η 17. quinti. θ 7. quinti. ι Coroll. 4. 5. κ 16. quinti. λ 17. quinti. μ 16 sexti. ν 17. sexti.

QVoniam EH diuisa est bifariam in G, & ei adiecta est IE, erit α rectangulum HIE vnà cum quadrato EG æquale quadrato IG; at verò quadrato IG æquale β est rectangulum GIF vnà cum rectangulo IGF; ergo rectangulum HIE plus quadrato EG æquale γ erit rectangulo GIF plus rectangulo IGF; sed rectangulum IGF æquatur quadrato EG (vt supra demonstratum fuit;) proinde rectangulum HIE vnà cum quadrato EG δ erit æquale rectãgulo GIF plus quadrato EG, vtrinq; sublato quadrato EG ε remanebit rectangulum HIE æquale rectangulo GIF; quamobrem erit, vt HI ad GI, ζ ita IF ad IE, atque adeò diuidendo, η vt HI minus GI, hoc est HG ad GI, ita IF minus IE, hoc est FE ad IE; est autem HG æqualis EG, proinde erit, ut EG, ad GI, θ ita FE ad IE, atque adeò conuertendo, ι ut GI ad EG; ita IE ad FE, & permutando, κ vt GI ad IE, ita GE ad FE; & diuidendo λ vt GI minus IE, hoc est GE ad IE, ita EG minus FE hoc est FG ad FE. Quamobrem rectangulum sub GE, & FE æquale μ erit rectangulo sub IE, & FG; est autem ex hypothesi IE æqualis FG; ergo rectangulum sub GE, & FE, hoc est rectangulum GEF æquale erit quadrato ex FG; ergo vt EG ad FG, ita ν GF ad FE; quamobrem recta EG diuisa erit in F extremà, ac medià ratione; Quod operæ pretium erat ostendere.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam ergo recta EG diuisa est in F extremà, ac medià ratione; propterea
Vt EG ad GF, ita GF ad FE. quamobrem
Rectangulum GEF æquabitur quadrato FG; est autem ex hypothesi IE æqualis FG; ergo
Rectangulum sub GE, & FE æquale erit rectangulo sub IE, & FG; erit ergo
Vt GE ad IE, ita FG ad FE; & componendo
Vt GI ad IE, ita GE ad FE; & permutando
Vt GI ad EG, ita IE ad FE, & conuertendo
Vt EG ad GI, ita FE ad IE; est autem
HG æqualis EG; ergo
Vt HG ad GI, ita FE ad IE. & componendo erit
Vt HI ad GI, ita IF ad IE; ergo
Rectangulum HIE æquabitur rectangulo GIF.
Vtrinque addito quadrato EG, erit

Re-

Rectangulum H I E, unà cum quadrato E G æquale rectangulo G I F plus quadrato E G; est autem
Rectangulum I G F æquale quadrato E G; ergo
Rectangulum H I E plus quadrato E G, æquabitur rectangulo G I F plus rectangulo I G F, sed
Rectangulum GIF unà cum rectangulo I G F æquale est quadrato I G; ergo — Finis Resolutionis, & initium Compositionis.
Rectangulum H I E, unà cum quadrato E G, æquabitur quadrato I G. Quod ita se habet, &c.

T H E O R E M A.

Sit parabole ABC, cuius basis AC, tangens vero CK, diametro autem sit æquidistans A K, & in AC sumpto quolibet puncto E, & eidem diametro ducta parallela E G; quæ parabolæ occurrat in F. Dico esse vt A k ad E G, ita E G ad G F. — Exemplum XXVI.

Intelligatur [a] ducta KM parallela basi AC, sitque A M tangens altera ipsius paraboles in A, quæ occurrat C K in N, & protracta occurrat K M in M, sitque ducta MC, quæ, ut patet ex Elementis, erit parallela ipsi AK, atque adeò diametro paraboles, quæ quidem diameter protracta in L necessariò transibit per N, vt etiam constat ex Elementis.

Resolutio.

QVoniam igitur est, vt AK ad EG, ita EG ad FG; est autem vt A K ad E G, [b] ita A C ad E C; ergo vt AC ad E C, [c] ita E G ad F G; ergo per [d] conuersionem rationis vt C A, ad A E, ita G E, ad E F; sed vt M C ad H E, ita [g] est A C ad A E, ergo ut M C ad H E, ita est G E ad F E; sed I E æqualis [h] est M C, propterea, vt I E ad H E, ita G E ad FE. Quamobrem rectangulum I E F, æquale [i] erit rectangulo H E G; est autem I H æqualis G E; ergo rectangulum I E F æquale erit rectangulo I H E; sed rectangulum L D B æquale est rectangulo LND, est enim DN ex natura paraboles diuisa bifariam in B, & LD bifariam in N, propterea, vt rectangulum LDB ad rectangulum IEF, ita rectangulum LND ad rectangulum I H E, sed ut rectangulum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum LND ad rectangulum IHE, ex ijsdem enim rationibus componuntur; ergo vt rectangulum A N M ad rectangulum AHM, ita rectangulum L D B ad rectangulum IEF, seu quod idem est, rectangulum LDB ad rectangulum IEF, [k] rationem habebit, vt rectangulum ADC ad rectangulum AEC; ut autem B D ad F E, ita rectangulum ADC ad rectangulum AEC, vt infra demonstrabitur; ergo rectangulum LDB ad rectangulũ IEF, erit [l] ut BD ad FE; Quod ita se habet: sunt enim rectangula eiusdem altitudinis.

a 31. primi. b 4. sexti, & 16. quinti. c 11. quinti. d 19. quinti. e 4. sexti, & 16. quinti. f 34. primi. g 16. sexti. k 11. quinti. l 11. quinti.

L E M M A.

Quod autem sit vt BD ad FE, ita rectangulũ ADC ad rectangulũ AEC. *Facile fit ostendetur. Ducta sit V F ordinatim applicata, atq;* [a] *adeò parallela ipsi AC. Quoniã igitur propter parabolen, vt est DB ad VB,* [b] *ita quadratũ D C ad quadratũ V F, sed quadrato DC æquale* [c] *est rectangulum AEC plus quadrato DE; ergo ut DB ad VB,* [d] *ita rectangulum AEC plus quadrato DE ad quadratum VF, seu quadratum DE, & per conuersionem rationis,* [e] *vt BD ad DV, ita rectangulum AEC plus quadrato DE, hoc est quadratum DC, hoc est rectangulum ADC ad rectangulum AEC; est* [f] *autem FE æqualis V D; ergo vt BD ad FE,* [g] *ita rectangulum ADC ad rectangulum A E C.*

a 31. primi. b ex Apol. pro. 20. lib. primi. c 5. secundi. d 7 quinti. e per coroll. 19. quinti. f 34. primi. g 7. quinti.

Compositio.

QVoniam est rectangulum L D B ad rectangulum I E F (cùm sint eiusdem altitudinis) [α] vt basis BD ad basim FE, sed ut BD ad FE, ita rectangulum ADC ad rectangulum AEC (ut paulò supra demonstrauimus); ergo rectangulum L D B ad rectangulum IEF rationem habebit, [β] ut rectangulum ADC ad rectangulum A E C, seu erit, ut rectan-

α 1. sexti. β 11. quinti.

ctangulum ANM ad rectangulum A H M; ex iisdem enim rationibus componuntur huiusmodi rectangulorum rationes, vt cuique perspectum est ex elementis; sed ut rectangulum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum LND ad rectangulum IHE, propterea, ut rectangulum LDB ad rectangulum IEF, γ ita rectangulum LND ad rectangulum I H E; sed rectangulum LDB æquale est rectangulo LND; ergo rectangulum I E F æquale erit rectangulo IHE, est autem IH æqualis GE, propterea rectangulum IEF æquale δ erit rectangulo HEG; quamobrem, ut IE ad HE, ε ita GE ad F E, sed I E æqualis ζ est M C; ergo ut MC ad HE, η ita est GE ad F E, sed ut M C ad H E, ita θ est A C ad A E; ergo ut A C ad A E; ι ita G E ad FE, & κ per conuersionem rationis, vt AC ad CE sic EG ad GF; sed ut A C ad EC; ita λ est AK ad EG; ergo ut AK ad EG, μ ita EG ad F G. Quod oportebat ostendere.

γ 11. quinti. δ 1. sexti, & 1. axiom. pri. ε 16. sexti. ζ 14 primi. η 7. quinti. θ 4. sexti, & 16. quinti. ι 11. quinti. κ 19. quinti. λ 4. sexti, & 16. quinti. μ 11. quinti.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam igitur est; Vt AK ad EG, ita EG ad FG;
Est autem vt AK ad EG ita AC, ad EC; ergo
Vt AC ad EC, ita EG ad FG, ergo erit per conuersionem rationis
Vt AC ad AE, ita G E ad F E; sed
Vt MC ad HE, ita est AC ad AE, ergo
Vt M C ad H E, ita est G E ad F E; sed
I E æqualis est M C. propterea
Vt I E ad H E, ita GE ad F E; quare
Rectangulum I E F æquale erit rectangulo H E G; est autem
I H æqualis G E; ergo
Rectangulum IEF æquale erit rectangulo IHE, sed
Rectangulum LDB æquale est rectangulo LND. propterea
Vt rectangulum LDB ad rectangulum IEF, ita rectangulum LND ad rectangulum IHE; sed
Vt rectangulum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum LND ad rectangulū IHE; ergo
Vt rectangulum ANM ad rectangulum AHM, ita rectangulum L D B ad rectangulum IEF, seu rectangulum L D B, ad rectangulum I E F, rationem habebit, vt rectangulum ADC ad rectangulum A E C,
Sed vt rectangulum ADC ad rectangulum AEC, ita est BD ad F E, ergo
Vt B D, ad FE, ita erit rectangulum LDB, ad rectangulum IEF. Quod ita se habet, &c.

Finis Resolutionis, & initium Compos.

T H E O R E M A.

Exemplum XXVII.

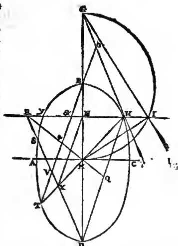
Sit ellipsis ABCD, cuius centrum M, maior axis B D, minor verò A C, producto maiori axe DB ad partes B, sit acceptum quodcunque punctum G, ex quo ducta sit GH tangens perimetrum sectionis in H, per H ducta sit ad BD perpendicularis H N, super G M sit descriptus semicirculus G I M, sitque protracta NH ad partes H, donec peripheria occurrat in I, acta sit MI.

Dico MI, MB esse inter se æquales.

Præparatio.

Protrahatur I N ad partes N, & occurrat sectionis perimetro in Y, agatur H D, cui per B ducta sit parallela OT, ex T, & H ductæ sint T M, H M, quæ erunt in directum positæ, vt paulò post ostendam, diuidatur HD bifariam in Q; ducaturq; per M diameter QMR, occurrens rectæ HY in R, ducatur R D occurrens ellipsi in S, & rectæ O T in V, item rectæ T M in X; & ad I ducta sit G I.

Resolutio.



QVoniam M I æqualis est MB, & eadem MI cum G I facit angulos rectos in I; ergo centro M, interuallo MB, descriptus circulus transibit per punctum protractæ, N H ad partes H, vbi rectæ eductæ ex M & G, faciunt angulos rectos, & ab ipsa GI circulus tāgitur;[a] quare vt DN ad NB, ita DG ad GB, sed[c] ut DH ad &B, ita DN ad NB; ergo[d] ut DG ad BG, ita DH ad &B, sed[e] ut DG ad BG, ita DH ad BO; ergo[f] ut DH ad &B, ita DH ad BO; ergo &B, & BO erunt[g] inter se æquales; sunt autem TV, &B, inter se æquales, ut mox constabit, vnde B O, & T V erunt æquales inter se; communi addita B V; ergo O V æquabitur[h] BT, sed B T æqualis est D H; ergo O V æquabitur[i] DH; est autem O T parallela ipsi DH, quare DS erit[k] parallela ipsi tangenti GH: vnde posita erit[l] ordinatim ad diametrum TH, atque adeò DS erit bissecta in X, quemadmodum H Y est ex hypothesi bissecta in N. Vnde YS, T B, X N, D H, erunt inter se parallelæ; scilicet N X æquidistabit[m] BT; at verò M B, M T semidiametri secant H Y, DS, in N, & X; ergo YS æquidistabit[n] BT; sed BT est parallela ipsi D H, ex constructione; ergo ducta YS erit[o] parallela ipsi DH; sed rectæ per H, & D occurrunt diametro QR in R; quare HD erit ordinatim applicata ad diametrum QR. ex Elementis conicis. Quod ità se habet ex constructione.

a 31. tertij.
b Ex Auctore lib. de Circulo.
c 4. sexti, & 16. quinti.
d 11. quinti.
e 4. sexti, & 16. quinti.
f 11. quinti.
g 7. quinti.
h 2. axiom. pr.
i 1. ax. primi.
k 33. primi.
l Ex Element. conicis Apol.
m Ex Auctore in lib. de Ellipsi.
n ibidem.
o 30. primi.

Lemma primum.

Demonstrabitur autem BT æqualis DH. *Nam RQ bissecat BT, DH ordinatim applicatas; sunt autem aMB, DMQ triangula similia; propterea, vt DM ad DQ, ita*[a] *B M ad Ba, & permutando,*[b] *vt DM ad MB, ita DQ ad Ba; est autem DM aqualis MB; ergo DQ aquabitur aB, quare DH, & BT earum dupla erunt inter se aquales.*

a 4. sexti.
b 16. quinti.

Lemma secundum.

Sunt autem TM, HM in directum positæ. *Nam in duobus triangulis TaM, & H Q M, duo latera Ta, aM, aqualia sunt duobus lateribus QH, QM; anguli verò TaM, H Q M, inter se aquales; ergo angulus a M T aquabitur angulo H M Q; addito communi angulo a M H ergo angulus T Ma, plus angulo a M H, aquabitur angulo a M H vna cum angulo H M Q, sed hi sunt aquales duobus rectis, ergo & illi quare T M, H M, erunt*[c] *in directum constituta.*

Lemma tertium.

Quod autem TV sit æqualis &B; *sic ostenditur. Est enim aB, aqualis aT, & quidem ex Elementis Conicis, cum TB sit ordinatim applicata ad diametrum QR, est etiam a& aqualis aV. cum sit DQ ad QH ita sit Va ad a& ergo reliqua &B aquabitur reliqua TV.*

Compositio.

QVoniam igitur HD ex constructione posita est ordinatim ad diametrum QR, rectę autē per H, & D occurrunt diametro prædictæ in R, ergo ducta YS erit[a] parallela ipsi HD, sed BT est parallela ipsi D H; ex constructione ergo Y S æquidistabit[β] B T; at

a Ex Elem. conicis.
β 30. primi.

at verò MB,MT semidiametri secant HY,DS in N,& X;ergo NX æquidistabit * BT;unde SY, TB,X N,DH erunt γ inter se parallelæ;Quare cùm HY sit ex hypothesi bissecta in N,ergo DS erit bissecta in X,vnde SD posita erit δ ordinatim ad diametrũ TH,ob id DS erit ε parallela ipsi tangenti GH,est autẽ OT parallela ipsi DH; ergo OV ζ æquabitur DH,sed BT æquatur DH; ergo OV η æquabitur BT, cõmuni ablata BV θ remanebit TV æqualis BO; sunt autem TV, &B, inter se æquales, ut ostensum fuit ; ergo &B, BO, ι erunt inter se æquales ; ergo ut DH ad &B, ita κ erit DH, ad BO, sed ut DH ad BO. ita λ DG ad B G; ergo ut DG ad BG, ita μ DH ad &B,sed yt DH ad &B, ν ita DN ad NB; ergo ut DN ad NB, ita ξ D G ad GB; Centro igitur M, interuallo MB descriptus circulus ο transibit per punctum rectæ N I, ad quod ducta recta ex M cum ducta ex G secante N H protractam ad partes H, facit angulos rectos, sed MI cum GI facit π angulos rectos in I; ergo MI ρ æquabitur MB. Quod oportebat ostendere.

* ex conicis. γ 30. primi. δ Ex Element. Conicis. ε Ex Element. Conicis. ζ 14. primi. η 1. ax. pr. θ 3. axiom pr. ι 1. ax. primi. κ 7. quinti. λ 4. sexti, & 16. quinti. μ 11. quinti. ν 4. sexti, & 16. quinti. ξ 11. quinti. ο Ex Auctore Lib. de Circulo Prop. 45. π 31. tertij. ρ 15. def. pri. Initium Resolutionis, & finis Composit.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Quoniam igitur MI æqualis est MB, & eadem
MI cum GI facit angulos rectos in I; ergo
Centro M interuallo M B, descriptus circulus transibit per punctum protracta NH, ad partes H, vbi recta eductæ ex M & G faciunt angulos rectos, & ab ipsa GI, circulus tangitur, ergo.
Vt D N ad N B, ita D G ad G B ; sed
Vt D H ad & B, ita D N ad N B; ergo
Vt DG ad B G, ita D H ad & B, sed
Vt D G ad B G, ita D H ad BO ; ergo
Vt D H ad & B, ita erit D H ad B O; ergo
& B, & BO erunt inter se æquales,
Sunt autem TV, & B inter se æquales, ergo
BO, & TV erunt æquales inter se
Communi addita BV ; ergo
OV æquabitur BT, sed
BT est æqualis D H; ergo
OV æquabitur DH; est autem
OT parallela ipsi DH; ergo
DS erit parallela ipsi tangenti GH: vnde posita erit ordinatim ad diametrum TH, atque adeo DS erit bissecta in X, ut HY est bissecta ex hypothesi in N: vnde S Y, T B, X N, D H, erunt inter se parallelæ; scilicet
NX æquidistabit BT. sed
MB, MT semidiametri secant H Y, DS, in N, & X; ergo
Y S æquidistabit B T, sed
BT est parallela ipsi DH, ergo ducta YS erit parallela ipsi H D, cum recta per H, & D occurrant diametro QR in R; ergo
HD erit ordinatim applicata ad diametrum QR. Quòd ità se habet, &c.

Finis Resolutionis, & initium Compos.

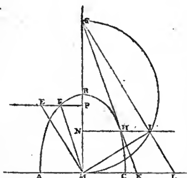
THEOREMA.

Exemplum XXVIII.

Sit semi ellipsis ABC, cuius centrum M, minor axis AC, & semimaior BM, in quo protracto ad partes B sit acceptum punctum G, à quo ducta GH, tangens perimetrum in H, protracta ad partes H occurrens in K axi minori, ductaque sit MF æquidistans tangenti GH.
Dico quadratum GH ad quadratum MF rationem habere, vt GH ad H K.

Præparatio.

SVper GM intelligatur descriptus semicirculus GIM, & ex H ad eam [a] cadat perpendicularis HN, quæ protracta ad partes H perueniat ad I peripheriæ punctum; agatur MI, item GI, quæ protracta perueniat ad L, & ex F, ducatur [b] perpendicularis FP, quæ protracta sit ad partes F in infinitum, & agatur ME æqualis MI.



a 12. primi.
b 12. primi.

Resolutio.

QVoniam igitur est, vt quadratum GH ad quadratum æquidistantis MF, ita GH ad HK; ergo vt GH ad MF, [a] ita MF ad HK; ergo vt HK ad MF, [b] ita MF ad GH, sed vt ME ad GI, ita MF ad GH, vt mox constabit; ergo vt ME ad GI, [c] ita HK ad MF, sed vt IL ad ME, [d] ita ME ad GI, (est [*] enim ME æqualis MI) ergo vt IL ad ME, ita HK ad MF, [e] permutando [f] vt IL ad HK, ita ME ad MF, sed vt IL ad HK, [g] ita GI ad GH; ergo erit vt GI ad GH [h] ita ME ad MF, cùm igitur anguli MFP, & GHN æquales [i] sint, atque adeò reliqui GHI, & MFE; ergo triangulum GHI simile [k] erit triangulo MFE; quare erit, vt GH ad HI, [l] ita MF ad FE, est autem, vt GH ad NH, [m] ita MF ad FP; ergo vt NH ad HI, [n] ita FP ad EF; conuertendo ergo vt HI ad NH, [o] ita EF ad FP; & componendo vt NI ad NH, [p] ita EP ad FP; & conuertendo, vt NH ad NI, [q] ita FP ad EP; & permutando [r] vt NH ad FP, ita NI ad EP; ergo puncta I,B,E, [s] pertinent ad circulum &c.

a per conuersi corol. 20. sexti
b 3 cor. 4 quit.
c 11. quinti,
d 8. sexti, & 7. quinti.
* ex anteced.
e 11. quinti.
f 16. quit. & corol. 4. eiusd.
g 2. sexti, & 16. quinti.
h 11. quinti.
i 29. & 32. primi.
k 7. sexti.
l 4. sexti.
m 4. sexti.
n per subductionē æqualium rationū.
o cor. 4 quit.
p 18. quinti.
q cor. 4. quit.
r 16. quinti.
s Ex doctrina Conica.

L E M M A.

Quod autem sit vt ME ad GI, ita MF ad GH sic ostendo. *Quoniam triangula GNH, MFP, [a] sunt æquiangula, vnde anguli ad H, & F sunt æquales; ergo vt GH ad HN, [b] ita MF ad FP, sed ex natura ellipseos, cuius axis idem sit cum diametro circuli, est, [c] vt NH ad HI, ita PF ad FE, ergo ex æquali vt GH ad HI, [d] ita MF ad FE: sunt autem anguli GHI, MFE æquales; ergo triangula GHI, & MFE [e] erunt similia; ergo [f] vt ME ad MF, ità GI ad GH; & permutando vt ME ad GI, [g] ità MF ad GH.* Quod &c.

a 29. & 32. primi.
b 4. sexti.
c Ex doctrina Conica.
d 21. quinti.
e 6. sexti.
f 4. sexti.
g 16. quinti.

Compositio.

QVoniam MF est parallela ipsi GH; ergo angulus MGH [α] æquabitur angulo PMF, sed anguli ad P, & N sunt recti, atque adeò [β] æquales, ergo reliquus [γ] æquabitur reliquo; itaque angulus MFP æquabitur angulo GHN; quare triangula GNH, MPF erunt similia; ergo vt GH ad HN, [δ] ità MF ad FP. Quoniam verò MI, MB, & ME, [ε] sunt inter se æquales; ergo puncta I,B,E, [ζ] pertinent ad circulum; ergo vt NH ad FP, [η] ita NI ad EP, & permutando vt NH ad NI, [θ] ita FP ad EP; & conuertendo, vt NI ad NH, [ι] ita EP ad FP; & diuidendo, vt HI ad NH, [κ] ita EF ad FP, & conuertendo, vt NH ad HI, [λ] ita FP ad EF; erat autem vt GH ad NH, ita MF ad FP; ergo ex æquali, vt GH ad HI, [μ] ita MF ad FE, sed anguli MFP, & GHN sunt æquales; ergo reliqui GHI, MFE [ν] æquales erunt, circa quos latera cùm sint proportionalia; ergo triangulum GHI simile [ξ] erit triangulo MFE; ergo erit vt GI ad GH, [ο] ita ME ad MF, sed vt GI ad GH, [π] ita IL ad HK; ergo vt IL ad HK, [ρ] ita ME ad MF; & permutando vt IL ad ME, [σ] ita HK ad MF, sed, vt IL ad ME, [τ] ita ME ad GI; est enim ME æqualis MI, estque vt IL ad MI, [υ] ita MI ad IG; ergo, vt ME ad IG, [φ] ita HK ad MF; sed vt ME ad GI, ita MF ad GH, vt vidimus; ergo vt HK ad MF, [χ] ita

α 29. primi.
β 12. axiom. pri
γ 32 primi.
δ 4 sexti.
ε Ex antecedenti, & ex constructione.
ζ 9. tertij.
η Ex doctrina Conica.
θ 16. quinti.
ι cor. 4. quit.
κ 17. quinti.
λ cor. 4. quit.
μ 22. quinti.
ν 1. ax. pr.
ξ 6. sexti.
ο 4. sexti.
π 2. sexti, & 16. quinti.
ρ 11. quinti.
σ 16. quinti.
τ 2. sexti, & 7. quinti.
υ 8. sexti.
φ 11. quinti.
χ 11. quinti.

ↄ cor 4. quin. MF ad GH; & conuertendo, vt GH ad MF, ↄ ita MF ad HK; ergo vt quadratum GH ad ⁂ cor. 20 sext. quadratum æquidistantis MF, ⁂ ita GH ad HK.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Initiũ Resolutionis, & finis Compositionis.

Quoniam igitur est vt quadratum GH ad quadratum æquidistantis MF, ita GH ad Hk; ergo
Vt GH ad MF, ita MF ad HK; ergo
Vt HK ad MF, ita MF ad GH, sed
Vt ME ad GI, ita MF ad GH, ergo,
Vt ME ad GI, ita HK ad MF, sed
Vt IL ad ME ita ME ad GI, (est enim ME æqualis MI) ergo
Vt IL ad ME ita HK, ad MF; & permutando
Vt IL ad HK, ita ME ad MF, sed
Vt IL ad Hk, ita GI ad GH; ergo erit
Vt GI ad GH, ita ME ad MF. cum igitur anguli MFP, & GHN æquales sint, atque adeò reliqui GHI, & MFE; ergo
Triangulum GHI simile erit triangulo MFE; quare erit
Vt GH ad HI, ita MF ad FE; Est autem
Vt GH ad NH, ita MF ad FP; ergo
Vt NH ad HI, ita FP ad FE; conuertendo ergo
Vt HI ad NH, ita EF ad FP, & componendo
Vt NI ad NH, ita EP ad FP, & conuertendo
Vt NH ad NI, ita FP ad EP, & permutando
Vt NH ad FP, ita, NI ad EP, ergo
Puncta I, B, E, pertinent ad circulum. Quod ita se habet ex constructione.
Et quoniam vt GH ad NH, ita MF ad FP, & anguli MPF, GNH sunt inter se æquales, vtpote recti; propterea
Triangula MFP, GHN, erunt inter se similia; ergo

Finis Resolutionis, & initium Compositionis.

Angulus MFP æquabitur angulo GHN, & reliquus æquabitur reliquo, nempe angulus HGN æquabitur angulo FMP. Quod ita se habet, ob parallelas GH, FM.

THEOREMA.

Exemplum XXIX.

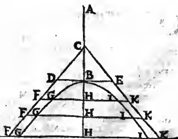
*Sit hyperbole GBI, cuius diameter ABH, latus transuersum AB, centrum C, recta DE tangat verticem B, cui ductæ sint æquidistantes Fk. sic Vt rectangulũ AHB, ad rectangulũ AHB, plus quadrato CB. ita quadratum HG ad quadratum HF; erit * enim CDF linea recta.*

* quod ab alijs ostensũ est.

Dico CF semper propius accedere ad perimetrum hyperboles, nunquam tamen punctum F coincidere cum puncto G.

Resolutio.

Quoniam recta HI maior est, quàm recta HI; ergo quadratum HI maius erit quadrato HI; sed rectangulum AHB maius est rectangulo AHB, vt constat ex elementis; ergo si rectangulum AHB superat rectangulum AHB, etiam quadratum HI superat quadratum HI. Quod ita se habet; nam vt rectangulum AHB ad rectangulum AHB, ita quadratum HI ad quadratum HI, ex natura hyperboles.



Rursus quoniam FH maior est, quàm FH, sed CH maior est, quàm CH; ergo si CH superat CH, ita etiam FH superat FH. Quod ita se habet; vt enim est CH ad CH, ᵃ ita FH ad FH.

a 4. sexti.

Rursus

Rursus quoniam FG maior est, quàm FG, sed rectangulum IFG æquale est rectangulo IFG, vt mox demonstrabimus; ergo tota FI maior [b] erit, quàm tota FI. Quod ita se habet; est enim HI maior, quàm HI, & FH maior quàm, FH. [b 16 sexti.]

Rursus quoniam asymptoti semper propius accedunt in infinitum ad perimetrum ipsius hyperboles; propterea, eò erit minor FG, quò magis ab ipsa DE recedit, & eò erit maior FI, quò magis recedit ab eadem DE, semper in infinitum procedendo. Quod ita se habet ex modo demonstratis.

Tandem quoniam punctum F nunquam congruit puncto G, ergo recta FH semper maior erit recta GH; ergo quadratum FH semper maius erit quadrato GH. Quod ita se habet; quadratum enim FH semper [c] excedit quadratum GH, eodem rectangulo FGK, hoc est IFG. [c 6 secundi.]

L E M M A.

Quod autem rectangulum IFG æquale sit rectangulo IFG sic ostendo

Quoniam enim est, vt quadratum CH ad quadratum CH, [a] ita quadratum FH ad quadratum FH, si à proportionalibus proportionalia auferantur, quæ remanent [b] erunt proportionalia; vt autem rectangulum AHB ad rectangulum AHB, [c] ita quadratum GH ad quadratum GH, hæc igitur proportionalia si à proportionalibus auferantur, quæ remanet erunt proportionalia; remanent [d] autem quadrata CB, & rectangula FGK; ergo vt quadratum CB ad quadratum CB, ita rectangulum FGK ad rectangulum FGK, sed quadratum CB est æquale quadrato CB; ergo rectangulum FGK æquabitur rectangulo FGK, sed rectangulum FGK æquale est rectangulo IFG, ergo rectangulum IFG æquabitur rectangulo IFG. [a 4. sexti 16. quinti, & 19. sexti. b ex elementis. c ex doctrina Conica. d 6. secundi.]

Compositio.

QVoniam igitur est vt rectangulum AHB ad rectangulum AHB, ita quadratum HI ad quadratum HI; ex natura hyperboles; propterea si rectangulum AHB maius est rectangulo AHB, etiam quadratum HI maius erit quadrato HI, sed rectangulum AHB maius est rectangulo AHB; ergo quadratum HI maius erit quadrato HI; ergo recta HI maior erit, quàm recta HI.

Rursus quoniam est, vt CH ad CH, [a] ita FH ad FH; propterea si CH maior est, quàm CH, etiam FH debet esse maior quam FH, sed CH maior est quam CH; ergo, & FH maior erit quam FH. [a 4. sexti, & 16. quinti.]

Rursus quoniam HI maior est, quàm HI, item FH maior est, quàm FH, vt vidimus; ergo tota FI maior erit, quàm tota FI; sed rectangulum IFG æquale est rectangulo IFG, vt superiùs ostendimus; ergo FG maior erit, [β] quàm FG. [β 16 sexti.]

Rursus quoniam sic in infinitum procedendo, eò est maior FI, [γ] quò magis recedit ab ipsa DE, & eò est minor FG, quò magis ab eadem DE recedit; propterea semper asymptoti propiùs accedent in infinitum ad perimetrum ipsius hyperboles. [γ eadem demonstratione.]

Tandem, quoniam semper quadratum FH [δ] excedit quadratum GH eodem rectangulo IFG, seu quod idem est FGK; ergo quadratum FH semper maius erit quadrato GH, & recta FH maior semper erit recta GH; ergo punctum F nunquam congruet puncto G. Quod oportebat ostendere. [δ 6. secundi.]

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Quoniam recta HI maior est quàm recta HI, ergo [Initium Resolutionis, & finis Compositionis.]
Quadratum HI maius erit quadrato HI; sed
Rectangulum AHB maius est rectangulo AHB, vt constat ex elementis; ergo
Si rectangulum AHB superat rectangulum AHB, etiã quadratum HI superat quadratum HI.
Quod ita se habet: nam vt rectangulum AHB ad rectangulum AHB, ita quadratum HI ad quadratum HI ex natura hyperboles.
Rursus quoniam FH maior est quam FH, sed
CH maior est quam CH; ergo

Si CH superat CH, ita FH debet superare FH. Quod ita se habet; vt enim est CH ad CH, ita FH ad FH.

Rursus quoniam igitur FG minor est quam FG; sed

Rectangulum IFG aquale est rectangulo IFG, ergo

Tota FI maior erit, quàm tota FI. Quod ita se habet; est enim HI maior, quàm HI, & FH maior, quàm FH

Rursus quoniam autem asymptoti semper propius accedunt in infinitum ad perimetrum ipsius hyperboles; propterea

Eò erit minor FG, quò magis ab ipsa DE recedit, &

Eò erit maior FI, quò magis ab eadem DE recedit, semper in infinitum procedendo. Quod sic se habet ex natura &c.

Tandem quoniam punctum F nunquam congruit puncto G; ergo

Recta FH semper maior erit recta GH; ergo

Finis Resolutionis, & initium Compositionis. *Quadratum FH semper maius erit quadrato GH. Quod ita se habet; quadratum enim FH semper excedit quadratum GH eodem rectangulo FGH, seu IFG.*

THEOREMA.

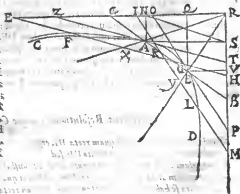
Exemplum XXX. *Si rectae quaedam contingant hyperbolen cum asymptotis conuenientes à punctis verò contactuum ducantur parallela vtrique asymptoto, & diametri, per has rectas vnaquaeque diameter sibi vendicat quatuor triangula aequalia, tùm inter se, tùm ijs, quae per huiusmodi lineas, alijs diametris debentur.*

Sit hyperbole CABD, cuius centrum R, diametri verò, RAX, RBY; asymptoti autem RE, RM: recta verò ZT tangat hyperbolen in A, quemadmodum OP in B: ex A agatur AN parallela asymptoto RM, & ex B ducta sit BV parallela asymptoto RE; per A ducta AS parallela ipsi ER, & per B acta BQ parallela ipsi RM.

Dico diametro RA quatuor deberi triangula ZAN, NAR, RAS, SAT, facta per supradictas lineas, tùm inter se aequalia, tùm aequalia ijs totidem, quae alteri diametro RB debentur, scilicet OBQ, QBR, RBV, VBP, & sic de alijs diametris in infinitum.

Tangenti ZT per quodcunque diametri punctum X agatur parallela EXH, occurrens perimetro ipsius hyperboles in punctis F, G: insuper per quodcunque diametri punctum Y agatur IYM occurrens perimetro hyperboles in K, & L, & per A, B, ducta $\alpha\beta$

Resolutio.



Littera K in schemate intelligatur aliquantulum eleuatiùs suisse. Conuersum. QVoniam igitur triangulum ZAN aequale est triangulo ANR, sunt autem inter easdem parallelas AS, ZR; ergo basis ZN [a] aequabitur basi NR,

a 1. *sexti.* b 2. *sexti.* sed vt ZN ad NR, [b] ita ZA ad AT; ergo [*] ZA aequabitur AT, sed EX aequalis est XH, vt mox constabit; ergo vt ZA ad AT, ita EX ad XH;

c 4. *sexti.* Est autem vt AR ad AT, [c] ita XR ad XH, ergo per subductionem aequalium rationum erit, vt ZA ad AR ita EX ad XR. Quod ita se habet [d] ex Elementis; est enim EX parallela ipsi ZA.

d 4. *sexti.*

LEMMA.

Quod autem EX sit aequalis XH sic ostendo. *Quoniam FG*

aequidi-

æquidistat ZT hyperbolen tangenti in A, ergo FG [a] erit ordinatim applicata ad diametrum RX, ergo tota EX [b] æquabitur toti XH; itemq; interceptum segmentum EF [c] æquale intercepto segmento GH,

a ex Elem. Co. b ex ijsdem. c ax. primi.

Rursus quoniam triangulum ANS æquale est triangulo NSR; ergo vtrunque triangulorum ANS, NSR [a] est dimidium figuræ ANRS. Quod ita se habet; cùm enim AN, & RS sint inter se parallelæ, quemadmodum AS, & NR; propterea figura ANRS [b] est parallelogrammum, cuius vtrunque prædictorum triangulorum [c] est dimidium.

a 7. ax primi. b 35. def. pri. c 34. primi.

Rursus, quoniam triangulum AST æquale est triangulo ARS, sunt autem inter easdem parallelas; ergo basis RS [d] æquabitur basi ST, sed vt RS ad ST, [e] ita ZA ad AT; ergo ZA æquabitur AT. Quod ita se habet, nam ZT intra asymptotos comprehensa tangit hyperbolen in A.

d 1. sexti. e 2. sexti.

Tandem quoniam triangulum ARS æquale est triangulo BQR; ergo & eorum dupla æqualia erunt; quamobrem rectangulum ANRS [f] æquabitur rectangulo BQRV; ergo vt BQ prima ad AN secundam, [g] ita AS tertia ad BV quartam; sed vt AS ad BV, [h] ita Aβ ad Bβ: estque vt BQ ad AN, [i] ita αB ad αA: ergo erit, vt αB ad αA, [k] ita Aβ ad Bβ. Quod ita se habet; sunt enim intercepta segmenta αA, & Bβ inter se æqualia; [l] quare vt αB ad αA, ita Aβ ad Bβ. Sic de alia diametro, &c.

f 34. primi. g 16. sexti. h 4. sexti. i 4. sexti. k 14. quinti. l ex El. Conic.

Compositio.

QVoniam igitur EX est parallela ZA; ergo vt EX ad XR, [α] ita ZA ad AR, sed vt XR ad XH, [β] ita AR ad AT; ergo ex æquali, vt EX ad XH, [γ] ita ZA ad AT, sed EX est æqualis XH, ergo [*] ZA æquabitur AT, sed vt ZA ad AT, [δ] ita ZN ad NR; ergo ZN æquabitur NR ergo triãgulũ AZN [ε] æquabitur triangulo ANR: cùm inter easdẽ sint parallelas ZR, AS.

α 4. sexti. β 4. sexti. γ 22. quinti. δ 2. sexti. ε 1. sexti.

Rursus quoniam AN est parallela RS, & AS est parallela RN; ergo AN RS [ζ] est parallelogrammum, cuius vtrunque triangulorum ANS, NSR [η] est dimidium; ergo triangula ANS, & NSR [θ] sunt inter se æqualia.

ζ 35. def. pri. η 34. primi. θ 7. ax. primi.

Rursus quoniam vt ZA ad AT, [ι] ità RS ad ST ob parallelas ZR, & AS; est autem ZA æqualis AT; ergo RS æquabitur ST; quare triangulum ARS [κ] æquabitur triangulo AST.

ι 2. sexti. κ 1. sexti.

Tandem quoniam est vt αB ad αA, [λ] ita Aβ ad Bβ; est autem, vt αB ad αA [μ] ita BQ ad AN; ergo vt Aβ ad Bβ, ita [ν] BQ ad AN: sed vt Aβ ad Bβ, [ξ] ita AS ad BV; ergo erit vt BQ prima ad AN secundam, [ο] ita AS tertia ad BV quartam; Quamobrẽ rectangulum ANRS [π] æquabitur rectangulo BQRV; ergo, & eorum dimidia æqualia erunt, ac proinde triangulũ ARS [ρ] æquabitur triangulo BQR &c. Quod oportebat ostendere. Sic de alia diametro. &c.

λ ex El. Con. μ 4. sexti. ν 11. quinti. ξ 4. sexti. ο 11. quinti. π 16. sexti. ρ 34. primi.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Quoniam triangulum AZN æquale est triangulo ANR, & sunt inter easdem parallelas; ergo
Basis ZN æquabitur basi NR, sed
Vt ZN ad NR, ita ZA ad AT, ergo
* *ZA æquabitur AT, sed*
EX æqualis est XH, ergo
Vt ZA ad AT, ita EX ad XH: est autem
Vt AR ad AT, ita XR ad XH, ergo per subductionem æqualium rationum
Erit, vt ZA ad AR, ita EX ad XR. Quod ita se habet.
Rursus quoniam triangulum ANS æquale est triangulo NSR, ergo
Vtrunque triangulorum ANS, NSR est dimidium figuræ ANRS. Quod ita se habet; cùm AN, & RS sint inter se parallelæ &c.
Rursus quoniam triangulum AST æquale est triangulo ARS, sed
Prædicta triangula inter easdem sunt parallelas; ergo
Basis RS æquabitur basi ST, sed
Vt RS ad ST, ita ZA ad AT, ergo
ZA æquabitur AT. Quod ita se habet.
Tandem quoniam triangulum ARS æquale est triangulo BQR, ergo
Et eorum dupla æqualia erunt; ergo

Initium Resolutionis atque finis Composit.

Rectan-

Rectangulum ANRS aequabitur rectangulo BQRV, ergo
Vt BQ prima ad AN secundam, ita AS tertia ad BV quartam, sed
Vt AS ad BV, ita Aβ ad Bβ, &
Vt BQ ad AN, ita αB ad αA, ergo
Erit vt αB ad αA, ita Aβ ad Bβ, Quod ita se habet; sunt enim intercepta segmenta αA, & Bβ inter se aequalia; quare vt αB ad αA, ita Aβ ad Bβ.

Finis Resolutionis, & initium Compos.

SCHOLION.

Non pigebit hic adiungere quaedam in supradictorum gratiam, atque adeò admonere lectorem de eo, quod diximus supra in Resolutione Theorematis, quod inter exempla decimum octauum obtinuit locum; Erat autem huiusmodi.

Aduerte quod in praedicto exemplo 18 praetermissa sunt verba haec *ita IK in directũ cum F* typographi quidẽ incuria.

Sint circuli FOP, EPI, interius tangentes circulum ABE in puncto F. Sint deinde circuli secantes priores iam dictos in punctis F, E, Item IK in directum cum F; Ducta sit FC occurrens peripherijs in punctis H,Q,L,R,C. Dico esse, vt HL ad LC, ita QR ad RC, atque ita omnia intercepta linearum segmenta inter arcus circulorum tangentium proportionalia esse omnibus interceptis inter arcus circulorum secantium.

Admonitio ad Lectorem pro ijs, quae dicta sunt in Exemplo 18.

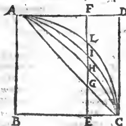
Ibi igitur ex eo, quod latera FB, FC sint proportionaliter secta in punctis S,R,P,Q, deduximus rectas BC, SR, PQ, esse inter se parallelas, quod non sic vsurpandum, quasi id à nobis deductum fuerit ex simplici proportionali diuisione FB, FC in punctis praedictis S,R,P,Q, mala siquidem foret consecutio, cùm passim contingat, vt rectae quaedam proportionaliter diuisae sint, & rectae nihilominus connectentes diuisionum puncta non sint parallelae; sed nos id ex hac speciali diuisione proportionali deduximus, facta nimirum à circulorum peripherijs transeuntibus per punctum F, nunquam enim continget, vt duae illae rectae sint proportionaliter sectae ab huiusmodi circumferentijs, quin ductae illae diuisionum puncta connectentes sint parallelae. Neque contra parallelae erunt, nisi illa segmenta fuerint proportionalia &c.

Haec porrò demonstrare magni laboris non est, ac propterea tamquam ex Elementis petenda praetermittimus, Nos haec eadem ostendimus in libro de Circulo.

Humanum quidem ingenium plùs aequo luxurians praesens haec aetas inspexit; non enim contentum ijs, quae hactenus in Geometricis magna dexteritate, summaque perspicacitate excogitauit Antiquitas, altius progrediens per huiusmodi disciplinarum Oceanum, fortunato sydere nauigans, veteres fines transiliuit; Quamobrem Conicas illas decantatas sectiones pertinaci labore meditans praeclarissima quaedam est consecutum; qua in re egregiè se gessit P. Bonauentura Cauallerius Mediolanensis, in hisce studijs praeclarissimum Italiae lumen, cui successit D. Stephanus de Angelis Venetus, Geometra prestãtissimus, haud mediocri cum laude, quorum ope instituta est de ijs amplissima tractatio, initio facto à parabola, velut à simpliciori; De quibus breuiter nonnulla hìc in medium afferam, vt hac in re itidem pateat aditus Analystae.

P. Bonauentura Cauall. viro commendatur.

D. Stephani de Angelis Laudes.



Sit quodcunque parallelogrammum BD, & alterutri laterum CD, BA ducta sit parallela EF, itemque diameter AC, quae eam secet in G; erit autem, vt DA ad AF, ita CD, atque adeò EF ad GF, ob similia triangula CAD, GAF: atque rectam AC diagonalem primam appellant. Deinde, vt quadratum AD ad quadratum AF, ita sit EF ad HF, quod intelligendum est fieri in omnibus parallelis ipsi CD, adeò videlicet, vt omnes homologae ipsi HF terminentur ad curuam AHC, & hanc curuam AHC diagonalem secundam appellant. Deinde, vt cubus AD ad cubum AF, ita EF ad IF, quod intelligendum est fieri vbique in parallelis ipsi CD, ita vt omnes homologae ipsi IF terminentur ad curuam AIC, & curuam hanc AIC tertiam diagonalem appellant. Deinde, vt quadrato-quadratũ AD ad quadrato-quadratum AF, ita EF ad LF, quod vbique fieri intelligendum in parallelis ipsi CD, adeò vt omnes homologae ipsi LF terminentur ad curuam ALC; quam quidem quartam diagonalem appellant; Et sic ascendendo per infinitas potestates, continua ratione intelligendum est. Nec dissimiliter triangulum AGCD

vocant

vocant primum spatium diagonalium parallelogrammi BD, trilineum autem AHCD, secundum spatium; trilineum AICD tertium; trilineum ALCD, quartum,& ita deinceps.

Triangulum autem BAC duplicatum ad partes BA appellarunt parabolam linearem, seu primam; spatium verò BA HC duplicatum ad partes BA, appellarunt parabolam secundam, siue quadraticam; & spatium BAIC duplicatum ad partes BA, appellarunt tertiam parabolam, siue cubicam. Præterea spatium BALC duplicatum ad partes BA nuncuparunt quartam parabolam, siue quadrato-quadraticam, & in infinitum continuata serie, adeò vt omnia prædicta spatia vocentur infinitæ parabolæ.

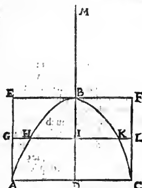
Spatium autem CGFD primum trapetium, siue lineare vocarunt; CHFD secundum, seu quadraticum; CIFD, tertium,siue cubicum; CLFD, quartum,siue quadrato-quadraticum.

GAF dixerunt trilineum lineare ad verticem,HAF trilineum quadraticum ad verticem, & sic deinceps.

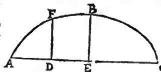
Harum autem parabolarum infinitarum, & trilineorum infinitorum, A statuerunt verticem, BA diametrum parabolarum infinitarum, quarum basim dixerunt duplicatam BC; At vero CD,basim infinitorum trilineorum,& trapetiorum, & AD, diametrum infinitorum trilineorum, cùm sit eorundem duplicatorum diameter.

Infinitarum parabolarum varia, diuersaque symptomata ostenderunt, & in horum demonstrationibus, non minus ac in superioribus adhiberi quidem analytica potest industria.

Non solum dari possunt infinitæ parabolæ modo iam explicato, sed etiam infinitæ hyperbolæ; vt in appositio schemate. Si fuerit quemadmodum rectangulum M D B, supposito quòd M B, sit diameter transuersa, ad rectangulum M I B, ita A D, semiordinatim applicata, ad G I, itidem semiordinatim applicatam, fiet hyperbole, quæ linearis dicitur. Deinde si fuerit, vt rectangulum M D B, ad rectangulum M I B, ita quadratum A D, ad quadratum G I, erit secunda hyperbole, nempe quadratica; Quod si in eadem ratione rectangulorum fuerit, vt cubus A D, ad cubum G I, fiet tertia hyperbole, nempe cubica; & si fuerit etiam in eadem ratione rectangulorum, ita quadrato-quadratum A D, ad quadrato-quadratum G I, fiet quarta hyperbole, nempe quadrato-quadratica; & sic deinceps in infinitum secundùm ordinem ipsarum potestatum. *Non solum dantur infinitæ parabolæ, sed etiam infinitæ hyperbolæ.*



Nec dissimiliter in ellipsi modo consentaneo eius naturæ intelligendum est. Vt si fuerit semiellipsis A B C, cuius axis A C, centrum E,sumptoque in AC, quouis puncto D, & existente semiaxe E B, secundario, ad punctum D sit semiordinatim applicata D F; si fuerit, vt rectangulum A E C, ad rectangulum A D C, ita E B ad DF, puncta quidem A,F,B,C, ad parabolen, non ad ellipsim pertinebunt. Quòd si fuerit, vt rectangulum AEC ad rectangulum A D C, ita quadratum EB ad quadratum DF, puncta A, F, B, C, ne dum ad ellipsim, sed etiam ad circulum pertinebunt. Si verò fuerit in eadem ratione scilicet, vt rectangulum A E C ad rectangulum A D C, ita cubus E B ad cubum DF, fiet ellipsis cubica; quod si fuerit vt rectangulum AEC ad rectangulum ADC, ita quadrato-quadratum E B ad quadrato-quadratum D F, fiet ellipsis quadrato-quadratica, & sic in infinitum, secundùm potestatum ordinem. *Dantur etiam infinitæ ellipses.*



Verùm, & alio pacto huiusmodi sectiones considerari possunt; propterea quòd si basis non fuerit determinata, sed accepto puncto in recta, quæ habeat rationē diametri, & in eâdem acceptum sit aliquod punctum pro vertice, statutaque sit semiordinatim applicata, atque seruetur proportio iam dicta, secundùm amplitudinem parabolæ semper descendendo, ita vt ratio segmenti diametri, segmenti inquam minoris, initio facto à vertice, ita ordinatim ducta ad aliam fiat linearis parabole; Quòd si fuerit, vt idem segmentum ad idem *Aliæ etiam sectiones conicæ considerantur.*

segmen-

segmentum, ita quadratum semiordinatæ iam dictæ ad quadratum semiordinatæ, fiet parabole quadratica; & vt idem segmentum ad segmentum, ita cubus iam dictæ semiordinatim applicatæ ad cubum alterius, fiet parabole cubica, & sic deinceps. Quod etiam de alijs sectionibus intelligendum est.

Hæc autem consideratio amplissima quidem est, dignaque, vt in ipsa omnis labor, omneque tempus insumatur; tamen id non dissimulandum profectò, multò magis operæ esse pretium in ea incumbere studia Geometrica, quibus naturæ opera nos assequi valeamus, & ad ipsius intimiores recessus peruadere possimus.

Cæterum analytica industria, vt in his locum obtineat, veluti methodus quædam vniuersalis accommodari debet particulari, sine qua Geometræ nullus est aditus in supradictis; huiusmodi siquidem contemplatio indiuisibilium methodum exposcit, quæ sanè peculiaris est, ac opportuna ad præcipua quædam Theoremata demonstranda, de qua nobis in sequentibus futurus est sermo, vbi antiquam methodum resoluendi, vniuersalissimam quidem, huic peculiari aptabimus.

De Reliquis Lineis.

Præter conicarum sectionum lineas alia etiam innumeræ supersunt.

PRæter tres conicarum sectionum lineas, quarum superiùs meminimus, ducentium ortum scilicet, vel à coni sectione, vel in plano à puncto subeunte diuersos motus, infinitæ profectò sunt multitudine, quarum vnamquamque propria symptomata consequuntur, è quibus ad Problematum difficillimorum effectiones perficiendas, plurimas adinuenimus, quæ ob suas affectiones, ad propositum conducentes videbantur; de quibus Secundo Libro differendum.

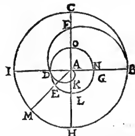
De lineis quas Auctor excogitauit in secundo libro differendum.

Linea helica seu spiralis ex antiquis lineis admodū elegans est. Eius genesis.

E veteribus lineis elegans admodum ea est, quam Helicam, seu Spiralem appellarunt, cuius genesis, iam pridem vulgata fuit. Si nos enim intelligamus rectam lineam, eiusque extremum vnum esse fixum, ac immobile, extremum autem alterum motu ęquabili, in orbem cieri, donec redierit ad punctum, vnde cæpit moueri; interim verò motu etiam ęquabili punctū ab extremo ipsius lineæ immobili, ab illo scilicet ad id quod in orbē agitur, feratur motu vt dicebā æquabili super ipsam rectā lineam, ita vt ad alterum eiusdem lineæ extremum mobile perueniat, cùm mobile extremum ad eundem locum redierit; Intelligemus enim inde lineam quandam fuisse descriptam, videlicet à puncto delato motu ęquabili per rectam lineam, itemque ęquabili ad motum eiusdem lineæ delatæ in gyrum secundum extremum vnum, altero quidem manente, ac propterea hæc, quam diximus linea, quæque spiralis appellatur, ortum à puncto subeunte duplicem motum æquabilem, trahit. Hæc porro spiralis linea est, quæ in suo genere primaria dicitur; & hæc est linea spiralis, de qua Archimedes dicit.

Linea spiralis descriptio ab Archimede tradita.

Si in plano recta linea altero termino manente æquali velocitate circumlata, redeat deinceps eò, vnde profecta est: simul verò cum linea circumlatā feratur punctum pari velocitate sibi ipsi secundum rectam lineam ducto, motus initio ab immobili termino: istud punctum, lineam spiralem in plano describet.



SIt circulus cuius centrum A, semidiameter AB, manenteque puncto A, recta quidem AB in gyrum agatur secundùm extremū B, describens circumferentiam BCIH, motu tamen ęquabili, ita vt ęqualibus temporibus æqualia spatia percurrat, dumque moueri cæpit in gyrum extremum B, incipiat etiā moueri punctum per rectam AB, ex A in B motu itidem æquabili, ita vt cùm hoc peruenerit ad punctum extremum B, idem extremum sua reuolutione ad eundem locum, vnde profectum erat, redierit, atque adeò recta AB ad eandem positionem reuersa sit; itaque punctum illud delatum per rectam AB subiens duplicem illum motum æquabilem, sui motus tramitem relinquendo, lineā, quam Archimedes spiralem appellauit, AKDFB, designet, ita vt si circumferentiam integram BCIH B, diuisam intelligamus in viginti quatuor partes æquales, & in totidem etiam partes concipiamus rectam AB, di-

Superioris definitionis explicatio.

uisam

uisam fuisse; quando extremum lineæ rectæ B confecerit secundùm peripheriam, vnam è viginti quatuor partibus, punctum quoque per A B, vnam è viginti quatuor partibus confecerit, in quas ipsamet A B diuisa erat, & sic deinceps, ità vt cùm lineæ extremum B sua gyratione peruenerit ad punctum H, confecta scilicet quarta parte totius circumferentiæ, etiam punctum ex A in B quartam partem ipsius A B confecerit; Punctum autem A manens ab Archimede principium spiralis nuncupatur; Positio autem lineæ, à qua incipit recta A B circumferri, principium circulationis appellatur.

Linea AM, repræsentat semidiametrū mobilem &c. & circumfer. NEDOB, bisecare intelligatur semidiametros in D &c. de quo infra.

Spiralis principium quid. Circulationis principium quid.

Huius varia symptomata sunt, quorum aliqua Archimedes ingeniosa contemplatione est persecutus, etsi in quibusdam videatur defecisse, siquidem non omnibus probatur illa demonstrandi ratio per explosum excessum, atque defectum, nec demonstrationis vis satis perspicua existimatur. Sed nos de his infra, agentes de diuersis methodis, quibus Mathematici hucusque vsi sunt; solum hìc illud videtur addendum, propositiones primam, & secundam, itemque decimam secundam, atque adeò inde deductas haud purè Geometricas esse, sed Physico-Geometricas; Siquidem in ijs adhibetur motus, & tempus, à quibus purus Geometra abstinet, omnisque consideratio de magnitudinibus instituta, cum ordine ad illa, non tam Geometrica, quàm Physico-Geometrica dicenda est; condonandum tamen sibi aliquid existimauit Archimedes, quòd huius lineæ genesis à motu pendeat; sed nùm id satisfaciet? Circulus quoque à motu originem ducit; Et si trianguli rectanguli vno latere circa rectum manente circumuoluatur integra reuolutione fit conus, cuius basis est circulus descriptus ex reuolutione alterius lateris. Vel si sit circulus in plano descriptus punctum autem in sublimi acceptum, à quo perpendicularis cadat in centrum ipsius, si ab huiusmodi puncto recta quædam intelligatur, cuius extremo manente in puncto iam dicto in orbem acta, circuli peripheriam abradat, gignitur inde conus, cuius basis est ille circulus, cono autem disiecto per planum basi æquidistans, fit sectio communis circulus, cuius ortus non est à motu. Non dissimiliter de Cylindro ex reuolutione rectanguli, vno manente latere. Vel si linea recta plano, in quo circulus, perpendiculariter intelligatur insistens, sibique semper parallela incedens, circuli peripheriam abradens, gignit cylindrum, cuius sectio per planum æquidistans basi, quę erat circulus in plano descriptus, circulus itidem est, cuius ortus est sine motu, quemadmodum contingit de sectionibus conicis, quæ à communi sectione plani cum cono originem habere possunt, imò his illud speciale, quod nulla præeunte per motum descripta; per communem sectionem tantùm haberi potest, secus de circulo, vt explicuimus. Sed si de circulo tàm ampla neglecto motu, ac tempore, instituitur consideratio, cur de spirali non itidem cuius genesis non absimilis esse potest? Vt enim in plano intelligitur circulus reuolutione descriptus, & circa eius peripheriam erecta perpendiculariter plano sibimet semper parallela, circuli peripheriam abradens, cylindrum gignens, cuius communis sectio cum plano ęquidistante basi circulus est, cur imaginari non licebit spiralem primariam in plano, ita vt recta ipsi plano insistens, sibi met parallela semper incedens abradat spiralis spatij perimetrum, solidum gignat, quod non immerito Cylindrico-spirale dici posset, cuius bases, vt in Cylindro sunt duo circuli, ita in hoç forent duo spatia spiralia? Quòd si planum aliquod basi æquidistans illud secuerit, gignet spirale spatium in sui communi sectione; spiralis autem hæc ortum habet sine motu, vt itaque circulus suscipitur considerandus absque ordine ad motum, & tempus, cur hoc idem de spatio spirali fieri non posset? De his tamen hactenus;

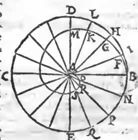
Archimedes à quibusdam reprehenditur. De spiralibus tractatio ab Archimede instituta potius Physico-Geometrica est, quàm purè Geometrica.

Spiralis ortus per communē sectionem plani cum solido.

Cylindrico spirale.

Vt autem sectiones conicas, immo & lineam quadratricem, cuius genesin veteres recognouerunt à puncto subeunte duplicem motum, Geometricè describi existimarunt per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, cur etiam hoc idem de spirali fieri non poterit omni prorsus neglecto motu ac tempore? Sit igitur circulus C D B E, cuius centrum A, semidiameter A B, eiusque peripheria diuisa in partes æquales quotlibuerit, quò autem plures extiterint, cò feliciùs operatio succedet, & ad singula puncta sectionum à centro A ductæ sint rectæ, vt AI, A H, A L, &c., & in totidem partes diuisa sit vna ex ipsis, puta AB: vnde si circumferentia fuerit diuisa in sexdecim partes, in totidem etiam

Geometrica ipsius spiralis primaria descriptio.



intel-

intelligatur diuisa semidiameter. Si quis autem vellet initium facere à puncto A, factâ A B veluti prima, in subsequenti AN sumatur pars A O quę sit decima sexta pars, in sequenti A P accipiatur A R quæ sit duę decimæ sextæ partes, in sequenti A Q sumatur A S, quæ sit tres decimæ sextæ partes &c. si quis velit initium ducere ex B sumat in A I partem F I, quæ sit decima sexta pars totius A I, & in A H sumat G H, quæ sit duæ decimæ sextæ partes, item in A L accipiat K L, quæ sit tres decimæ sextæ partes, & sic deinceps: vnde priori modo intrinsecùs, posteriori verò extrinsecùs ipsius spiralis ortus dicetur; ac propterea hunc in modum sine vllo motu licebit spiralis genesim intelligere, eandemque describere, non minus Geometricè, quàm sectiones conicas, vel ipsam quadratricem, vt paulò infra dicemus. Et quemadmodum de quadratrice symptomata demonstrantur nulla habita ratione motus, vel temporis, ita etiam de hac fieri nihil prohibet; quamobrem tractatio de spiralibus institui poterit purè Geometrica, vt suo loco constabit.

Hac autem spiralis genesi agnita, quod Archimedes ostendit beneficio motus, ac temporis, his neglectis, omninò Geometricè, qui sequitur in modum demonstrabitur, ac de alijs consimilibus; vnde esto.

THEOREMA.

*vel plures. Exemplum XXXI.

*Si in spiralem ex prima reuolutione ortam incidant duæ * lineæ à puncto, quod est principium spiralis, & producantur ad circumferentiam vsque primi circuli: eandem rationem inter se habebunt illæ in spiralem incidentes, quam arcus circuli medij inter terminum spiræ, & limites linearum productarum in circumferentia factos, sumptis in præcedentia arcubus à fine spiralis.*

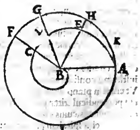
Sit spiralis linea &c.

Resolutio.

Theorema ab Archimede Physice geometricè ostensum, purè geometricè demonstratur.

** Ex Authore in Lib. de Circulo.*

Quoniam igitur est, vt BC ad BD, ita circumferentia AIF ad circumferentiam AIG, & vt BD ad BE, ita circumferentia AIG ad circumferentiam AIH, erit * vt integra circumferentia ad circumferentiam A I F, ita BF semidiameter ad spiralis radium B C. Nec dissimiliter demonstrabimus, vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A I G, ita esse semidiametrum B G ad spiralis radium B D, & vt integra circuli circumferentia est ad circumferentiam A I H, ita esse semidiametrum B H ad spiralis radium B E; ergo per conuersionem rationis, erit vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A H, ita B H, seu B A ad E H. Quod ita se habet ex natura ipsius lineæ spiralis; sic enim per puncta continuata oriri perspicuum est; vt enim A H ad integram circumferentiam, ita est E H ad semidiametrum B H, seu B A, accepto siquidem quocumque puncto in circumferentia A H. e.g. K, eadem intelligenda est ratio arcus A K ad integram circumferentiam, quæ esset ducta recta BK intercepti segmenti inter punctum K, & punctum in spirali, per quod recta BK transiret ad ipsam semidiametrum. Diuisio enim integræ circumferentiæ in partes æquales, & in totidem etiam æquales partes ipsius semidiametri intelligenda est in infinitum diuisio.



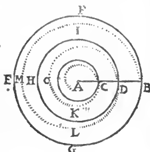
Compositio.

Quoniam itaque est, vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam H A, ita B H, hoc est B A semidiameter ad E H; erit per conuersionem rationis, vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A I H, ita eadem semidiameter B H ad spiralis radium B E. Nec dissimiliter demonstrabimus, integram circuli circumferentiam ad circumferentiam A I G, vt semidiameter BG ad spiralis radium BD, & vt integra circuli circumferentia ad circumferentiam A I F, ita esse eandem semidiametrum B F ad spiralis radium

radium B C. Quare erit, vt B D ad B E, ita circumferentia A I G ad circumferentiam A I H, & vt B C ad B D, ita circumferentia A I F ad circumferentiam A I G.

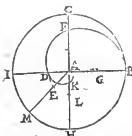
Redeamus vnde discessimus, spiralis illa, quam cum Archimede descripsimus primaria est, dari etiam potest & secundaria, tertia, & in infinitum: Vnde Archimedes. *Spiralis primaria Archimedea.*

Linea porro, quam quidem prima reuolutione pertransierit punctum latum secundùm rectam, prima vocetur: quam verò in secunda gyratione idem punctum perambulauerit, secunda, atque de alijs similiter, quæ circumvolutionibus proportionaliter denominantur. *Linea prima quid in genesi spiralis. Linea secunda quid.* Vt si fuerit recta A B, cuius extremum A sit immobile, dum extremum B mobile delatum motu æquabili peruenerit vnde discesserat; punctum verò delatum per A B, non confecerit nisi partem A C in hac prima gyratione describit primariam spiralem; si verò secundo in orbem agatur eadem linea motu æquabili, vt prius donec ad eandem positionem redierit; punctum verò delatum per A B peruenerit ad punctum D, ab huiusmodi puncto describitur spiralis secundæ reuolutionis; & si tandem in tertia reuolutione peruenerit ad B, describetur spiralis tertiæ reuolutionis. *Supradictorũ explicatio. Spiralis ACK ODLMIB. circulus primus, cuius semidiameter AC, secũ lus HD, cuius semidiameter AD, tertius EB, cuius semidiameter AB.*



Spatium autem comprehensum prima reuolutione descripta, & linea recta, quæ prima est, primum appellatur, quod verò comprehenditur sub helice secunda reuolutione descripta, & linea recta CD secunda, secundum nominatur, & sic deinceps. *Primum spatium quid. Secundum spatium &c.*

At verò si à puncto quod est principium helicis recta quæpiam agatur, ea quæ sunt ad easdem huius rectæ partes, ad quas circumuolutio fertur, antecedentia vocantur, quæ verò in contraria, dicuntur consequentia. Vt si fuerit in spiralis principio A factum initium rectæ A M, vtcunque ductæ; voluta quidem A K D F B, & insuper spatium illud ab huiusmodi recta versus D, & F &c. quod est ad easdem lineæ A M partes, dicuntur antecedentia, opposita verò voluta, quæ est à parte ELG; & spatium illud quod est deinceps ad ipsam lineam versus ELG, consequentia nuncupantur. *Antecedentia quid. Consequentia quid. Explicatio. Circulus BCIH, spiralis AKDFB.*



Circulus primæ reuolutionis dicitur primus, secundus dicitur secundus, & sic de reliquis &c. *Circulus primus. Circulus secundus &c.*

Nos autem alia ratione lineam hanc considerari posse obseruauimus, secundùm hypotheses diuersas; nam, vt supponebat Archimedes motum lineæ in orbem esse æquabilem, itemque motum puncti delati super rectam lineam æquabilem esse, ita & quemadmodum extremum B rectæ lineæ dum in orbem agitur secundum circunferentiam B H I &c. æqualibus temporibus æqualia spatia pertranseat, ita pariter punctum super rectam A B, dum ex A in B fertur, æqualibus temporibus æqualia spatia conficiat. Ita non dissimiliter nobis imaginari licebit, quòd punctum delatum super A B, feratur non motu æquabili, sed potius secundum quandam aliam rationem, ita vt spatia peracta e. g. sint vt quadrata temporum, dum interim extremum B motu æquabili fertur per circumferentiam, & sic producetur spiralis alterius naturæ ab ea, quam excogitauit Archimedes, eaque suas habebit affectiones demonstrabiles. *Alia consideratione linea spiralis secundum diuersas hypotheses. Spiralis primi ordinis. Alia species spiralis 2.*

Licebit etiam imaginari punctum illud delatum per A B æquabili motu ferri, sed lineam ipsam, atque adeo extremum B sic in orbem cieri, vt spatia peracta sint vt quadrata temporum, & sic producetur spiralis alterius naturæ à duabus commemoratis, sua quidem habens consentanea symptomata. *Alia species spiralis 3.*

Imaginari etiam possumus lineam reuolui, & punctum deferri per lineam tali motu, vt spatia peracta sint vt quadrata temporum, atque hunc in modum quatuor erunt spirales primi ordinis, quem directum appello. *Alia species spiralis 4.*

Spirales inuersi ordinis. Species spiralis inuersi ordinis.

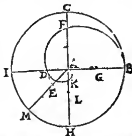
At verò inuersi ordinis, non tot species erunt, nam vna cum prima primi ordinis coincidit. Tres igitur species diuersæ: vnde si nos intelligamus extremum B motu æquabili, & punctum delatum per B A, ita ferri ex B in A, vt spatia confecta sint in duplicata ratione temporum, gignetur species inuersæ spiralis, & ea est, secundùm quosdam, quam graue descendens in plano æquatoris designaret, si tellus tantummodo reuolueretur diurno motu, vt quibusdam arrisit; si graue tamen descenderet remotis omnibus inpedimentis motu semper vniformiter accelerato ex ea altitudine, ita vt, cùm semidiameter telluris ad candem positionem rediisset ad centrum ipsius, graue peruenisset, hæc tamen fortè linea non esset, à descendente graui in predicto plano descripta. Sic etiam de alijs ad hunc ordinem spectantibus suo modo intelligendum est; vt si punctum ex B in A feratur motu æquabili, linea verò in orbem agatur motu accelerato, videlicet in duplicata ratione temporum; Vel tandem si vterque motus fuerit naturaliter acceleratus.

Species 2. Species 3.

Aliæ etiam spirales oriri possunt pertinentes ad primum ordinē, secundum diuersas combinationes.

Præterea imaginari licet motum secundùm aliam rationem, & sic prouenient spirales pertinentes ad primum ordinem, nempe quod punctum ex A in B feratur motu, ita vt tempora sint in duplicata ratione spatiorum, linea verò in orbem cieatur motu æquabili, atque ex varijs combinationibus, variæ orientur lineæ spirales.

Aliæ spirales pertinentes ad secundum ordinem.



Illud non præteribo spiralis genesim hunc in modum. Intelligamus punctum (& pertinebit ad secundum ordinem) moueri motu naturaliter accelerato ex B in A, lineam verò in orbem ferri motu naturaliter deficiente, quæcunque sit huius defectus ratio, & ex varia combinatione variari possunt; sed ea quam modo dixi describeretur à graui descendente in plano æquatoris, ex hypothesi quod tellus diurna tantum reuolutione cieretur, si ex tanta videlicet altitudine caderet, quanta ad id requireretur, vt supra explicuimus; propterea quòd graue ageretur in gyrum non ab interno principio, quasi redolens naturam totius, sed potius impulsu extrinsecùs acceptò naturaliter deficiente, vtpote mobilis reluctante natura, à qua habet, vt se primùm constituat sub minus graui; de hoc tamen suo loco.

Linea quam describeret graue descendens in plano æquatoris ex hypothesi quod tellus moueretur, motu tamen solo diurno.

Lineæ spirales concipi possūt descriptæ super alias superficies.

Cæterùm huiusmodi lineas imaginari quoque licet super alijs superficiebus descriptas, præsertim insuperficie sphærica, cylindrica, de quibus aliqua dixit Pappus in Collectionibus Mathematicis.

Infinitæ spirales dantur sicut infinitæ sectiones conicæ.

Quemadmodum enim dari possunt infinitæ parabolæ, infinitæ hyperbolæ, infinitæ ellipses, & quidem duplici ratione, vt superius innuimus, ita etiam dari possunt infinitæ spirales; Etenim vt paulo antea dicebamus, si punctum A intelligatur deferri per AB motu æquabili, dum interim semidiameter illa manente extremo A, reuoluatur secundùm extremum B, describens circuli peripheriam BHIC, motu tamen vniformiter accelerato, ita vt spatia peracta in ipsa peripheria, sint in duplicata ratione, seu vt quadrata temporum, gignitur alia spiralis ab Archimedea, quæ prima, & linearis dicetur; hæc autem de qua loquimur erit secunda, & quadratica, quòd si spatia peracta fuerint sicut cubi eorum temporum, gignetur altera tertia, quæ dicetur cubica, et si fuerint, vt quadrato quadrata temporum orietur quarta, quæ dicetur quadrato quadratica, & sic in infinitum. Vnde ex varia combinatione ipsorum motuum, variaque determinatione principij quod videlicet sit aut centrum, aut extremum mobile lineæ rectæ, variæ, diuersæque spirales oriuntur.

Spiralis prima, & linearis. Spiralis quadratica. Spiralis cubica. Spiralis quadrato quadratica.

Quòd si punctum per semidiametrum moueatur motu naturaliter deficiente, ita vt contrario modo spatia peracta sint, vt quadrata temporum, diameter verò reuoluatur motu æquabili, si motus per rectam sit ab extremo immobili, erit ordinis primi respondens alteri ordinis secundi cuius initium est extremum mobile; vnde dicentur Correlatæ,& sic de consimilibus, & quæ à duplici motu naturaliter accelerato, quando scilicet spatia peracta sunt, vt quadrata temporum, dicetur Quadratica ex duplici origine, sic de alijs suo modo.

His autem præhabitis, superest considerandum, in his quoque sibi vendicare locum artificiosam Analysin, de qua paulo post agendum.

Omnemque propositionem huiusmodi esse, cùm fuerit ex illo principio deducta quod motum atque tempus concernit quemadmodum se habet Pappi Propositio, in qua illud attri-

attributum de spatio spirali demonstrat, videlicet subtriplum esse ad circulum, quamuis ipsa demonstratio vtatur ea ratione quæ est inter cylindrum, & conum; supponit enim accidens ipsius spiralis ex tempore motuque dependens, eodemque modo philosophandum de consimilibus.

Interim animaduertamus quod innuimus nępe de spirali antiquo more quem Archimedeum appellant institutam contemplationem Physico-Geometricam esse, qua admissa intra cancellos propriæ Geometriæ, intra eosdem licebit etiam circulum non dissimili modo contemplari. Vnde Theorema illud demonstrare. Si duo vel plures fuerint circuli concentrici, ductæque sint duæ rectæ à communi centro ad maximi peripheriam, singulorum aliorum peripherijs occurrentes, quæ est ratio ūnius arcus ab hisce duabus lineis intercepti ad totam suam peripheriam, ita erit alterius arcus ad peripheriam suam, & ita de singulis. Demonstratio autem ea erit, quia si concipiamus vnam ex illis lineis reuolui circa centrum, quo tempore linea sua reuolutione percurrit totam circumferentiam maximi circuli, eodem etiam tempore percurrit, & circulorum aliorum circumferentias. Si igitur intelligatur reuolui, quoniam eodem tempore percurruntur integræ circumferentiæ, & motus est æquabilis, erit spatium ad spatium, hoc est circumferentia, ad circumferentiam, vt velocitas ad velocitatem, & vt eadem velocitas ad velocitatem, ita arcus vnius circumferentiæ, ad arcum alterius circumferentiæ, qui videlicet eodem tempore percurruntur; & per consequens, vt arcus ad circumferentiam suam, ita alter arcus ad suam circumferentiam. Hæc tamen non est demonstrandi ratio candori Geometrico consentanea, cùm aliter idem Theorema demonstrare liceat, viam Regiam calcando Euclideam. Non dissimiliter igitur generosa aggressione foret ineunda tractatio de spiralibus, alijsque lineis oriundis à motu, quia tamen minimum in maximis maiori est in honore habendum, quàm quod maximum est in minimis, propterea huiusmodi contemplatio de spiralibus, & alijs similibus, non est in postremis habenda; tentare tamen aliquando non pigebit meliorem viam ad eadem, aliaque symptomata demonstranda de ipsis, inire.

Etiam circulum considerare posse proat sumpta fuit consideräda a spiralis.

Cæterum ad analyseos formam, itemque syntheseos, redacta demonstratio theorematis, se habentis, aliter ac à Pappo prestitum fuerit, est vt sequitur.

T H E O R E M A.

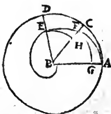
Si in spiralem vna quidem circumuolutione descriptam, à principio spiralis rectæ quotlibet cadant, quæ æquales inter se angulos contineant, se se mutuo æqualiter excedent.

Esto circulus ADC, spiralis autem BEFA, sintque rectæ BA, BFC, BED, quibus continentur anguli ABC, CBD inter se æquales. Dico tanto excessu superari BF ab AB, quanto BE superatur ab ipsa BF.

Exemplum XXXII. *Archimedes de spiralibus Prop. 12. & Pappus lib 4. Prop. 20.*

Centro B, interuallo BE describatur arcus EH, & eodem centro, interuallo BF describatur arcus FG.

Resolutio.



QVoniam excessus ipsius AB supra BF æqualis est excessui eiusdem BF supra BE, est autem FC excessus BA supra BF; ergo CF æqualis erit FH, qui est excessus BF supra BE; estque circumferentia CA æqualis circumferentiæ DC; ergo vt FC ad, FH ita circumferentia CA ad circumferentiam DC, ergo conuertendo, & componendo erit, [a] vt CH ad FC, ita circumferentia ACD ad circumferentiam CA, & conuertendo vt FC ad CH, ita circumferentia CA ad circumferentiam DCA [b] sed vt BC ad HC, hoc est BD, seu BA ad DE, ita integra circumferentia ad circumferentiam ACD; ergo per subductionem æqualium rationum, circumferentiæ integræ ad circumferentiam DCA, & BC ad HC, erit [c] vt FC ad BC, ita circumferentia CA ad integram circumferentiam, & conuertendo erit, [d] vt BC, hoc est BA ad FC, ita integra circumferentia ad circumferentiam CA. Quod ita se habet ex natura ipsius lineæ spiralis.

a 18. quinti.
b ex natura spiralis.
c ex Elemēt.
d cor. 4. quinti.

Compo-

Compositio.

a cor. 4. quinti. *b 22. quinti.* *c 17. quinti.* *d ex construct.*

QVoniam est vt BA, hoc est BC ad FC, ita integra circumferentia ad circumferentiam CA; erit [a] conuertendo, vt FC ad BC, ita circumferentia CA ad integram circumferentiam. Rursus quoniam est vt BA, hoc est BD ad DE, hoc est BC ad HC, ita integra circumferentia ad circumferentiam DCA; ergo ex æquali erit, [b] vt FC ad CH, ita circumferentia CA ad circumferentiam DCA, & conuertendo, [c] vt HC ad CF, ita circumferentia DCA, ad circumferentiam, CA, & diuidendo, ac conuertendo, vt FC ad FH, ita circumferentia CA ad circumferentiam DC. Est autem circumferentia CA æqualis [d] circumferentiæ DC; ergo CF æquabitur FH, ac propterea excessus ipsius BA supra BF æqualis erit excessui eiusdem BF supra BE. Quod oportebat ostendere.

Hæc demonstratio supponit motum, ac tempus.

Hæc igitur resolutio supponit spiralis ortum huiusmodi esse, vt recta quædam manente extremo vno secundum alium in orbem agatur æquabili motu, & ab immobili extremo punctum deferri super rectam ipsam motu itidem æquabili, ita vt quo tempore perfecerit linea in gyrum acta partem circumferentiæ integræ, punctum quoque delatum per rectam, ipsius rectæ partem confecerit, quæ ad integram lineam eam habeat rationem, quam circumferentiæ pars ad circumferentiam integram, quibus neglectis etiam haud difficillimum foret hoc spiralis accidens perscrutari, causamque reddere.

Linea recta spiralem tãgit in puncto.

Ex accidentibus, quæ spirali contingunt primum erat, quod diximus.

Deinde quòd contactus lineæ rectæ cum spirali in puncto fit, quod Archimedes ostendit Propositione decima tertia, demonstratione ducente ad incommodum.

Aliud spiralis accidens.

Et si in spiralem ex prima reuolutione ortam duæ lineæ incidant ab eius principio, productæque sint ad circumferentiam vsque primi circuli, eadem est ratio incidentium in spiralem, quæ est arcus circuli medij inter terminum spiræ, limitesque linearum productarum in circumferentia factos, acceptis in antecedentia arcubus à fine spiralis, quod Archimedes ostendit Physico-Geometricè, vt de propositione decima secunda dictum est.

Aliud etiam spiralis accidens.

Etsi in spiralem in secunda reuolutione factam lineæ rectæ ceciderint à principio spiralis, eadem est ratio rectarum ad inuicem, quæ est dicti arcus cum tota circuli circumferentia simul assumpta.

Quod ostendit Archimedes Propositione 15. non secus ac demonstrauit propositiones 12. & 14. quæ admittunt analysin, & synthesin non secus ac à nobis factum fuit superius.

Spiralis proprietas, quæ ptis indirectè ostensa, directè & ostensiue demonstratur.

Si spiralem ex prima reuolutione ortam recta linea tetigerit, & à contactu recta linea ducta fuerit ad punctum, quod est principium spiralis, anguli, quos tangens facit cum ducta supradicta inæquales sunt, & quidem qui in antecedentia vergit obtusus est, & qui in consequentia acutus.

Hanc ostendit Archimedes Proposit. 16. sed demonstratione ducente ad incommodum.

a 3. pet. primi.

Hoc idem theorema resolui, componique potest, atque demonstrari ostensiue, si circulus describatur [a] centro facto in puncto, quod est principium spiralis, semidiameter verò sit minor linea prima in principio circulationis; huius enim peripheria, spiralem necessario secabit, nam ob ipsius spiralis naturam circuli partes antecedentes cadent intra circulationem spiralis, partes verò sequentes extra ipsam; Spiralis enim radij ad antecedentia erunt maiores semidiametro circuli descripti, & ad sequentia erunt minores. Si recta fuerit ducta tangens, & peripheriam circuli, & lineam spiralem, cùm igitur extra circulum sint partes spiralis antecedentes, intra verò, sequentes, recta tangens, neque conueniet cum arcu spiralis à puncto interfectionis ad antecedentia, neque cum arcu peripheriæ à puncto interfectionis ad consequentia, neque cum puncto interfectionis communi, alioquin vtramque curuam secaret, cùm tamen vtramque tangere supponamus; à puncto quod est spiralis principium ducta sit [b] recta ad punctum contactus rectæ cum ipsa peripheria, & cum hac faciet [c] angulos rectos; ducta sit [d] ab eodem principio spiralis, recta ad punctum contactus rectæ cum spirali, cum hac faciet [e] angulum ad antecedentia obtusum, vtpote maiorem recto, qualis est, qui fit linea ducta a principio spiralis ad punctum contactus peripheriæ circuli, cum recta tangente; qui autem deinceps, nimirum ad consequentia erit minor recto.

b pr. pet. prim. *c 18. tertij.* *d pr. pet. prim.* *e 16. primi.*

Nec dissimili modo decima septima ostendetur.

Decimam

Decimam octauam Archimedes demonstrauit antiqua methodo per explosum excessum ac defectum; ea verò est insignis Propositio, ac celebre Theorema, nempe.

Si spiralem ex prima circumuolutione ortam, recta linea tetigerit in termino spiræ, à puncto verò quod est in principio spiræ ducatur quædam ad angulos rectos, ei quæ est reuolutionis principium, ducta quidem incident in tangentem, & ipsius, quæ pars media erit inter tangentem, & principium spiræ æqualis erit peripheriæ primi circuli. *Alia spirali proprietas insignis.*

De hoc tamen agendum in proprio capite, vbi hanc methodum perpendentes, alia ratione hoc idem theorema demonstrare tentabimus.

Ita pariter de propositione decima nona, vbi agitur de spirali ex secunda reuolutione, ac ostenditur si spiralem secunda reuolutione ortam in termino tetigerit recta linea, & à principio spiræ ducatur aliqua ad angulos rectos lineæ, quæ est reuolutionis initium, ipsa coincidet in tangentem, eritque recta media inter tangentem, & principium spiræ dupla circumferentiæ secundi circuli; sequentem verò vigesimam demonstrat deductione ad impossibile, cùm tamen ostensiue demonstrari possit, de quo suo loco. *Alia proprietas spiralis.*

Vigesima prima, & vigesima secunda, & vigesima tertia, sunt Problemata, quæ sequentibus inseruiunt, propositionibus.

Insignis est propositio vigesima quarta, videlicet.

Spatium linea spirali in prima reuolutione descripta, & recta linea prima in principio circulationis contentum, tertia pars est circuli primi. *Alia insignis proprietas spiralis.*

Hoc autem Theorema antiqua methodo per explosum excessum, atque defectum ostendit, de quo propterea suo loco; Hìc tantùm adnotabo hoc idem accidens ipsius spatij spiralis elegantiori fortasse ratione, ostendi posse per introscriptum poligonum circulo, cui poligonum spatio spirali introscriptum respondebit multitudine triangulorum, in quæ, & illud, & hoc resoluitur, quæ planè à rectis ductis à centro circuli primæ reuolutionis, atque adeò à principio spiralis, efformantur ad eiusdem circuli peripherias, facientibus ad centrum ipsum angulos æquales, qui cum fuerint octo, nascentur sectores, ductisque rectis subtendentibus arcus, quibus prædicti anguli ad centrum insistunt, octo prouenient triangula, inter se æqualia atque similia, e quibus octogonum componitur, cùmque lineæ illæ à centro ductæ perimetro spiralis occurrant spatium ipsum spirale in totidem sectores diuident, ductisque subtendentibus arcus ipsius spiralis, octo etiam consurgunt triangula è quibus componitur poligonum spirale, hoc est spatium spirali inscriptum respondens poligono, quod circulo inscriptum est, & cum eo comparandum, quia tamen ad hoc est opus Arithmetica progressione, ob id hæc silentio hic prætereo, eadem de re verba facturus cum de ipsius progressionis vsu, sermonem instituero.

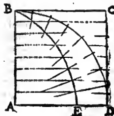
Hæc eadem ratio subtripla spatij spiralis ad circulum primę reuolutionis eleganter etiam ostenditur à Pappo libro quarto Prop. 21. per analogiam, quæ specialis est methodus, si namque demonstrauerimus sic se habere circulum reuolutionis ad spatium spirale, quemadmodum cylindrus ad conum eiusdem altitudinis, atque baseos, perspecta quidem nobis erit ratio tripla circuli prædicti ad spatium spirale, cùm iam exploratum sit, vel via antiqua deducente ad inconueniens per explosum excessum atque defectum, vt habetur apud Euclidem, cylindrum coni triplum esse cùm fuerit eiusdem baseos, ac altitudinis Prop. 10. lib. 2. Vel recenti per indiuisibilia, Si enim ostensum fuerit omnes figuras parallelogrammi ad omnes figuras similes cuiusuis triangulorum per diametrum eiusdem parallelogrammi constitutorum esse in ratione tripla, vno latere parallelogrammi communi regula existente; constabit illicò, ne dum omne prisma pyramidis, sed quemcumque cylindricum cuiuscunque conici in eadem cum eo basi, & altitudine existenti esse triplum. Solertia autem Analystæ in eo posita est, vt seligat analogiam opportunam, videlicet respiciendo ad rationem eorum, quæ ad propositum conducant, vt in re, de qua agimus contingit, maximè accommodatam esse rationem cylindri ad conum, siquidem per circumscriptos sectores, & introscriptos spatio spirali, instituimus comparationem hunc in modum. Vt totus circulus ad omnes figuras ex sectoribus inscriptas lineæ spirali, ita est cylindrus à parallelogrammo circa propositum axem ad omnes figuras ex cylindris ipsi cono, qui fit à triangulo, quod est dimidium ipsius parallelogrammi circa eundem axem, inscriptus. Deinde rursus vt circulus, ad omnes figuras ex sectoribus circumscriptas lineæ spirali, ita est cylindrus ad omnes figuras ex cylindris eidem cono circumscriptas, atque adeo, vt cylindrus *In quo præcipuè Analystæ solertia eniteat.*

drus

drus ad conum; ita circulus ad ſpatium ſpirale. Ad hæc igitur oportet reſpicere vti dicebam, nam alioquin non deeſſet alia ſimilis ratio tripla, vt ex. g. ſi conſideremus aliqua in genere magnitudinis, quæ huiuſmodi rationem habere poſſunt, quemadmodum duplum triangulum circumſcriptum circulo, plus triangulo inſcripto ad hexagonum eidem circulo inſcriptum, plus triangulo inſcripto, & triangulum inſcriptum, conſtituunt progreſſionem geometricam in ratione tripla, ſed inde haud liceret ſeligere duos terminos, vel ſcilicet hexagonum plus triangulo inſcripto & triãgulum inſcriptum, vel duplum triangulũ circumſcriptum cũ inſcripto & hexagonum plus triangulo inſcripto; eſt enim eadem quidem ratio, quæ cylindri ad conum, tamẽ inde non licet propoſitum haurire; imò & Cyclois tripla eſt circuli ſui genitoris: vnde hìc etiam intercedit ratio, quæ inter cylindrum, & conum; ſed ad inſtitutum minimè idonea, de his tamen inferius opportuniori loco differendum.

Fit reditus ad ſpirales. Redeuntes autem ad ſpirales, negari non poteſt quin ea ſit amæniſſima contemplatio, & ad magna conducens, ſi namque adinuenerimus modum quo ducenda ſit tangens ipſius, videlicet qua ratione ducere valeamus tangentẽ lineam ſpiralem ex prima circumuolutione ortam in termino ſpiræ, erit adinuenta ratio inter ſemidiametrum circuli, & peripheriam eiuſdem, ac propterea exhiberi poterit recta æqualis ipſimet peripheriæ. Quamuis autem hoc ſit magnificiendum, tamen tantum non eſt ei deferendum, vt aliqui putant; propterea quod hoc idem aſſequemur ope quadratricis; quod ſi beneficio illius itidem quadratum circulo exhibemus æquale, quadratricis præſidio hoc idem etiam aſſequemur; nec in deſcriptione illius plus quidquam adinuenire licet, vnde de ea potius, quàm de hac gloriari debeamus; vtraque enim originem ducit à puncto ſubeunte duplicem motum; Nec difficilius eſt intelligere punctum moueri duplici motu æquabili, vnde quadratrix procreatur, quàm concipere punctum duplici motu æquabili deferri in geneſi ipſius ſpiralis. Præclarum tamen foret opus ducere illam tangentem, de quo proprio loco plura dicemus. Non enim hìc in animo eſt niſi rediuiuam facere methodum antiquam pro reſolutione Theorematum, præceptaq; tradere in gratiam eius, eademque aptare cuicunque methodo peculiari, vt deinceps planum fiet; Ac propterea theoremata plurima cùm ad conicas ſectiones, tùm ad ſpirales, aliaſque lineas pertinentia ad proprium locum remittimus: vnde hìc non immorabimur in demonſtrandis proprietatibus, & ſectionum, & ſpiralium infinitarum, quarum ſuperius meminimus. Illud ſolum adijciam prout theorematis natura expoſcit adhibendam eſſe methodum opportunam, peculiaremque accerſita ſemper antiqua reſolutionis methodo à nobis deſcripta, velut vniuerſaliſſima, quæ per cæteras omnes vagatur: Quamobrem ſi fuerit opus indiuiſibilium ratione, hæc adhibenda eſt, ita vt ſi theorema fuerit oblatum, aduocatis indiuiſibilibus antiquam reſolutionis viam calcantes ei occurramus; alioquin, quæ nos meditando ſyntheticè adinuenimus, & ex theorematibus iam demõſtratis, velut è fontibus innumeras veritates deriuare poterimus; quod hìc innuiſſe non fuit prorſus alienum ab inſtituto; eadem tamen de re nobis de indiuiſibilium vſu ſermonem habentibus, vberior eſt reditura tractatio.

Linea quadratrix, & eius origo antiqua phyſico-geometrica. Succedit linea ab Antiquis excogitata, quæ ab accidente ſibi proprio nomenclaturam ſortiens τετραγωνίζουσα dicta fuit, nempe linea quadrans, ſiue quadratrix, quam ad circuli quadraturam Dinoſtratus, & Nicomedes aſſumpſit. Eius geneſis adeo vulgata eſt, vt non videretur opus in eius explicationem incumbere; niſi in recenſendis lineis defectus notam incurrere videremur.



Eſto quadratum ABCD, in quo deſcribatur quadrans BD, intelligatur verò ſemidiameter AB æquabili motu ferri in orbem circa centrum A, percurrendo videlicet æqualibus temporibus æqualia ſpatia arcus BD; interim verò motu itidem æquabili ſibimet parallelum feratur latus BC verſus oppoſitum latus AD, ita vt quo tempore punctum B circumferentiam BD vniformi ſemper motu percurrit, atque peruenit ad D, eodem etiam latus BC perueniat ad latus AD. Semidiameter autem in orbem acta per circumferentiam BD, & recta BC deorſum lata continuo ſe ſe ſecabunt in punctis, per quæ linea quadratrix BE incedet.

Verùm

Verùm non immeritò Sperus ille apud Pappum in huius lineæ inuentores inuehebatur, tùm quia, ad quod videtur vtilis esse, illud in suppositione assumit; non enim fieri posse videtur, vt duo puncta ab ipso B principium motus capientia, hoc quidem in recta linea ad A, illud verò in circumferentia ad D, in æquali tempore simul restituantur, nisi prius proportio rectę lineæ AB ad circumferentiam BD cognita sit; in hac enim proportione, & motuum velocitates esse necesse est. Nec satis intelligi potest, quo pacto arbitrentur ea simul restitui, velocitatibus temerè, ac sine vlla ratione vtentia, nisi quispiam existimet id casu euenire; quod rationi dissentaneum videtur; tùm quia terminus, quo ipsi vtuntur ad lineæ descriptionem, nempe quo loco linea ipsa secet rectam AD, non inuenitur; nam quando rectæ quidem CB, BA simul motæ restituuntur, congruunt rectæ lineæ AD, neque se se amplius secant, cessante sectione, antequam ipsi AD congruant, quæ quidem sectio factus est lineæ terminus, in quo cum ipsa AD linea recta conuenit, nisi quispiam intelligat productam lineam sicuti lineas rectas posuimus vsque ad ipsam AD, quod ex eorum principijs apud Pappum illi non sequi asserebat, & quamuis, vtcumque sumeretur punctum E deberet præcedere circumferentiæ proportio ad rectam lineam; eâ enim non data, illud fieri nequaquam posse videtur. *Hæc linea quibusdam non arrisit.*

Geometricè autem comparabitur ortus huius lineæ, non minus ac sectionum conicarum, & vt etiam de Spirali dicebamus. *Genesis quadratricis Geometrica.*

Esto igitur quadratum ABCD, in quo intelligatur descriptus quadrantis arcus BD, neglectis igitur motibus, nullaque habita ratione temporis, quoniam illi duo motus vniformes, quorum vnus fit per circumferentiam BD, alter verò per lineas rectas AB, CD, effici non possunt, nisi habita proportione circularis lineæ ad lineam rectam, hæc autem cum ignota sit, & potius per hanc lineam quadratricem, inuestiganda. *Explicatio.*

Arcus propterea quadrantis BD in quotuis partes æquales intelligatur diuisus, & vtrunq; latus AB, CD in totidem partes pariter diuisum esse concipiatur inter se æquales, & quò plures extiterint diuisiones, eò felicius res ipsa succedet; mox verò bina puncta linearum æqualiter distantia à latere BC, vel AD, lineis rectis coniungantur, atque ex centro A aliæ rectæ ad singula diuisionum puncta quadrantis BD, ducantur; nam vbi hæ rectæ priores intersecuerint, prima primam, secunda secundam &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda erit, atque hæc erit Quadratrix.

Quoniam verò punctum in AD, videlicet punctum E, vbi hæc linea terminat, haberi non potest per intersectionem prædictarum linearum, ob id expedit aliud quadratum priori adhærens describere, vel saltem rectangulum, quorum commune latus sit AD, & eadem, quæ in superiori perficere; Et quidem si fuerit quadratum in eo quadrantem describere, vel si rectangulum quadrantis portionem, factaque diuisione arcuum, vt in superiori quadrante ad sectionum puncta ex A ducere &c. nam si permittitur à puncto ad punctum intersectionum lineam ducere, quæ portio sit quadratricis, sic permittendum erit, vt puncta intersectionum, in vtroque quadrante prope latus AD, linea connectantur, quæ ab ipso latere AB in puncto quidem E bisecta erit; quamobrem compertum erit extremum ipsius lineæ Quadratricis.

Celebris hęc linea est ob præstantissimos vsus, habetque singularia symptomata præsertim.

Si ex centro per quæuis ipsius puncta vsque ad circumferentiam quadrantis rectæ ducantur, ex eodem centro descripti, & ex ijsdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, aliæque rectæ eidem basi parallelæ, erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales. Insuper

Si quadrantis, & Quadratricis idem sit centrum; erunt arcus Quadratricis; semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.

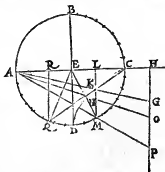
Ex his, alijsque similibus veritates deducuntur, theoremataque condi possunt.

De vsu autem huius lineæ verba faciemus in secundo libro de Problematum effectionibus agentes; Conducit enim eius natura ad præstantissima quædam in Arte, à quibus nunc supersedendum, cùm ibi, veluti in opportuniori loco, eadem hac de re rediturus sit sermo. Interim non pigebit aduertere genesin eius Geometricam ab Antiquis creditam fuisse per locos, qui ad superficies dicuntur, cùm alioquin per motum potius mechanicus ortus exi- *De quadratricis vsu postmodum disserendum.*

ſtimaretur. Huius igitur, de qua loquimur, lineæ, ortu magis mechanico prętermiſſo, eundem Geometricè reſoluendum ſumpſerunt per locos ad ſuperficies: vnde in quadrante ducta recta à centro ad peripheriam, & in recta ducta accepto puncto, ex hoc ductam intellexerunt pendicularem ad baſim ipſius quadrantis, quæ ad arcum interceptum rationem habeat, quam eiuſdem quadrantis radius ad circumferentiam, punctum illud in recta à centro ad circumferentiam, ex quo quidem puncto perpendicularis cadit ſupra baſim quadrantis, ad lineam Quadratricem pertinere demonſtrarunt: Vnde à circumferentia quadrantis recti cylindri ſuperficiem imaginati ſunt, in qua lineam ſpiralem deſcriptam intellexerunt, atque hunc in modum, vt videre licet apud Pappum lib. 4. Prop. 28. hunc ortum per locos ſupradictos ad ſuperficies, reſoluere tentarunt, quemadmodum etiam illud idem per lineam ſpiralem in plano deſcriptam reſoluere ſimili ratione aggreſſi ſunt; in his tamen peculiaris non eſt methodus, niſi fortè quiſpiam ſpatium ipſum conſiderandum aſſumeret, quod duabus rectis angulum rectum conſtituentibus, & linea Quadratrice comprehenditur; vbique tamen antiqua illa reſoluendi ratio locum ſibi vendicat, qua propterea eius Geometrica geneſi ſuppoſita, affectiones, ac attributa inde prodeuntia demonſtrari poſſunt.

Ciſſoides linea conſideratu digna. Ciſſoidis.

Eſt etiam commemoratu digniſſima linea Ciſſoides dicta, quam Diocli adſcripſerunt.



Eſto circulus ABCD, cuius centrum E, in quo diametri AC, BD ſe ſe mutuò ſecent ad rectos angulos. At verò in quadrante CD ſumptis quotcunque punctis parum inter ſe diſtantibus, atque adeò diuiſa circumferentia DC in partes æquales: in totidem quoque partes intelligantur diuiſæ circumferentiæ AD, BC, bina autem puncta quadrantum BC, DC æquidiſtantia à punctis B, D, intelligantur iuncta rectis, quæ, & ipſi diametro BD, & inter ſe parallelæ erunt; mox verò ex puncto C rectæ ad ſingula puncta quadrantis AD ductæ intelligantur, quæ iam ductas parallelas interſecabunt; per interſectionum puncta, ciſſoides ipſa CD incedit; Nihil autem obſtat, quin extra circulum continuetur.

Præcipuus eius vſus ad indagandas duas medias continuè proportionales inter duas datas.

Huius autem præclara ſymptomata ſunt, inter quæ præcipuum illud, quod eius beneficio duæ mediæ inter duas datas continuè proportionales reperiantur in continua ratione; Protracta enim diametro AC ad partes C, ſi opus fuerit; idem enim eueniet accepto puncto inter AC, in eaque accepto puncto quocunque H, in quo cum ipſa AH rectos faciat angulos recta PH, ducaturque quæcunque AG ſecans ciſſoidem in K, per quod ducatur LM parallela ipſi BD, factaque LN, quæ ſit æqualis ipſi LC, per N acta ſit AO, hoc autem ſibi vendicat huius lineæ natura, & inde conſequentia, vt AH, HP, HO, HG, ſint in continua ratione; propterea quod AL, LM, LN, LK, proportionales iam ſupradictis ſunt in continua ratione; Ex eo enim quod ipſe præmiſit lemmate, id neceſſariò conſequitur, nam ſi ex C ducatur recta per K, occurret arcui AD in puncto Q, quod tantum diſtabit à puncto D, quantum ab eodem D diſtat punctum M; hoc enim poſtulat ipſius ciſſoidis DKC natura, ductaque QR perpendiculari ipſi AC, facile conſtat RE æqualem eſſe EL, & AR æqualem eſſe LC; ductis enim QE, ME, angulus REQ æquabitur angulo LEM, ob æquales arcus AQ, MC, & anguli ad R, & L ſunt recti, vnde æquales, & latera EQ, EM ſunt æqualia, ergo latus RQ æquabitur lateri LM, & latus RE æquabitur lateri EL, quibus ſublatis ex æqualibus AE, EC, remanebunt AR, LC, æquales; addita communi RL, erit AL æqualis RC, ſed RQ æqualis eſt LM; ergo vt AL, ad LM, ita CR, ad RQ, ſed vt CR ad RQ, ita CL ad LK, & vt AL ad LM ita ML ad LC; quare vt ML ad LC, ita LC ad LK, atque adeò, vt AL ad LM, ita ML ad LC, & vt ML ad LC, ita LC ad LK; ſed LN facta eſt æqualis LC; ergo AL, LM, LN, LK, erunt in continua ratione: vnde etiam AH, HP, HO, HG, erunt in continua ratione.

Huius quoque lineæ vſus in Geometricis effectionibus in ſequentibus deprehendetur, quam ob cauſam hîc eius naturam placuit explicare.

Sequi-

Sequitur Conchoides Nicomedi adſcripta, cuius indoles, atque natura ea eſt.

Natura Conchilis explicatur. Conchiles.

Sit recta quæpiam AB, & ad eam perpendicularis CD mox autem infra E quouis accepto puncto D, quod lineæ polum appellant, & ſupra E quouis accepto puncto C, ſi ex puncto D plurimæ ducantur lineæ parùm inter ſe diſtantes, ex quarum ſingulis abſcindantur portiones rectæ EC vt SF, BN, KG, LH &c. æquales, initio facto ſemper à recta AB, extrema verò harum portionum puncta per inflexam lineam coniungantur: hæc ipſa erit linea Conchilis.

Huiuſmodi autem linea nunquam cum recta AB conueniet, licet vtraque in infinitum producatur, cùm ipſa tranſire debeat per puncta, quæ ſunt ſemper ſuper ipſam AB. *Huius lineæ proprietates.*

Huius inſignis proprietas eſt duplex, quarum prima eſt.

Quodlibet punctum eius à puncto C diuerſum, minus diſtat à recta AB quàm punctum C; aliorum verò punctorum, quod remotius eſt à C minus diſtat ab eadem recta AB, quàm quod minus remotum eſt.

Secunda quamuis ConchilisCN nunquam conueniat cum recta AB, tamen cum qualibet alia recta; etiam ipſi EB propinquiſſima conuenit.

Huius lineæ beneficio præclara ſoluuntur Problemata, præſertim illud.

Beneficio huius lineæ præclara Problemata ſoluuntur.

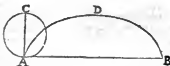
Dato quouis angulo rectilineo, puncto extra lineas datum angulum comprehendentes, ab illo puncto educere rectam ſecantem, rectas continentes angulum datum, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis ſit datæ rectæ.

Cuius beneficio deinde inter duas datas rectas lineas, duæ mediæ in continua ratione comperiuntur. De huius autem lineæ vſu, quatenus videlicet ad effectionem Geometricam conducere poſſit de reſolutione Problematum tractantes, differemus.

Huius etiam auxilio duæ mediæ in continua ratione reperiuntur.

E recentioribus noua eſt linea elapſis annis adinuenta, quæ Cyclois nuncupata fuit, cuius ortus hic eſt.

Cycloidis lineæ ortus, atque natura.



Intelligatur recta quædam AB, ſuper quam circulus, cuius diameter AC, qui ſua peripheria tangat prædictam AB in puncto A, concipiatur hoc verò in ipſius circuli peripheria veluti fixum: Deinde intelligatur ſuper manente recta AB, circulum ipſum AC moueri motu circulari ſimul, & progreſſiuo ad partes B, ea lege videlicet, vt ſubinde aliquo ſui puncto rectam AB ſemper contingat, quouſque punctum illud fixum iterum ad contactum reuertatur, puta in B; Perſpicuum eſt futurum, vt punctum illud fixum in peripheria circuli rotantis AC aliquam lineam deſcribat, cuiuſmodi foret linea flexuoſa ADB, quæ primo ſurgat à recta AB, deinde culminet in D, atque tandem prona deſcendat verſus punctum B.

Manifeſtum eſt ex ortu ipſius lineæ circulum prædictum dici debere Genitorem, rectam AB, baſim, & ſpatium AD BA ſpatium cycloidale, recta autem AB baſis circuli genitoris peripheriæ æqualis eſt, vt patet ex commenſuratione ipſius rectæ cum peripheria. *Genitor cycloidos, eiuſdē baſis.*

Iam autem induſtrioſè fuit adinuenta ratio ſpatij cycloidalis ad circulum genitorem, cùmque circulus ſit triplus ſpatij ſpiralis primæ reuolutionis, fit vt circulus ſit medio loco proportionalis inter ſpatium cycloidale, & ſpirale iam dictum.

Huius autem lineæ, ſpatijque affectiones per indiuiſibilium methodum præcipuè ſunt inquirendæ, quamuis etiam alia ratione comparari queant, ſaltem nonnullæ ex ipſis præcipuè accerſitis motu, & tempore. Alia autem dicitur Cyclois primaria, quam deſcripſimus, alia eſt protracta, & alia abbreuiata, & quidem harum vſus non eſt paruifaciendus

cum earum præsidio, Geometricæ quædam effectiones magni momenti perfici queant.

Nec lineæ commemoratæ hucusque tantummodo suppeditāt argumentum Theorematicum, sed etiam Problematicum, vnde & tangentes ducuntur, & quadraturæ exhibentur, & alia circa ipsas perficiuntur, de quibus suis locis erit à nobis agendum.

Epicyclois linea noniter excogitata.

Aliquando autem nos aliam meditati sumus Cycloidem ex hypothesi, quòd circulus reuolueretur supra circumferentiam alterius circuli, sibi æqualis: vnde oritur linea quam Epicycloidem appellandam existimauimus, cuius non obuia symptomata sunt, habent tamen quædam, de quibus operæ est pretium esse sollicitum.

Ex intersectionibus variarum superficierum, variæ quoque emergunt lineæ.

Aliæ quoque lineæ orientur ex intersectionibus superficierum cum superficiebus, Vt si superficies sphærica occurrat cylindricæ, vel conicæ, vel cylindrica cylindricæ, vel eandem perforans, vel excipiens aliqua sui parte, alia non excipiens, vel occurrens conicæ eamque peruadens, secundùm variam axium positionem, sectiones lineæ sunt, de quibus aliqua ratio haberi potest.

Immò intelligi potest facta quædam depressio vniformis in Circulo, in Ellipsi &c., vt remanentibus duobus extremis diametri in eo, quo prius erant plano, ordinatim depressæ sint, remotiores quidem magis ab illis extremis, viciniores minus, ita vt ordinatim ipsæ rectæ euadant inflexæ.

Solida ex reuolutione etc.

Sed & reuolutione planarum figurarum solida fiunt, facta reuolutione circa aliquod latus, veluti circa axem; nam præter Sphæram factam ex reuolutione semicirculi circa diametrum immotam, præter Conum factum ex reuolutione trianguli rectanguli circa latus vnum è duobus constituentibus angulum rectum, Præter Cylindrum factum ex reuolutione rectanguli circa vnum è lateribus. Alia quoque solida fiunt, nam polygonum regulare inscriptum circulo, intelligatur reuolui, vel circa rectam à centro perpendiculariter ductam ad latus, vel circa rectam à centro ad angulum, vel polygonum erit habens latera numero paria, vel imparia, vel erit polygonum circumscriptum circulo, varia, diuersaque hinc solida emergunt, de quorum contemplatione optimè meritus est Torricellius, & in quibus Analysta potest suam interponere industriam; quia tamen hæc, vt plurimum fuerunt demonstrata antiqua illa methodo per explosum excessum, vel defectum; de his propterea in proprio capite loquemur.

Cylindro parabolicum.

Solidum cylindri hyperbolicum &c.

Et si lubet imaginari solida, possumus concipere quidem in plano figuram quamcunque descriptam v. g. Parabolen; quædam autem sit recta linea, huiusmodi plano insistens ad rectos angulos, vel etiam inclinata ita vt sibimet semper parallela incedens abradat perimetrum subiectæ figuræ, donec redeat vnde cœperat moueri, & orietur solidum, quod non inconsulto Cylindrico parabolicū diceretur; ita pariter fiet Cylindrico hyperbolicum ex subiecta hyperbole; Cylindrico ellipticum, ex subiecta ellipsi, & ex subiecta spirali primaria solidum efformatur, Cylindrico-spirale iam supra commemoratum. Plana autem si illa secuerint solida, gignent communes sectiones pro vario occursu; Num autem illæ, quæ orirentur ex sectione plani basi non æquidistantis (nam si æquidistans esset communis sectio eadem foret ac basis) aliquam peculiarem considerationem mereantur, inferius explicabo. Et inter reliqua, quæ circa supra commemoratas lineas, figurasque cùm planas, tum solidas, occurrit summoperè considerandum grauitatis centrum, cuius contemplatio tanti, quanti vnaquæque totius Matheseos pars, fieri debet.

Vniuersalis methodus resolutiua in omnibus adhiberi potest, plerumque tamen addenda est vna vel altera peculiaris.

Cæterum etsi in omnibus vniuersalis illa resoluendi methodus adhiberi possit, sola tamen in omnibus non sufficit; sed plerunque iuxta rei subiectæ rationem, particularis, atque peculiaris addenda est; Ita plane contingit, cùm nos inquirendas suscipimus pluramas affectiones, quæ sine indiuisibilium vsu demonstrari non possunt. Nec dissimiliter in alijs, quorum symptomata inquirimus, quæ peculiari aliqua indigent methodo, vt e.g. se habet vsus centri grauitatis &c. de quibus in sequentibus disserendum.

Duci etiam intellexerunt iuniores planum in planum, decernentes planum in planum ductum dici corporis cuiuscunque efformationem ex duabus superficiebus eandem habentibus, aut æqualem basim, ortam, & de his quoque instituta fuit tractatio non insecunda.

Et quoniam campus hic adeo ferax est vt quibuscunque animo conceptis semper alia supersint: vnde nec vno aualso deficiat alter considerationis modus; propterea liberum cuique est sua perspicientia illum percurrere, & sedulo perquirendo veritates adipisci; illud tamen cuique commendatum velim, vt omnes ingenij quidem neruos intendat, in-

contem-

contemplationem eorum, quæ Diuina manu fuerunt elaborata, atque adeo omni studio contendat naturæ thesauros recludere, ad id accersita quantum fieri potest Mathesi, potius quàm incumbere in meditationem eorum, quæ rectè dixeris delirantium somnia, quæque figmenta nostræ mentis cum sint, exprobant nobis ineptiam, quòd cùm tot, tantaque sint præclarissima naturæ opera, de quorum notitia quisque sollicitus esse deberet, his neglectis, quæ verè sunt, ea quæ non sunt inquirat.

Ostendit Archimedes libro primo de Sphæra, & Cylindro, sphæram esse quadruplam ipsius coni, cuius basis est circulus maximus eiusdem sphæræ, altitudo verò est radius, siue semidiameter ipsius: vnde in eo quod adiungit Manifesto, colligit tanquam exploratum, cylindrum, cuius altitudo est sphæræ diameter, basis verò circulus maximus eiusdem sphæræ, ad sphæram ipsam esse in ratione sesquialtera, eandemque rationem habere superficiem cylindricam, vnà cum basibus ad sphæricam superficiem.

Verùm in sua demonstratione processit antiqua illa methodo per explosum excessum, atque defectum ad incommodum conducentem. Videamus nunc qua ratione illud idem ostensiuè Analyticè procedendo, demonstrare valeamus. Esto igitur.

T H E O R E M A.

Exemplum XXXIII. *Hoc Theorema quod ab Archimede fuit demonstratum in 1. lib. de Sphæra & Cylindro, ab Auctore longe aliter ostenditur, & quidem ostensiuè.*

Cylindrus, cuius altitudo est sphæræ diameter, basis verò est circulus maximus eiusdem sphæræ, ad sphæram ipsam est in ratione sesquialtera.

Resolutio.

QVoniam igitur cylindrus, cuius altitudo est sphæræ diameter, basis autem circulus maximus eiusdem sphæræ, est ad sphæram ipsam in ratione sesquialtera, etiam & cylindrus, cuius altitudo est semidiameter sphæræ, basis verò idem circulus maximus, erit ad hemisphærium in eadem ratione sesquialtera; quare cylindrus, cuius altitudo est semidiameter sphæræ, basis circulus maximus eiusdem sphæræ ad excessum quo superat hemisphærium, erit in ratione tripla; sed idem cylindrus ad conum eiusdem altitudinis, & eiusdem baseos, est in eadem ratione tripla; ergo excessus prædicti cylindri eiusdem altitudinis, ac baseos cum hemisphærio supra ipsum hemisphærium æquabitur; cono, qui quidem eiusdem est altitudinis, eiusdemque baseos cum ipsomet cylindro. At verò conus, cuius vertex est in centro sphæræ, altitudo est semidiameter, & basis est circulus maximus eiusdem, habet eandem altitudinem cum cylindro, eandemque basim; ergo excessus prædicti cylindri æqualis erit huiusmodi cono cuius vertex est in centro sphęrę, altitudo est semidiameter, & basis est circulus maximus. Quod ita se habet, vt ab aliis demonstratum fuit, & à nobis demonstrabitur suo loco.

Compositio.

QVoniam igitur cylindri habentis pro basi circulum maximum sphæræ, & pro altitudine semidiametrum eiusdem, excessus supra hemisphærium, æqualis est cono, cuius vertex est in centro sphæræ, altitudo semidiameter, & basis est circulus maximus ipsius; conus autem, cuius vertex est in centro sphæræ, altitudo semidiameter, & basis est circulus maximus eiusdem, eandem habet altitudinem cum cylindro, eandemque basim; ergo prædicti cylindri, qui habet pro basi circulum maximum sphæræ, & pro altitudine semidiametrum eiusdem, excessus supra ipsum hemisphærium æquabitur cono, qui eiusdem est altitudinis, eiusdemque baseos cum ipso cylindro; sed idem cylindrus ad conum eiusdem altitudinis, eiusdemq; baseos est in ratione tripla; ergo cylindrus, cuius altitudo est semidiameter sphæræ, basis verò circulus maximus eiusdem sphæræ, ad excessum, quo superat hemisphęrium, erit in ratione tripla; ergo cylindrus, cuius altitudo est semidiameter sphæræ, basis verò idem circulus maximus, erit ad hemisphęrium in ratione sesquialtera; ergo cylindrus, cuius altitudo est sphæræ diameter, basis autem circulus maximus eiusdem sphæræ, erit ad sphæram ipsam in eadem ratione sesquialtera. Quod oportebat ostendere.

Hic

Hic opportunum videretur aliqua alia exempla Theorematum ad solida spectantium in medium afferre; quia tamen in eorum analysi semper quædam specialis inuoluitur methodus; propterea iuuabit aliqua alia exempla in proprijs locis tractare, vbi scilicet de ipsis methodis particularibus sermo futurus est.

DE EXERCITIO ANALYTICO EXERCENDO

In Resolutionibus, atque Compositionibus Theorematum Ad cæteras partes Metheseos pertinentium.

CAP. IV.

Ex Arithmeticis exempla desumuntur.

TAmetsi ex Veterum monumentis nobis non innotuerit huius Artis vsum in alijs Matheseos partibus à Geometria, extitisse, tamen non adeo Geometriæ proprium censendus vt alijs quoque eiusdem ordinis Disciplinis aptari nequeat, siquidem omnibus, quarum sunt principia causæ, & elementa illud quidem commune est, scilicet Analysin instituere, vt in prima resoluatur principia artificiosè id, quod positum est in quæstione; vt inde per regressum in propositi deprehensionem progressio fiat, quod conijcere licebit experiendo huius artis industriam in cæteris Matheseos partibus, è quibus primò se se Arithmetica offert, cuius esto.

THEOREMA.

Exemplum. XXXIV.

Differentia laterum duorum quadratorum ducta in quodlibet latus, facit differentiam inter quadratum prædicto lateri respondens, mediumque proportionalem inter ipsos numeros quadratos.

Sint numeri quadrati A, C quorum latera sint D, F, & inter A, C medio sit loco proportionalis B; differentia verò inter ipsos D, & F esto E. Dico productum ex D in E æqualem esse differentiæ inter A & B; atque productum ex E in F æqualem esse differentiæ inter B, & C.

Resolutio.

A	B	C
9	21	49
D	E	F
3	4	7

QVoniam differentia inter A, & B, est productus ex D in E; ergo A; vnà cum producto ex D in E æquabitur B; sed productus ex D in D est A; ergo productus ex D in D, & ex D in E, æquabitur B, sed productus ex D in F est B; ergo productus ex D in D, & ex D in E, æquabitur producto ex D in F; ergo D plus E æquabitur F. Quod ita se habet; est enim E differentia inter D, & F.

a ex elementis.

Rursus quoniam differentia inter B, & C, est productus ex E in F; ergo productus ex E in F, vnà cum B æquabitur C; sed productus [b] ex D in F æquatur B; ergo productus ex E in F, vnà cum producto ex D in F æquabitur C; sed productus ex F in F est C; ergo productus ex E in F, vnà cum producto ex D in F æquabitur producto ex F in F; Quod ita se habet; est enim E differentia inter D, & F.

b ex elementis.

Compositio.

QVoniam enim E est differentia inter D, & F, erit D plus E æqualis F; ergo productus ex D in D, & ex D in E æquabitur producto ex D in F; sed productus ex D in F est B: ergo productus ex D in D, & ex D in E æquabitur B, sed productus ex D in D est A, ergo A, vnà cum producto ex D in E æquabitur B; ergo differentia inter A, & B erit productus ex D in E.

Non dissimiliter ita ratiocinandum. Quia E est differentia inter D, & F, propterea productus

ductus ex E in F, vnà cum producto ex D in F, æquabitur producto ex F in F; sed productas ex F in F est C; ergo productus ex E in F, vnà cum producto ex D in F æquabitur C. Sed productus ex D in F est B; ergo B, vnà cum producto ex E in F æquabitur C; ergo differentia inter B, & C est productus ex E in F.

THEOREMA.

Exemplum XXXV.

Duobus numeris quadratis si numerus idem sigillatim additus fuerit, aggregatis per laterum differentiam sigillatim diuisis, numerus factus ex quotientum mutuo ductu, multatus numero, qui fuit quadratis additus, euadit quadratus.

Sint numeri quadrati A, B, quorum latera D, E, horum autem differentia C, numerus quicunque F additus ipsis A, B, faciat numeros, quibus diuisis per C, fiant quotientes G, K.

Dico factum ex G in K multatum numero F, euadere quadratum.

Sumatur numerus H, qui fit, si medius proportionalis inter A, & B, adscito F, diuidatur per C.

Resolutio.

A	16			B	49
D	4	C	3	E	7
		F	2		
G	6	H	10	K	17

Quoniam igitur productus ex G in K, detracto F, æquatur quadrato ipsius H, at verò D, G æquantur ipsi H, vt mox demonstrabitur, atque adeò producti ex H in D, & G æquantur quadrato ipsius H; ergo productus ex G in k, detracto F, æquabitur productis ex H in D, & G: sed productus ex H in D æqualis est producto ex G in E, detracto F, vt mox constabit; ergo productus ex G in K, detracto F, æquabitur productis ex G in H, & E, detracto F; vtrinque autem addito F, ergo productus ex G in K, æquabitur productis ex G, in H, & E. Quod ita se habet: ex H enim, & E componitur K.

Lemma primum.

A	16	L	28	B	49
D	4	C	3	E	7
		F	2		
N	18	P	30	M	51
G	6	H	10	K	17

Quod autem D, G æquentur ipsi H &c. sic ostendo. *Sint duo quadrati A,B, quorum latera D,E, horum interuallum C: inter A, B sit media prodortionalis L; tribus autem A,L,B addito F: proueniant N,P,M, quibus diuisis per C oriantur G,H,K, Dico D,G æquari ipsi H &c. Quoniam enim singulis A,L,B, additus est F, manifestum est summarum omnium N,P,M eadem interualla esse, quæ ipsorum A,L,B. At vero L superat A producto ex D in C, & B superat L producto ex C in E, ex antecedenti; ergo interuallum duorum N,P est productus ex D in C, & interuallum duorum P,M est productus ex C in E. Quoniam autem diuisis N,P,M per C oriuntur G,H,K, manifestum est duorum G,H, interuallum fieri diuiso per C interuallo ipsorum N,P, siue producto ex D, in C; Similiter duorum H,k, interuallum fieri, diuiso per C interuallo ipsorum P,M, siue producto ex C in E. At verò diuidendo per C productum ex C in D, & ex C in E, fiunt quotientes D,E; ergo duorum G,H interuallum erit D, & duorum H,K interuallum erit E; ergo aggregatum ex D, & G æquabitur H, & aggregatum ex H, & E æquabitur K.*

Lemma secundum.

Quod autem productus ex H in D æquetur producto ex G in E, detracto F, sic ostendo. *Quoniam enim ambo D,G æquantur ipsi H, ex eo quod præmissum est lemmate; propterea productus ex H in D æquabitur producto ex D in D, seu quadrato A, & ex D in G; at quadratus*

dratus A per constructionem est æqualis producto ex C in G, detracto F; ergo productus ex H in D æquabitur productis ex G in D, & C, detracto F: sed D, C componunt E, ex constructione; ergo producti ex G in D, & C æquantur producto ex G in E; ergo productus ex H in D æquatur producto ex G in E detracto F.

Compositio.

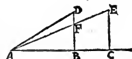
QVoniam igitur productus ex G in K æquatur productis ex G in H, & E, ex his enim componitur K, vt vidimus; vtrinque detracto F, fiet productus ex G in K, detracto F, æqualis productis ex G in H, & E, detracto F: sed productus ex G in E detracto F, æqualis est producto ex H in D, vt ostensum est, ob id fiet productus ex G in K, detracto F, æqualis productis ex H in G, & D. Quoniam verò D, G æquantur ipsi H; ergo producti ex H in D, & G æquantur quadrato ipsius H; ergo productus ex G in k, detracto F, æquabitur quadrato ipsius H. Quod erat operæ pretium ostendere.

Ex Opticis desumuntur exempla. Ex Opticis etiam, vt quædam depromamus, è quibus innotescit ratio resoluendi theoremata ad propria principia, ne dum in ijs, quæ purè Geometrica sunt, & Arithmetica, sed etiam in ijs, quæ mixtam dicuntur habere naturam, hæc subijciemus.

THEOREMA.

Exemplum XXXVI. *Sit oculus A, cui obiecta sint mobilia B, & C, quorum illud propinquius, hoc autem remotius: sintque duæ parallelæ BD, CE, in quibus prædicta mobilia æquè velociter cieantur. Dico eo tempore, quo mobile B promouetur, mobile C, oculo A videri tardiùs promouisse.*

Resolutio.



QVoniam igitur mobile C videtur oculo A segniùs, ac tardiùs promouisse, quàm mobile B; at quando mobile apparet eodem tempore percurrere spatium minus eo, quod ab alio percurritur, tunc tardiùs promouisse, videtur; ergo mobile C oculo A adspicienti, apparebit spatiũ quod minus est confecisse, eo tẽpore, quo mobile B confecit; sed BF est spatiũ, quod oculo A apparet confici à mobili C, tempore, quo mobile C conficit spatium CE, seu mobile B conficit spatium BD, cum CE videatur sub eodem angulo CAE, sub quo videtur spatium BF, ergo BF minor erit, quàm BD. Cùm autem duo mobilia B, C supponantur æquè velociter moueri, æqualibus temporibus, æqualia spatia percurrent. Itaq; cùm eo tempore, quo mobile C peruenit ad E, mobile B ex hypothesi peruenerit ad D; propterea BD æqualis erit CE; ergo BF, quæ erat minor quàm BD, erit minor quàm CE; Quod ita se habet, nã triangula ABF, & ACE sunt æquiangula: anguli enim ad B & C sunt æquales, ob parallelas BD, CE, itẽ ad F, & E, ad A est communis vtrique triangulo, atque adeò triangula sunt æquiangula; ergo vt AB ad AC, ita BF ad CE; Est autem AB minor, quàm AC; ergo BF minor erit, quàm CE.

Compositio.

QVoniam igitur AB minor est, quàm AC (supponimus enim mobile B propinquius oculo A) angulus autem ABF æqualis est angulo ACE, itemque angulus AFB æqualis est angulo AEC, ob parallelas BD, CE: angulus verò ad A communis vtrique triangulo ABF, ACE; ergo triangula ABF, ACE, erunt æquiangula; quare vt AB ad AC, ita BF ad CE, sed AB minor est, quàm AC; ergo BF minor erit, quàm CE. Cum autem duo mobilia B, C supponantur æquè velociter moueri, æqualibus temporibus æqualia spatia percurrent: eo tempore igitur, quo mobile C peruenit ad E, mobile B cùm ex hypothesi perueniat ad D, erit BD æqualis CE; ergo BF minor erit, quàm BD; sed BF est spatium, quod oculo A apparet confici à mobili C tempore, quo mobile C conficit spatium CE, seu mobile B conficit spatium BD, cùm CE videatur sub eodem angulo CAE, sub quo

videtur

videtur ſpatium BF, ergo mobile C oculo A adſpicienti apparebit minus ſpatium confeciſſe eo tempore, quo mobile B confecit; ſed quando mobile apparet eodem tempore percurrere ſpatium minus, eo quod ab alio percurritur, tardius videtur promouiſſe; ergo mobile C videbitur oculo A ſegniùs, ac tardiùs promouiſſe, quàm mobile B. Quod oportebat oſtendere.

Id quod ſequitur Theorema non ab omnibus fuit eodem modo demonſtratum: qui enim illud oſtendunt, ex eo quia radij vmbroſi cum luminoſis, à quibus proueniunt, rectas lineas conſtituunt, contenti ſunt hoc oſtendiſſe demonſtratione ducente ad incommodum; quemadmodum etiam & id, quod inde deducunt, vmbroſas lineas eadem numerari multudine, qua luminoſæ, quibus cohærent, alioquin plures rectæ lineæ commune ſegmentum haberent, quod eſt inconueniens.

Oſtenſiuè verò id ab alijs præſtitum eſt, &ſi non admodum accuratè.

Iuuat igitur illud aſſumere reſoluendum, ac componendum, vt demonſtratio ritè conſtruatur.

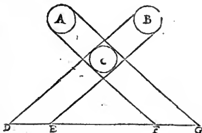
THEOREMA.

Corpus opacum tot fundit vmbras, quot ſunt luminoſa, quibus opponitur. Exemplum XXXVII.

Hoc perinde eſt ac demonſtrare ſi exempli gratia duo fuerint corpora luminoſa, totidem etiam fieri vmbras.

Sint duo corpora luminoſa A,B, corpus autem opacum C, non tamen poſitum in directum cum ipſis, & luminoſum A ſuos effundat radios in opacum, qui tamen protracti perueniant ad ſpatij puncta F,G; & luminoſum B, ſuos pariter effundat radios in idem opacum, qui pariter producti perueniant ad ſpatij puncta D,E.

Reſolutio.



Quoniam igitur in ſpatio FG eſt vmbra, ſed illuſtratio minor cõparatione maioris circumſtantis eſt vmbra; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio FG minor eſt circumſtanti; ſed illuſtratio, quæ fit ſolùm ab vno luminoſo minor eſt eâ, quę fit à duobus; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio FG eſt ſolùm ab vno luminoſo, puta B, & quæ circumſtat eſt ab vtroque A, & B. Quod ita ſe habet; nam in ſpatio FG impediente opaco C non fit illuſtratio à luminoſo A, & circumſtans fit ab vtroque.

Rurſus quoniam illuſtratio in ſpatio DE eſt vmbra; ſed illuſtratio minor comparatione maioris, circumſtantis, eſt vmbra; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio DE, minor eſt circumſtanti: ſed illuſtratio, quæ fit ab vno luminoſo minor eſt ea, quæ fit à duobus; ergo illuſtratio in ſpatio DE, eſt ab vno tantùm luminoſo puta A, & circumſtans eſt ab vtroque A, & B. Quod ita ſe habet, ob ſimilem ei, quam paulò antea nos attulimus cauſam.

Compoſitio.

Quoniam illuſtratio, quæ fit in ſpatio FG nequit eſſe à luminoſo A impediente opaco C, eſt ſolum à luminoſo B, & circumſtans fit ab vtroque luminoſo A, & B; ſed illuſtratio, quæ fit ab vnico luminoſo minor eſt ea, quæ fit à duobus; ergo illuſtratió, quæ fit in ſpatio FG minor eſt circumſtanti: ſed illuſtratio minor comparatione maioris eſt vmbra; ergo illuſtratio in ſpatio FG, vmbra erit.

Rurſus quoniam illuſtratio in ſpatio DE nequit eſſe à luminoſo B, impediente opaco C eſt ſolum à luminoſo A, & circumſtans fit ab vtroque luminoſo A, & B: ſed illuſtratio,

quæ fit ab vno luminoſo, minor eſt ea, quæ fit à duobus; ergo illuſtratio, quæ fit in ſpatio DE minor eſt circumſtanti: ſed illuſtratio minor comparatione maioris eſt vmbra; ergo illuſtratio in ſpatio DE vmbra erit.

Non diſſimiliter ſi plura extiterint corpora luminoſa, ſingulis reſpondere vmbras oſtendemus.

SCHOLION.

Vmbra quid.

Tenebra quid.

SVperior reſolutio vim deſumit ex natura vmbra, qua perperam à quibuſdam cum tenebris confunditur; rectè ſiquidem vmbra dicitur lumen imminutum, maioris, quod circumſtat luminis, comparatione. At verò hac inter lumen, & tenebras mediam naturam adepta eſt, cùm ex habitu, & priuatione ſimul compoſita eſſe dicatur. Vnde eſt quod primarium lumen vmbra rationem habere nequeat, cùm alterius luminis priuationem habere non poſſit; & quamuis dum exiguum aliquod lumen ſuper terram extiterit, tenebras ibi eſſe dicere conſueuerimus, tamen id familiari tantum vſui loquendi concedendum eſt, cùm tenebrarum ratio omne prorſus lumen excludat.

ex Catoptricis exempla deſumuntur.

Duo ſunt quibus vniuerſa Catoptrica innititur.

Et vt aliqua etiam ex Catoptricis deſumamus. Quoniam duo quidem ſunt, quibus vniuerſa Catoptrica innititur: vnum, quòd angulus reflexionis æqualis ſit angulo incidentiæ: alterum quòd in quolibet ſpeculo, imago apparet in concurſu catheti cum radio ab oculo per punctum reflexionis directè producto; vtrunque plurimum negotij faceſſit. Hęc quidem plerique ſuppoſuerunt. Alij naturalibus rationibus. Alij quibuſdam inſtrumentis ad id opportunis, confirmare conati ſunt, vt Alhazenus, & Vitello. Alij vt Euclides ex quadam ſuppoſitione id demonſtrare aggreſſi ſunt. Erat autem ſuppoſitio, quòd eadem ſit ratio lineæ interceptæ inter aſpicientem, & ſpeculum, & inter ſpeculum, ac rem inſpectam. Alij tandem demonſtrandum id ſuſceperunt, quòd factum fuiſſe à Ptolomæo Libro primo de Speculis, accepimus; imò, & ab Herone Mechanico in Catoptricis, teſtatur Heliodorus Lariſſeus, quatenus ab eo fuit oſtenſum rectas, quæ ad angulos æquales reflectuntur ſimul ſumptas minimas eſſe rectarum intermediarum ſimul ſumptarum, quæ reflectuntur ad inæquales angulos ad eaſdem partes, ab eadem, & ſimili linea; hoc enim demonſtrato, ait, naturam radios viſus noſtri ad æquales angulos reflexuram; ſic enim ſcribit. Ἀπέδειξε γὰρ ὁ μηχανικὸς Ἥρων ἐν τοῖς αὐτοῦ κατοπτρικοῖς, ὅτι αἱ πρὸς ἴσας γωνίας κλώμεναι εὐθεῖαι ἐλάχισταί εἰσι μέσων τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς καὶ ὁμοιομεροῦς γραμμῆς πρὸς τὰ αὐτὰ κλωμένων πρὸς ἀνίσους γωνίας; τοῦτο δὲ ἀποδείξας φησὶν ὅτι εἰ μὴ μέλλοι ἡ φύσις μάτην περιάγειν τὴν ἡμετέραν ὄψιν, πρὸς ἴσας αὐτὴν ἀνακλάσαι γωνίας. Hoc eſt; *demonſtrauit mechanicus Hero in Catoptricis, rectas, qua ad angulos aquales reflectuntur, minimas eſſe rectarum intermediarum, qua ad inaquales angulos reflectuntur ad eaſdem partes ab eadem, & ſimili linea. Quo demonſtrare, dicet, naturam radios viſus noſtri, ad aquales angulos reflexuram, niſi velit fruſtra viſum circumferri.*

Heliodorus in Opticis.

Hæc Lariſſeus poſtquam in antecedenti capite multiplicem viſus noſtri cum ſole conuenientiam, explicuiſſet, atque tandem ad calcem eiuſdem capitis, ea ad aures Platonis fuiſſe, teſtatus eſſet.

Quid præcipuè curandũ Analyſta, cùm de re quapiam ſuſcipit tractationem.

Hoc autem in primis Analyſtæ curandum, cùm de re quapiam tractationem ſuſceperit, videlicet id, vnde ſumendum ſit conſiderationis initium demonſtratione firmare, ſi tamen ſuppetet medium opportunum. Hoc autem in Catoptricis contingit, nam primo ſe ſe offert, quòd & ſi alioquin certum exiſtimetur, non dum tamen hucuſque demonſtratio creditur adinuenta, videlicet, quòd angulus incidentiæ ſit æqualis angulo reflexionis. Paucis tamen hęc omnia perſtringemus.

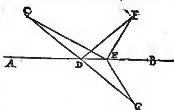
Cur angulus reflexionis aqualis ſit angulo incidentia.

Radius in corpora incidens, vel reflectitur, vel tranſit, vel immoratur; ſi namque incurrat in corpus molle, & opacum, vlterius non tranſit, ſed ibi moratur; ſi leue, & durum, reflectitur; & ſi pellucidum, pertranſit: pellucidum verò corpus, vel molle eſt, vt aqua, aer, &c., vel durum, vt chryſtallum, vitrum &c. ſed cæteris prætermiſſis reflexionem conſideremus, quam difficile eſt explicare juxtà Ariſtotelis principia, ſi ſermo ſit de reflexione luminis, & hoc qualitas exiſtimetur; non enim admodum facile comprehendimus qualitatem aliquam diffundi, eandemque reflecti, cùm potius corporibus ipſa reflexio accommodata videatur, vt patet de pilis luſorijs; quæ quidem in aliquod obſtaculum impulſæ re-

ſe reſiliunt; Non diſſimiliter de lumine ſentiendum; qua tamen id ratione fiat, ſi lumen qualitas realis, vel intentionalis extiterit, haud facile explicatu eſt: cùm longè meliùs intelligere cuique liceat ſupponendo, lumen eſſe lucidi corporis quoddam efſluuium; de hoc tamen in præſentia minimè diſſerendum, cùm quia potius ad Phyſicum pertinet; tum quia nobis tantummodo propoſitum eſt ex hiſce facultatibus exempla quędam excerpere ad Reſolutiuam methodum illuſtrandam; eo vel maximè quòd ipſius luminis reflexionem fieri ſupponimus; ſed cur ea lege fiat, vt angulus reflexionis incidentiæ angulo ſit æqualis, inquirimus.

Fuit à Ptolemæo demonſtratum Libro primo de Speculis, id ſanè contingere, quoniam tunc per lineas breuiſſimas viſio ipſa perficitur, propterea quòd Naturæ genio id maximè conſentaneum videtur, velut abhorrentis à ſuperfluo; & rectè quidem id de ſpeculo plano, & conuexo-ſphærico demonſtrauit, Demonſtrationes autem nos breuiter ſubijciemus. *Qua ratione id Ptolemæus demonſtrauerit.*

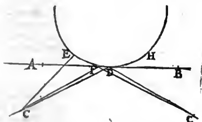
Sit planum repreſentatum per AB, in quod cadat ad angulos obliquos recta CD, cum AB faciens angulum CDA, quem incidentiæ nuncuparunt, cui per reflexionem fiat angulus æqualis FDB. Contendit Ptolemæus aggregatum ex CD, DF, eſſe omnium minimum, quæ fieri poſſunt ex alijs duabus lineis ductis à punctis C,F, vt ſunt CE, FE terminatis ad E punctum, in AB diuerſum à puncto D. Facilis eſt, & ſatis vulgata demonſtratio: nam protracta CD in G, vt DG ſit æqualis DF, ductiſque GE, EF. Quoniam angulus CDA æqualis eſt ex hypotheſi angulo FDE; eſt autem per 15. primi, æqualis etiam angulo GDE; ergo anguli FDE, GDE ſunt inuicem æquales, & latera DF, DG ſunt ex conſtructione æqualia; ergo baſis EF æquabitur [a] baſi EG: quare aggregatum ex CE,EG æquabitur aggregato ex CE, EF; ſed aggregatum ex CE, EG maius eſt recta CG; ergo aggregatum ex CE, EF, maius erit recta CG; Sed recta CG,cùm DG,DF ſint æquales, & CD communis, eſt æqualis aggregato ex CD, DF; ergo aggregatum ex CE, EF maius erit aggregato ex CD, DF. *a 4. primi.*



Imò illud hac in re videtur addendum, quod punctum vnde radius incidit in planum, & illud, ad quod terminatur per reflexionem, ſe habent veluti puncta ex comparatione facta, quæque Foci dicuntur Ellipſeos, cuius perimetrum tangit recta in puncto reflexionis, quæ ſcilicet communis eſt ſectio plani tranſeuntis per tria prædicta puncta, cum ſpeculi ſuperficie plana; Aggregatum enim ex directo radio, & reflexo æquale eſt maiori axi ipſius Ellipſeos. Nequit autem aliud eſſe punctum, in quo fiat reflexio: nam aggregatum radij directi, & reflexi, non poſſet eſſe æquale aggregato iam dicto; in eo ſiquidem puncto recta illa deberet perimetrum ipſius Ellipſeos tangere, ac ob id fieret contactus ipſius cum eadem recta in duobus punctis, quod fieri non poteſt: recta ſiquidem non tangit Ellypſin niſi vnico puncto. Angulus igitur incidentiæ, æqualis eſt &c. Hæc de plano. *Notanda.*

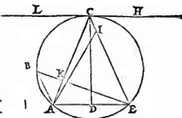
In conuexo-ſphærico ſic.

Sit circulare ſpeculum, cuius peripheria EDH; angulus incidentiæ CDE, & reflexionis GDH; oſtendendum eſt aggregatum ex CD, GD minimum eſſe &c. Recta AB tangat peripheriam in puncto D: ſitque quodcunque punctum acceptum E in peripheria, aliud à puncto D, ducta ſit GE, quæ occurrat AB in F, & ex F acta FC. manifeſtum eſt aggregatum ex CD, DG minus eſſe aggregato ex CF, FG, vt paulò ſupra demonſtratum eſt: ſed aggregatum ex CF, FG, minus eſt aggregato ex CE, EG, ergo aggregatum ex CD, DG, multò minus erit aggregato ex CE, EG.



Hæc de duobus ſpeculis iam dictis rectè concludunt, adeò vt huiuſmodi demonſtrationibus fuſſulti plerique, vt Ptolemæus, Hero, & Lariſſæus exiſtimauerint ſatis ſuperque

demonstratum fuisse, angulum incidentiæ æqualem esse angulo reflexionis, quoniam natura non impedita per breuissimas lineas operatur, sed non aduerterunt secus rem euenire in speculo cauo-sphærico, vbi demonstratione constat aggregatum ex radio directo, & reflexo, non esse minimum.



Nam sit circulus ACE, quem tangat quæpiam LH in puncto C, in qua rectæ AC, EC æquales angulos efficiant LCA, HCE. Accepto in peripheria quouis alio puncto B, ductisque BA, BE, ostendendum est aggregatum ex AC, CE, maius esse aggregato ex AB,BE.

Et quidem si EB foret æqualis EC, facilè constat; latera enim CE, EA, æqualia cùm sint lateribus BE, EA vtrunque vtrique, angulus autem AEC maior est angulo AEB; ergo basis AC maior erit basi AB, sed EB æqualis est EC; ergo aggregatum ex AC, CE maius erit aggregato ex AB, BE.

Si verò EC foret maior, quàm BE, secta EI, quæ sit æqualis EB, & acta AI. Quoniam latera AE, EI æqualia sunt lateribus AE, EB, vtrunque vtrique, & angulus AEI maior est angulo AEB; ergo basis AI, maior erit basi AB: sed EB æqualis est EI; ergo aggregatum ex AI, IE maius erit aggregato ex AB, BE; sed aggregatum ex AC, CE maius est aggregato ex AI, IE; ergo aggregatum ex AC, CE multò maius est aggregato ex AB, BE.

a 21. tertij, et 15. & 32 primi. b 4 sexti, & 16 quinti. c 12. quinti, &c. d 25. quinti.

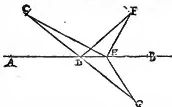
Sed generaliter quidem hunc in modum. Quoniam triangula ABK, KCE [a] sunt similia; ergo vt [b] EC ad AB, ita KC ad KB, & Ek ad Ak; ergo vt [c] EC, plus KC, ad AB, plus Bk, ita KE ad Ak; ergo EC, plus KC tanquam maxima, vnà cum AK minima, hoc est aggregatum ex AC, CE maius erit [d] magnitudine quæ fit ex AB plus BK, vnà cum KE, hoc est aggregato ex AB, BE.

Ex his facile intelliges quam cautè procedendum sit in rebus Physicis, & quàm facile decipiamur in enunciando, ad pauca respicientes. Quid enim vulgatum magis in vniuersa naturali Philosophia, quàm illud effatum. *Natura per lineas breuissimas operatur, non impedita*. nisi profectò aliquod comminiscaris impedimentum, splendidè constat ex superiori demonstratione, haud bene hoc pronunciatum fuisse, cùm rem secus se habere in speculo cauo-sphærico, fuerit ostensum; illud igitur addendum, quòd natura operatur per lineas breuissimas quantum potest, de quo infra.

Alij propterea, quibus hoc idem fuit in delicijs tractare, cautiùs philosophantes, aliunde causam petendam esse, existimarunt; quoniam videlicet si liberè incidentiæ radius progredi posset, ab opaco non impeditus, efficeret angulum infra lineam, vbi reflexionis punctum, æqualem angulo incidentiæ. Vt si .e.g. foret recta AB, in quam incideret radius CD, hic nisi foret impeditus, sed vlterius progredi posset, efficeret angulum BDG, æqualem incidentiæ angulo CDA; at verò quoniam impeditur; reflecti debet faciendo angulum cum ipsa AB, æqualem illi, nempe BDG, quem alioquin effecisset non impeditus, sed BDG æqualis est CDA, vt constat ex decima quinta primi Elementorum; quare angulus FDB æqualis erit angulo CDA. Sed hæc nulla demonstratio est, quia etiam si radius CD non impediretur, & pertransiret liberè, aliquando non efficeret angulum BDG æqualem angulo CDA, sed aliquando maiorem, quandoque verò minorem, ex lege refractionis iuxta diuersa media, si radius videlicet incidens, puta CD, foret aptus refrangi, vt est radius luminosus &c. nam si foret corpus aliquod, vt pila lusoria, quæ propulsa in planum AB per rectam CD, reflecteretur secundùm DF, hæc locum non haberent. Accedit etiam quod non affertur causa, cur ex hypothesi quod recta transiens radius CD facit angulum GDB; si reflectatur huic æqualem angulum facere debeat BDF. Non dum igitur ex hactenus allatis, est demonstratum intentum.

Demonstratio quorundam.

Reijcitur talis demonstratio.

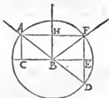


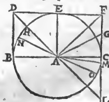
Specia-

Speciatim luminis reflexionem Neotericus quidam explicandam suscipiens, ait: posito quòd illud sit, quòd lumen sit substantia, perquam fluida, & validissimè à luminoso vibrata, & etiamsi non ita sit, ad crassitiem luminosi radij referendam existimat, ex eo quia posito quòd radius ille debeat decurrere post reflexionem per idem medium, puta aerem, per quod decurrebat ante reflexionem, non est cur vllo modo varietur eius densitas, partiumque constipatio, cùm neque in medio varietur raritas, frequentia, vel dispositio pororum, in quibus diaphencitas, & esse permeabile ipsius medij, positum esse videtur, quamobrem debet radius reflexus cum eadem sui crassitie physica procedere; probat autem non posse huiusmodi crassitiem æqualem seruari in vtroque radio, nisi & seruetur æqualitas prædicta angulorum. Vtcunque autem sit huiusmodi ratio, de qua alibi disserendum, illud saltem perspicuè interim constat, eam non esse communem, vt par esset pro omni reflexione; quænam densitas, constipatio, & crassities radiorum excogitari potest in motu pilæ lusoriæ, dum in aliquod obstaculum incurrit? & tamen si id contingat secundùm rectam perpendicularem, mobile redit per eandem viam, per quam directè processerat, si ad obliquos angulos, pergit vlterius, seruata repercussionis lege, vt reflexionis angulus æqualis sit ei, qui est incidentiæ. Fatetur ille communem hanc rationem se non assecutum fuisse; sed satis superque esse ad institutum de lumine, quòd constet reflexionem ad pares angulos contingere; Illud tamen pro lumine addendum, quod paulò antea innuimus. Verùm si, vt ipse quoque testatur, lumen quoddam effluuium est, non secus philosophandum de illo, ac de corpore incurrente in aliquod obstaculum, vnde ipsius motus reflexio ad pares angulos contingit. Communis igitur ea debet esse ratio, alioquin particulæ illæ per medium à lucido corpore vibratæ, haud in communi ratione mobilis conuenirent. *Alius explicandi modus à Neoterico quodam adhibitus.* *Superior ratio reycitur.*

Alij autem alia dixerunt, vel minus bene explicata, vel saltem minus rei naturæ consentanea, quibus prætermissis, vnum, vel alium modum à maioribus traditum, non pigebit; maioris hìc eruditionis gratia in medium afferre, vt inde nobis pateat aditus ad explicandum, quod post varias meditationes, propiùs ad verum accedere, ita visum est, vt theorema condere, illudque demonstrare fuerimus aggressi.

Iuxtà Cartesium ea videtur ratio, quoniam si rem ipsam sedulò perpendamus, nil aliud est quam inquirere, ad quam partem pila illisa debeat resilire. Intelligatur descriptus circulus ex centro B, qui transeat per punctum A, atque dicamus, spatio temporis eodem, quo progressa est ab A ad B, necessariò illam à B ad aliquod punctum huius circumferentiæ reuerti debere: siquidem omnia puncta, quæ eodem interuallo distant à B, quo distat A, in hac occurrunt circumferentia, supposito quòd pilæ motus sit æquè velox. Ad designandum verò punctum ipsum, quod ex omnibus huius circumferentiæ tangere debet, erigamus tres rectas perpendiculares AC, HB, & FE, super ipsam CE, ita vt AC, & FE æquè distent ab ipsa HB: mox verò concipiendum eo tempore, quo pila dextrorsum porrexit ab A, vno punctorum lineæ AC, vsque ad B, vnum ex punctis lineæ HB, illam resilientem ab HB, sistere debere in aliquo puncto lineæ FE, cùm singula puncta lineæ FE eadem distantia à linea HB remota sint, & eadem, qua singula lineæ AC, & ex priori dispositione tantundem eò inclinat, quantum antea: eodem autem momento aliquod punctum lineæ FE, & simul aliquod circumferentiæ AFD, nequit contingere, nisi in puncto D, vel F; extra enim hæc duo nullibi mutuò secantur, terra autem obstante, ad punctum D progredi non potest: vnde sequitur necessariò tendere debere ad punctum F, ac propterea constat semper reflexionem fieri secundùm angulum æqualem angulo incidentiæ; quæ quidem ratio quippe quę respicit tempus; minus arridet, accedit, quod non per admodum perspicua procedit. *Cartesij demonstratio de æqualitate angulo incidentiæ, & reflexionis, perpenditur.* *Cartesij demonstratio parùm laudatur.*





Aliqui itaque imaginantur, sic demonstrandum. Lucido existente in D, & puncto A in speculo BC, radios reflecti, sic, vt angulus reflexionis FAC sit potius æqualis angulo DAB, quàm angulus GAC v.g. vel alius quicunque. Supponunt enim motum radij vel lineæ DA, compositum *Aliorũ quoq; demonstratio, improbatur.*

esse

esse ex motu DE parallelæ ipsi BA, & ex motu DB perpendicularis ipsi BA, cùm imaginari liceat corpus aliquod in D, eodem tempore duci ab æqualibus potentijs ex D in B, & ex D in E; non enim, vel per DE vel per DB, sed per DA diagonalem descenderet. Cùm itaque satis constet, vim qua mouetur radius luminis diuersam prorsus esse ab ea, qua determinatur potius in hanc, quàm in illam partem, operosum non est intelligere motum luminis, quo descendit ex D in A mixtum esse ex duobus motibus, nempe ex motu qui fit ex D in E, & ex eo, qui fit ex D in B, ex quibus simul fit motus ex D in A, hi autem motus contrarij non sunt, sed dispositiones tantùm diuersas habent: vnde EA linea non impedit motum, qui fit ex D in B, sed potius BA: itaque tantùm BA aufert dispositionem motus ex D in A versus L, remanente motu, qui ab ipsa BA aliter dispositus tendit ex A in F; cùm alioquin deorsum vergeret, quinimò adhuc remanet dispositio illa, qua tendebat ex D in E, seu F. Cùm itaque non impediatur motus, sed vna tantummodo dispositio, adhuc altera perseuerante, necesse est effectum ipsius motus consequi secundum leges harum dispositionum, ita videlicet, vt motu composito ex motu per lineam AC, vel EF, & motu per lineam EA, vel FC, hoc est motu per diagonalem, peruenire debeat ad punctum F lineæ CF, quo eius dispositio tendebat, nam si alioquin peruenisset ad punctum G per lineam AG, aliquid ex motu contra hypothesin perdidisset. Necessario igitur remeare debet lineam AF æqualem ipsi AD, & sistere in puncto F intersectionis communis lineæ AF cum linea CF.

Kepleri ratio, reÿcitur. Hæc tamen ingeniosè sunt dicta, sed non dum satis rem attingunt; nec ab adæquatis causis illam deducunt. Neque Keplerus in suo Paralipom. ad Vitellonem cap. 1. prop. 19. admodum feliciter propositum ostendit; etenim illa conflictus virtus, in Demonstrandi ratione non videtur plausu digna.

Authoris ratio affertur. Supponamus corpus impelli ex E in A per EA super planum BC, ita vt EA sit perpendicularis ipsi BC, & quidem liquido constat illud reuersurum per eandem AE. Imò adeò reuersurum, vt si corpus quidem sua grauitate incurrat in planum, vt quando graue cadit super planum horizontale redeat ad idem punctum vnde ceciderat, quod ego non semel sum expertus Florentiæ pilis quibusdam vitreis diuersæ magnitudinis, ita vt crassities, & pondus non officeret, sed æquè resiliret, siue esset maioris, vel minoris molis, ac ponderis: minor autem erat diametri, quanta est latitudo duorum digitorum; curabam verò, vt caderet super Iaspidem valde tersum, experimentoque facto ex varijs altitudinibus, deprehendi id perpetuo contingere, quod mihi admodum singulare visum fuit; suspicabar enim valde ne vnquam pila ex aliqua materia confici posset, quæ tam magnam reflexionem præstaret. Sed redeamus in orbem sermonis. Supponamus ex E per rectam perpendicularem EA pilam ipsam cadere. In huiusmodi motu duo se consideranda offerunt, & motus ipse, & eiusdem directio: dum ex E cadit pila in obstaculum A, motum profectò non ammittit, siquidem non ibi sistit sed resiliendo adhuc mouetur; quod autem prorsus ammittit directio est, propterea quod tendebat ad infera, & interposito obstaculo, cogitur per eandem lineam resilire, hoc igitur maximum est detrimentum directionis, quòd mobile subire possit. At verò si illud idem mobile fuerit propulsum per rectam DA non ammittet motum dum obstaculum offendit, sed ex parte, ipsius motus directionem, ita vt quò magis recta illa per quam propellitur mobile, recesserit à perpendiculari EA, eo minus ammittat de ipsius motus directione, ita vt si tandem per lineam horizontalem, atque adeò parallelam ipsi BC, propellatur, nil prorsus de directione deperdat. Quando itaque proijcitur pila per rectam DA, tantùm directionis detrimentum patitur, quantum angulus DAB requirit, nec motus habeat, qui tamen perseuerare debet, à quo resarciatur damnum directionis suæ, propterea mobile prosequitur motum cum eodem directionis detrimento, atque adeo secundùm rectam AF, quæ æquè declinat abs EA, ac ipsa DA, cumque AC constituit angulum FAC æqualem angulo DAB.

Id autem æque continget si intelligatur planum in situ NO, nam graue perueniens deinde super huiusmodi planum in A maximum detrimentum directionis patitur secundùm rectam illi perpendicularem, à quà æquè recederet tam DA, quàm AM: vnde si mobile propelleretur per DA, reflecteretur per AM, facientem angulum MAO æqualem angulo DAN, ob eam, quā attulimus causam, atque hinc mihi videtur satis superque demonstratū intentum.

Alia Authoris ratio affertur. Sed illud non prætermittam, vnde eadem veritas conuincitur, & se habet tanquam demonstratio ab effectu, quæ in rebus Physico-Mathematicis spernenda omnino non est.

Suppona-

Supponamus planum AC, & in eius punctum B cadant duæ rectæ DB, FB, Si igitur speculum fuerit AC, & obiectum in recta BF, vt in F, sit autem inspector in recta BD puta in D, adeo vt radius FB sit incidentiæ, & DB sit reflexionis, ostendendum est angulum DBA æqualem esse angulo FBC. Sit inspector in D, & alter in F, ita vt vterque duplici munere fungatur, & inspectoris, & rei inspectæ. Quando itaque inspector in D videt existentem in F per radium BF reflexum in D, vtique respectu ipsius angulus FBC est incidentiæ, & DBA est reflexionis; at verò dum simul inspector in F intuetur existentem in D per radium DB reflexum in F, respectu inspectoris in F angulus DBA est incidentiæ, & FBC reflexionis; quare idem angulus DBA erit angulus incidentiæ, & reflexionis, & FBC erit itidem incidentiæ, & reflexionis. Si igitur idem angulus potest esse incidentiæ, & reflexionis necessario consequitur angulum incidentiæ æqualem esse angulo reflexionis.

Deinde si angulus incidentiæ DBA non est æqualis angulo reflexionis FBC, vel igitur maior, vel minor. Sit primò maior. Supponamus nunc rem aspectabilem, vel lumen in F, cum eodem, quo prius tramite supponatur fieri irradiationem; ergo angulus incidentię FBC, maior erit angulo reflexionis ABD contra hypothesin, nam angulus FBC supponebatur minor.

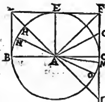
Nunc analyticè, & syntheticè propositum exequemur.

THEOREMA.

Angulus reflexionis æqualis est angulo incidentiæ. Exemplum XXXVIII.

Sit planum BC in quod incurrat mobile per rectam DA, & reflectatur ad F. Dico angulũ EAF, ęqualẽ esse angulo DAE, seu FAC reflexionis æqualem esse angulo DAB incidentię. Ex puncto A excitetur AE perpendicularis ipsi BC.

Resolutio.



QVoniam igitur corpus propulsum subeundo reflexionem per rectam AF, eam subit secundùm angulum EAF æqualem angulo complementi EAD motus directi; vel secundùm angulum FAC æqualem incidentiæ angulo DAB motus directi; sed corpus propulsum subeundo reflexionem habet directionis detrimentũ, ęquale prorsus ei, quod habebat in motu directo; ergo corpus propulsum per rectam DA habet detrimentum in directione motus secundùm angulum complementi DAE, vel incidentiæ DAB. Sed declinatio à perpendiculari EA est angulus DAE complementi, & inclinatio ad planum BC est angulus DAB incidentiæ; ergo corpus propulsum per rectam DA, detrimentum habet in directione motus secundùm declinationem ipsius DA à perpendiculari EA, vel inclinationem ad planum BC; sed ratio recessus à maximo directionis detrimento est secundùm declinationem ipsius DA à perpendiculari EA, vel ratio accessus ad nullum detrimentum secundum inclinationem eiusdem DA supra planum BC, in quod mobile cadit; ergo corpus propulsum per radium incidentiæ DA, detrimentum habet in directione sui motus iuxtà rationem recessus à maximo directionis detrimento, vel accessum ad nullum eiusdem directionis detrimentum. Quod ita se habet ex hactenus disputatis &c.

Compositio.

QVoniam corpus propulsum per radium incidentiæ DA; detrimentũ habet in directione sui motus, iuxta rationẽ recessus à maximo directionis detrimento, vel accessum ad nullum detrimentum. Sed ratio recessus à directionis maximo detrimento est secundum declinationem ipsius DA à perpendiculari EA vel accessus ad nullum detrimentum secundum inclinationem eiusdem DA supra planum BC, in quod mobile incidit; ergo

corpus

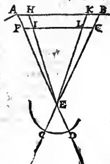
corpus propulsum per rectam DA detrimentum habet in directione sui motus, secundum declinationem ipsius DA à perpendiculari EA, vel inclinationem ad planum BC; sed declinatio à perpendiculari EA est angulus DAE complementi: & inclinatio ad planum BC est angulus DAB incidentiæ; ergo corpus propulsum per rectam DA habet detrimentum in directione motus secundum angulum complementi DAE, motus directi, vel incidentiæ DAB motus directi; sed corpus propulsum subeundo reflexionem habet directionis detrimentum, æquale ei quod habebat in motu directo; ergo corpus propulsum subeundo reflexionem, per AF eam subit secundùm angulum EAF æqualem angulo complementi DAE, vel secundū angulum FAC æqualem angulo incidentiæ DAB. Quod oportebat ostendere.

Quod in Catoptricis maximè decantatum. Nihil est magis decantatum in Catoptricis, quàm illud. In quolibet speculo imago apparet in concursu catheti cum radio ab oculo per punctum reflexionis directè producto, quod apud Veteres, nempe Alhazenum, & Vitellonem legimus experimentis potius, quàm demonstrationibus comprobatum; ab alijs verò non admodum accuratè, re reducta ad sua propria principia; propterea de his multa dicenda occurrent, à quibus tamen est abstinendum, cùm hic nobis in animo non sit Catoptricam tradere sed tantummodo delibare aliquid, in quo vsus Resolutricis artis eniteat, ac ob id paucis rem ipsam perstringam.

Tria igitur numero sunt, quibus omnia speculorum experimenta solui, explicarique possunt. Primum est illud de quo supra, videlicet angulos incidentiæ, & reflexionis æquales inter se esse. Secundum, rem apparere in perpendiculari quam cathetum appellant, a re in speculum demissa. Tertio rem eandem in radio reflexionis videri.

Non desunt quibus videatur id secus contingere, quinimò ibi nec etiam vllam esse reflexionē, nec refractionē obiecti, locumq; apparentem semper oculo propinquiorem esse, quā locus verus sit, videlicet in visione directa. Vnde colligunt locum imaginis per reflexionem eundem esse, qui esset sublato speculo, & translato obiecto tantundem vltra speculi locum per visionem directam. Colligunt etiam deceptos esse hactenus omnes, qui nedum affirmarunt, sed pro axiomate, & fundamento doctrinæ posuerunt locum imaginis cuiuslibet puncti visi per reflexionem esse in perpendiculari, quæ ducitur ab obiecto ad superficiem, ita vt in omnibus speculis locus imaginis sit in concursu rectæ à quouis puncto obiecti ductæ perpendiculo oculi parallelæ cum linea visuali &c. Hæc tamen obiter dicta sint. Solum illud innuam, vnde hæc deduxerunt.

Intelligatur AB linea recta: retinæ arcus CD, cuius centrum E. Contendunt AB apparituram esse citra AB, puta in FG, & esse FG minorem ipsa AB, quorum ipsis hæc est demonstratio. Intelligatur A pars obiecti adeo exigua, vt in distantia AE, sola existens, videri non posset: sumatur deinde alia pars H, quæ sit ipsi A æqualis, itaque nec ea si sola esset videretur; vtraque tamen oculum mouet etiam sola, nempe pars A per rectam AE, & pars H per rectam HE, quæ quidem rectæ conuergunt vsque ad occursum in centro E. Quoniam verò coniunctis ipsarum partium intermediarum viribus fit visio totius AH, videlicet imago eius aliqua, imago illa apparebit, ex ea parte vbi vires coniunguntur, idest ex ea parte vbi AE, HE conuergunt, quod est citra obiectum AB alicubi puta in FI; videbitur ergo A cum partibus sibi proximis in recta AE ad partem F, & pars H cum suis vicinis ad partem I, totumque AH apparebit in FI, quæ minor est quam ipsa AH, & ob eandem rationem BK videbitur in GL, atque totum obiectum AB in FG.



Quanti autem fieri debeat hoc demonstrandi genus, cuiusque iudicio relinquo; solum id commemorabo, posse quempiam ratiocinari ad eum, qui sequitur modum. Veræ magnitudines inæquales non sic se habent, vt anguli optici, quibus conspiciuntur, sed potius maior est magnitudinum, quàm angulorum ratio, si maior minori compararetur. At apparentes rerum magnitudines ita sunt inter se, vt anguli opticarum pyramidum, quibus comprehenduntur; maior propterea erit verarum, quàm apparentium magnitudinum ratio, si maior minori compararetur. Vnde nunquam ita magnitudines rerum apparent, vt sunt, sed potius perpetuò minores apparent, quàm re verà sint, cùm semper minor

minor ſit apparentium magnitudinum ratio, quàm verarum. Diſtantiæ autem minores, quàm re ipſa ſint, conſpiciuntur, at eodem exiſtente angulo; propterea ex his illud melius quiſpiam deductum credet. Sed de hoc alibi.

Euclides Theoremate decimo ſexto nititur id probare de ſpeculis planis, decima ſeptima, & decima octaua de cauoſphæricis, ſed haud ſatis feliciter, vt non immeritò eum reprehenderit keplerus, etſi fortaſſe non admodum accuratè; idem tentarunt Alhazenus, & Vitello, ille quidem Libro quinto numero 9. & 10; hic autem libro quinto propoſitione 36. Ille multa miſcet, inter quæ vnum, quod Keplerus irridet, nec iniuria, dum ſcilicet ille pronunciauit. *Rerum naturalium ſtatus reſpicit ſitus ſuorum principiorum, & principia rerum naturalium ſunt occulta*. Quibus, vt notat idem Keplerus, duo dicit: primum repetit id ipſum, quod propoſitum erat: ſecundum ait, cauſam eſſe occultam. Vnde parum ſatisfacit. Alhazenus initio eiuſdem libri quinti nititur id comprobare experimento, mediante baculo, in quo ſignatum ſit punctum nigrum, eoque erecto normaliter ſupra ſpeculum &c. Numero autem octauo, difficultate fortaſſe vexatus, enunciat irriſione digna, præſertim dum ait, *viſus cum acquirit formam per reflexionem, acquirit eam ſtatim ſine certitudine, & acquirit longitudinem per æſtimationem*. Deinde paulò poſt, *viſus acquirit longitudinem per ſyllogiſmum*. Deinde paulò infra, *cùm*, inquit, *viſus comprehendit rem aliquam per reflexionem, non comprehendit longitudinem imaginis niſi per æſtimationem; deinde adhibita diligentia acquirit longitudinem, & verificat per ſyllogiſmum per magnitudinem rei viſæ, & angulo pyramidis, ſuper quam forma reflectitur ad viſum*. Si verificare per ſyllogiſmum refeгat ipſe ad viſum, facit viſum ipſum rationalem, ſi hoc autem eſt ſapere, dicat mihi quæſo quid nam ſit deſipere. Vitello non meliora protulit, non eodem tamen modo ratiocinati ſunt de refractione loquentes, cùm nihilominus videatur cauſa communis. Alij autem multa dixerunt. Keplerus, vt veram huius rei cauſam afferat, cuius ignorationem, in hac doctrina maculam fœdam eſſe dicit, præmittit veluti neruum demonſtrationis, quòd in planis ſpeculis anguli, quibus res videntur ex repercuſſu, non mutantur in conuexis, & concauis, & medijs denſioribus, omninò mutantur &c. affert definitionem imaginis deſumptam ab Opticis, adiungens, imaginem eſſe viſionem rei alicuius cum errore facultatum ad viſum concurrentium coniunctam, & imaginem per ſe penè nihil eſſe, & potius imaginationem dicendam, imò compoſitam eſſe rem ex ſpecie coloris, vel lucis, reali, & quantitatibus intentionalibus, & alia conſimilia addit, quæ hic ſubijcere minimè videtur operæ pretium; vel enim ſunt mera figmenta, & parum Philoſopho digna, vel nihil faciunt ad inſtitutum. Sed his prætermiſſis, paucis rem expediemus.

Primùm illud præmittendum, nempe quòd oculus, res aſpectabilis, & punctum reflexionis ſint in vna, eademque ſuperficie, quam Optici dicunt tribus punctis definiri, ſcilicet centro viſus, puncto rei viſæ, & puncto repercuſſionis, vel refractionis, quod demonſtrare elementare eſt; Tria enim puncta lineis rectis connecti poſſunt, vnde fit triangulum, cuius vnam partem in vno plano, aliam in alio eſſe non poſſe demonſtrauit Euclides lib. vndecimo; itaque planum per illa tria puncta tranſibit. At verò aliud, videlicet huiuſmodi planum erectum eſſe ſupra ſpeculi ſuperficiem, & huic ad rectos angulos inſiſtere, demonſtrandum ſuſceperunt aliqui, alij tanquam axioma protulerunt; cùm tamen re vera demonſtrabile ſit. Animaduertendum eſt, quod pluribus tractandis deſeruiet, Nobis aliquid demonſtrandum ſuſcipientibus opus eſſe præ oculis habere medij genus opportunum, an videlicet illud ſit purè Mathematicum, an Phyſico-Mathematicum, quod ex re propoſita facillimum erit deprehendere; ſi enim fuerit permixta ex magnitudine, & motu, vel tempore &c. medium idoneum Phyſico-Geometricum erit; ſic in re, de qua agimus; proponitur enim demonſtrandum planum tranſiens per illa tria puncta, perpendiculariter erectum eſſe ſpeculi ſuperficiei, quod ita eſſe experimento conſtat, quæritur tamen cauſa. Medium adhibendum Phyſico-Geometricum erit, ſiquidem puncta, lineæ, planum ad Geometram pertinent, ſed res ſpectabilis, quatenus huiuſmodi, & prout effundit ſui ſimulacrum per reflexionem ad viſum, Phyſicum eſt. Vnde medium Phyſico-Geometricum eſſe debet.

Perperam Keplerus reprehendit Alhazenum, & Vitellonem, quatenus id demonſtrare tentantes dixerint, naturam per breuiſſimas lineas operari; irridens enim illos. *Atqui* inquit *hæc opera non ſunt forma conſilio vtentis, aut finem reſpicientis, ſed materiæ ſuis Geometricis neceſſitatibus adſtrictæ*. At horologium conſilio non vtitur, nec finem reſpicit, & nihilomi-

Euclides ſupradicta male demonſtrauit.

Præmittenda quædam.

Prop. 2. lib. 11.

Keplerus reprehenditur.

hilominus regulari motu per reuolutionem rotarum index, in orbem actus horas singulas, earundemque partes accuratè designat; ad id enim auctoris consilio, non eiusdem horologij opus fuerat: hinc ea, quæ natura constant, etsi omni consilio destituta, facilè comprehendere licet, quonam pacto id præstent, quod alioquin videretur consilio referendum acceptum; namque naturæ opus rectè quidem opus intelligentiæ dicitur, cui sat est inesse consilium, à quo directa natura, simulque consecuta propensionem ad finem, quatenus huiusmodi, etsi non sibi, auctori tamen perspectum, ea exequitur, quæ ad ipsius consecutionem, conducunt. Ita graue per lineam rectissimam constanti lege descendit, telluris immobilitate supposita; sic etiam omne corpus luminosum radios rectissimos, etsi omni prorsus consilio destitutum, effundit. Non dissimiliter aspectabile immittit radium in superficiem repercutientem, qui breuissimus est omnium peruenientium ad visum, (hic de reflexione loquimur; nam de refractione alibi) & ea quidem est ratio, quoniam natura per breuissimas lineas operatur, sed quantum potest; idque superius pariter innuimus, hic magis explicandum.

Quorundam deceptio. Decepti quidem sunt existimantes reflexionis angulum esse æqualem angulo incidentiæ, ex eo quia natura contendens operari per breuissimas lineas, debeat hunc in modum operari, quasi aggregatum radiorum incidentiæ, & reflexionis, existentibus æqualibus angulis prædictis, sit minimum omnium; id enim falsum superius ostendimus. Rectè tamen philosophati sunt arbitrantes, naturam operari per lineas breuissimas; propterea quòd hæc per plura non præstat, quæ per pauciora præstare valet. Res igitur ita se habet, angulus reflexionis æqualis esse debet angulo incidentiæ, ob eam, quam superius attulimus causam, sed supposita horum angulorum æqualitate, natura operari debet per lineas breuissimas, & contra operari debet per breuissimas lineas, ita tamen vt operationem exerceat cum æqualitate angulorum reflexionis, & incidentiæ. Hoc igitur non est causa illius, sed cum eo necessariò connexum: vnde in speculo cauo-sphærico id quoque locum habet, nam aggregatum radiorum incidentiæ, & reflexionis, supposita angulorum æqualitate, minimum est: nec enim minus reperies, si anguli illi debeant esse inter se æquales. Non dissimili ratione in re, de qua disserimus, aspectabile nequit per reflexum transmittere imaginem sui ad visum per lineam breuiorem, supposito quòd angulus reflexionis æqualis debeat esse angulo incidentiæ, nisi per lineas descriptas in plano perpendiculari ad speculi superficiem; si nanque planum ipsum transierit, vt necessariò transire debet, per puncta rei aspectabilis, & visus, fueritque inclinatum ad superficiem speculi, rectæ ab hisce duobus punctis exeuntes facientes angulos incidentiæ, & reflexionis super prædictam superficiem, non faciunt aggregatum minus eo, quod supra diximus in plano perpendiculariter erecto, commemoratis angulis inter se æqualibus existentibus. Hinc itaque fit, vt huiusmodi planum debeat ad rectos angulos speculi superficiei insistere. Hoc idem ostendi potest demonstratione ducente ad inconueniens. His præhabitis.

Duo etiam prænoscenda sunt, quorum vtrunque demonstrabile est, videlicet Radium in qualecunque speculum cadentem, angulosque inæquales facientem, neque in se ipsum, neque versus minorem angulum reflecti. Secundum; radios à planis, conuexisque speculis reflexos diuergentes, esse citrà, conuergentes vltrà; nam de concauis constabit &c.

Principale autem subsequitur, quòd huiusmodi conuergentia fiat in puncto rectæ perpendicularis ad speculi superficiem.

Duobus autem modis institui potest hypothesis, vel supponendo plana verticalia transeuntia per vtrunque oculum, siue per extremitates pupillæ vnius oculi, vel planum vnicum &c.

Priori recepta hypothesi Theorema demonstrabitur ad eum, qui sequitur modum; præmissis tamen his.

SVPPOSITVM.

Supponendum illud, scilicet radios ab aspectabili incidentes in planum, dum reflectuntur ad spectatoris oculos, vel ad extrema diametri pupillæ vnius oculi, ab incidentibus æquales incidentiæ angulos, & à reflexis reflexionis angulos æquales fieri.

THEO-

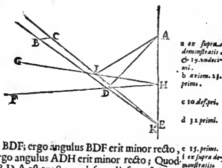
THEOREMA.

Exemplum XXXVIII.

Sit pupilla diameter BC, res aspectabilis sit A, vnde cadant radij AD, AI, qui super speculi superficiem DIH reflectantur ad puncta, B, C. Dico radios reflexos BD, CI protractos ad partes D, I, occurrere rectæ cadenti ex A perpendiculariter ad speculi superficiem, in infinitum protractæ.

Intelligatur planum transiens per puncta B, D, A, quaquauersum extensum in infinitum (transibit autem, cùm tria hæc puncta in plano sint) itemq; per puncta C, I, A, transibit autem &c. quorum vtrunque cùm transeat per punctum A, se mutuo secabunt, sitque communis sectio AK; cumque vtrunque transeat per puncta D, I, speculi superficiem secabunt, eorundemque communes sectiones sint FH, GH.

Resolutio.



QVoniam igitur radius reflexus BD protractus ad partes D occurrit rectæ cadenti ex A perpendiculariter ad superficiem speculi; at verò AH, seu AK est ᵃ perpendicularis ad speculi superficiem; ergo recta BD protracta ad partes D, & AH protracta ad partes H, concurrent ᵇ versus eam partem, vbi scilicet anguli sunt minores duobus rectis; sed angulus, quem facit FH, cùm AH protracta ad partes H, est ᶜ rectus; ergo angulus, quem facit BD protracta ad partes D cum DH, erit ᵈ minor recto: sed angulus, quem facit BD protracta ad partes D, cum DH, æqualis est ᵉ angulo BDF; ergo angulus BDF erit minor recto, sed angulus BDF æqualis est ᶠ angulo ADH; ergo angulus ADH erit minor recto; Quod ita se habet; planum enim transiens per puncta B, D, A est erectum ad speculi superficiem, quemadmodum planum per C, I, A, vt constat ex supra demonstratis, quamobrem eorum communis sectio AK, seu AH perpendicularis est speculi superficiei; vnde angulus ADH, debet esse minor recto.

a ex supra demonstratis, & 19. vndecimi. b axiom. 11. primi. c 10 def. pri. d 32 primi. e 15. primi. f ex supra demonstratis.

Compositio.

QVoniam igitur planum per B, D, A transit, erectum erit α ad speculi superficiem, itemque planum per G, I, A erit erectum ad eandem superficiem; ergo eorum communis sectio AK eidem perpendicularis erit β superficiei; ergo faciet γ angulos rectos cũ FH, & GH in puncto H; ergo angulus ADH minor erit δ recto; sed angulus BDF æqualis est ε angulo ADH; ergo angulus BDF erit minor recto; sed angulus, quem facit BD protracta ad partes D cum DH æqualis est ζ angulo BDF; ergo angulus, quem facit BD protracta ad partes D cum DH erit minor recto; sed angulus, quem facit FH cum AH protracta ad partes H, est η rectus; ergo recta BD protracta ad partes D cum AH producta ad partes H, concurret θ versus eam partem, vbi anguli sunt minores duobus rectis: sed AH est erecta ad speculi superficiem; ergo radius reflexus BD protractus ad partes D occurret rectæ cadenti ex A perpendiculariter ad speculi superficiem &c. Quod oportebat ostendere.

α ex supra demonstratis. β 19 vndecimi. γ 10. def. pri. δ 32 primi. ε ex supra demonstratis. ζ 15 primi. η 10. def. pri. θ 11. axioma primi.

THEOREMA.

Exemplum XXXX.

Iisdem positis. *Dico secundo, concursum esse in vno, eodemq; puncto.*

Resolutio.

QVoniam puncta K, & E sunt vnum, & idem; ergo latus HK æquabitur lateri HE: Est autem latus HD æquale lateri HI, vt mox constabit, angulus verò DHK æqualis ᵃ est angulo

a 10. def. pri.

angulo IHE, vterque enim est rectus, vtpote deinceps rectis AHD, AHI; ergo angulus HDk æquabitur b angulo HIE, sed angulus CIG æqualis est c angulo HIE, & angulus BDF æqualis est angulo HDK; ergo angulus BDF æquabitur d angulo CIG, at verò angulo AIH æqualis est e angulus CIG, & angulo ADH æqualis est angulus BDF, ergo angulus ADH æquabitur f angulo AIH. Quod ita se habet ex supposito.

b 4. primi. c 15. primi. d 1. ax. pri. e ex supra demonstratis. f 1. ax. pri.

Lemma.

Latus DH æquale esse lateri IH, sic ostendo. *Quoniam enim angulus AHD æqualis est angulo AHI, vterque enim est rectus, angulus verò ADH æqualis est angulo AIH ex supposito, & latus AH commune est vtrique triangulo; ergo latus DH æquabitur a lateri IH.*

a 26. primi.

Compositio.

QVoniam igitur angulus ADH ex supposito æqualis est angulo AIH, at verò angulo ADH æqualis est α angulus BDF, & angulo AIH æqualis est angulus CIG; ergo angulus BDF æquabitur β angulo CIG, sed angulus BDF æqualis est γ angulo HDK, & angulus CIG æqualis est angulo HIE; ergo angulus HDK æquabitur δ angulo HIE. Sed angulus DHK æqualis est ε angulo IHE, vterque enim est rectus, vtpotè deinceps rectis AHD, AHI, estque latus HD æquale lateri HI vt ostensum est; ergo latus HK æquabitur ζ lateri HE ergo puncta K, & E erunt vnum, & idem. Quod oportebat ostendere.

α ex supra demonstratis. β 1. ax. primi. γ 15. primi. δ 1. ax. pr. ε 10. def pr. ζ 26. primi.

His præhabitis. Esto.

Exemplum XXXXI.

THEOREMA.

In quolibet speculo imago apparet in concursu catheti cum radio ab oculo per reflexionis punctum directè producto.

Patet ex supra demonstratis, nam imago obiecti A est in radio BDK, seu BDE. Insuper eadem imago est in radio CIE, seu CIK, nam K, & E idem punctum significant; ergo imago obiecti A est in pũcto interfectionis, quod hisce characteribus significatur. Sed punctum istud est, in quo fit concursus catheti cum radio per reflexionis punctum directè producto; ergo &c.

Quæ autem diximus, ac demonstrauimus, etiam cæteris speculis scilicet concauis, & conuexis aptari possunt, & quidem his postremis, siue imago fit ante, siue ponè ipsummet speculum.

De horum autem speculorum proprietatibus, ac attributis multa dicenda suppeterent, à quorum tamen consideratione, tractationeque nobis est abstinendum, cum in animo sit tantummodo discurrere diuersas Matheseos partes, vt ostendamus in singulis tanti faciendum esse Analyticum opus, vt inde sperandum sit, ne dum Mathematicas demonstrationes ad veterem candorem redigi posse, verùm etiam harum disciplinarum incrementum, cùm hæc via sit in primis calcanda ad veritatis inquisitionem. Nos tamen plura scripsimus de re Optica, imò, & in Catoptricis, ac Diop tricis non pauca, huius artis opitulatione, adinuenimus, & si Deo placuerit tandem aliquando prodibunt in lucem.

Notanda quædam.

Hic non prætereo hoc idem satis perspicuè ostendi posse; ex eo quia quælibet res aspectabilis videatur tantæ magnitudinis, taliq; loco, prout tali angulo fuerit inspecta in tanta distantia; quamobrem si oculus alioquin constitutus supra planum vbi speculum, tantundem infra positus sit, in eadem linea perpendiculari rem eandem conspiciet; at & modo eodem, scilicet ijsdem dimensionibus præditam, & in eadem distantia, si radij ipsi progredi in directum intelligantur donec cadentibus perpendicularibus ex re aspectabili occurrant, vbi videlicet rem eandem eodem quidem modo adspiciet.

Vulgatum Theorema apud Opticos.

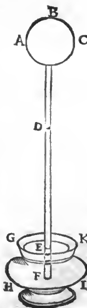
Vulgatum est apud Opticos Theorema illud, scilicet, quod lumen longiùs prouectum sensim languescat; verùm id non tam est proprium luminis, quàm caloris; Vniuersim igitur ineunda tractatio est de facultate vniuscuiusque agentis natura constantis, in exteriùs actionem suam effundentis; qua in re, vt veritatem assequi valeamus diligenter oportet aduertere operandi modum ipsius naturæ: lubet autem mentis aciem in vnum figere, quòd satis

fatis est obulum, nimirum ignem, vt de cæteris idem feratur iudicium, instar enim omnium hoc vnum erit.

Inualuit ferè toto terrarum orbe sententia, quæ non obscuri nominis Philosophantium animis insedit, videlicet ignem proprijs finibus coercitum secundùm sui substantiam, effundere actionem suam calefactiuam quaquaversum, atque spatium illud vniuersum, quoad porrigi potest huiusmodi actio, sphæram actiuitatis appellarunt, per quam quidem ipsi intellexerunt effundi actionem accidentariam terminatam ad calorem, vi præsentis ignis eductum è potentia materiæ, tum medij aeris, tum alterius cuiusque intra fines sphæræ actiuitatis ipsius, nulla tamen eiusdem ignis effluente substantia; sed quicquid potius caloris est effusum, illud esse nouiter eductum de potentia subiecti. *Communis ferè Philosophorum sententia.*

Verùm eos omnes quotquot extiterunt, fuisse deceptos innotuit experimento quodam, vnde conijcere mihi licuit rem non ita prorsus se habere: hac enim in re, vtpotè magni momenti, omni adhibita diligentia, curaque, denique deprehendi, effluere è corpore ignis substantiam eiusdem, adeò videlicet, vt cùm aliquid exponitur igni calefaciendum, non ideò calefiat tantummodo, quoniam è potentia materiæ ipsius nouiter eductus sit calor, quo id calidum euadat, sed quoniam excipit calidas particulas effluentes ab igne. Experimentum verò, nè nimium digrediar, præstat in Physicam differre. *Eam esse falsam Auctor ostendit.*

Obiter tamen illud innuam. Si calefactio ad eum modum contingeret citra particularum effluuium, sphæricè se se effunderet, ac propterea nisi aliquid impedimento esset, æquè calor produceretur supra, infra, & ad latera; secus autem rem euenire Termometri opitulatione deprehendi, siquidem illud in diuersis commemoratis positionibus adhibitum, me docuit plus longè caloris desuper procreari, minus ad latera, & adhùc minus infra ipsum corpus calefaciens. Si quid autem esset, vnde quispiam arbitrari posset, id ex accidenti prouenire, quatenus videlicet aeris circumstantes partes accurrentes, inferiùs, vtpotè crassiores, frigidioresque sub tenuioribus, atque calidioribus sursum auolantibus frigefacerent difficultatem præoccupaui, obuiam eundo medio instrumento ad id opportuno, obuiam inquam eundo aeri circumstanti, ne hunc in modum accurendo, caloris opus perturbaret. *Experimenti cuiusdam declaratio.*



Quod si inde non satis existimes confirmatum effluuium substantiæ igneæ, ex his, quæ modò subijciam, crediderim tantum roboris esse nostram sententiam suscepturam, vt in posterum nulla de ea futura sit dubitatio.

Esto solitum instrumentum, quo locus destitutus omni aere efficitur FA BC; hoc enim suppono repletum fuisse hydrargyro: clausoque orificio F, digiti applicatione, ipsoque inuerso instrumento, ita vt immersum sit clausum orificium prædictum in hydrargyrum restagnans in vase GHIK, eiusque vt tota pars demersa sit EF: tunc remoto digito qua data porta ruet hydrargyrum, ac propterea defluens per orificium F descendet ad stationem D, ita vt altitudo ED sit vnius brachij, cum quarta parte. Manifestum est locum DABC remanere omni aere destitutum; quod euidenter colligitur ex eo quia, inclinato instrumento EA BC existente tamen orificio F semper immerso, comperiemus hydrargyrum per tubum eleuari supra stationem D,& quo maior fuerit inclinatio,eo etiam maior fit eleuatio, donec tandē tota ipsa sphæra ABC repleta fuerit; at si non nihil aeris data opera fuerit relictum, quando scilicet clausum digito fuit orificium F, quod fit quando leniter comprimimus digito orificium ipsum, ita vt dum inuertitur instrumentum; permittatur aditus aliquantulum aeri, ascendet inclinato instrumento quidem hydrargyrum, nunquam tamen eo vsque, vt tota sphæra ABC repleatur impediente aere relicto, sed conspicietur summa ipsius portio hydrargyro destituta, puta in B; De hoc itaque nemini ambigendum. Cum autem hydrargyrum fuerit eleuatum vsque ad stationem D, applicato igne ad sphæram ABC cernitur deprimi hydrargyrum infra D, remoto redit ad pristinum statum, applicata glacie attol- *Experimentū præclarum ad confirmandū effluuium.*

litur;

litur, remota se restituit ad eandem stationem D. Si igitur calefactio sine substantiæ effluuio contingeret, sed tantum per qualitatis productionem in subiectum, perficitur, dicas mihi quæso, quod nam corpus est in loco DA BC, è cuius materia fuerit eductus calor? certè aer esse nequit, cum ibi desit, aliud non apparet; ergo non nisi effluuium substantiæ igneæ: hoc enim repletur locus DA BC, dumque se se dilatat, extrudit hydrargyrum, non secus ac si tãtum aeris relictum fuisset, ita vt, cùm, sua vi elastica maiorem occuparet locum, quàm DA BC, non potuisset hydrargyrum se continere in statione D, sed infra; & eo magis infra quò maior aeris copia intus inclusa fuisset. Quòd etiam eo magis comprobatum existimo; quoniam cùm aptassem intra sphæram ABC per orificium F filum ferreum, ad cuius extremum erat globulus plumbeus, & admoto igne per aliquod temporis spatium, statim extracto filo cum ipso globulo plumbeo, tangendo illum percepi excalefactum; qua igitur ratione id contingere potuisset per simplicem qualitatis productionem, si iam communi Peripateticorum calculo creditur agens non effundere actionem suam in distans, nisi prius operetur in medium contiguum, hoc se habente veluti conditione, si non tanquam id, cui in subiecto distanti producta qualitas suum esse debet acceptum referre? Imò id difficultatem adauget, quod globus ille plumbeus apertè cernitur; at qua nam ratione immittit imaginem sui? ex cuius nam corporis subiecta materia illam educit, si in illo interstitio inter globulum plumbeum in medio sphæræ constitutum, & corticem ipsius sphæræ vitream nullus est aer, nec vllum aliud corpus, nisi ibi adstruxeris effluuium substantiæ calidæ? si quid enim aliud, illud profectò commentitium erit.

Responsionis præoccupatio.

Aristotelis auctoritas ex 2. de Anima.

Neque dicas actionem in distans effundi præeunte actione in medio, quando hoc adsit, quod si desit, adhuc effundi; his enim non astipulabitur Aristoteles, qui dum inuehitur in Democritum secundo libro de Anima part. 74. reprehendit illum asserentem longè melius visam iri formicam in Cœlo, si nullum corpus mediaret inter oculum, & illam, existimans ad visionem plenum medium requiri.

Aristotelis auctoritas ex 4. Metheororum tex. 34.

Cùm igitur eius indolis huiusmodi corpus esse debeat, vt omnia peruadere queat corpora per poros, quibus scatent, plus, minusue pro sui structuræ ratione; facile mihi persuadeo illud, aliud non esse quidpiam, quàm effluuium igneæ substantiæ, quod placuisse Aristoteli licet colligere ex his, quæ ipse protulit libro 4. Metheororum part. 34. *Sunt autem combustibilia* (inquit) *quæcunque habent meatus susceptiuos ignis, & humiditatem in his, qui secundum directum, meatibus, debiliorem igne, quæcunque autem, aut non habent, aut fortiorem velut glacies, & quæ valde viridia sunt, incombustibilia.* Testimonio igitur Aristotelis intelliges ex corpore comburente expirare tenuissimas particulas, se insinuantes in corpora comburenda, & quasi terebrantes dissoluere. Præter hoc autem nùm nouiter aliquid producatur, in præsentia non quæro.

Ex corporibus omnibus expirare effluuia.

Experimentũ ad id comprobandum, mirabile.

Sed etiam ex alijs corporibus expirare quidem effluuia ex his, quæ modo subijciam facilè intelliges. Exarentur in charta litteræ aceto albo fortissimo, in quo tamen dilutum sit lithargyrium, quarum nullum vestigium apparebit, his autem exiccatis claudatur primis folijs alicuius crassissimi libri; alia autem charta paretur, quæ aqua illa inficiatur fætida, vbi calx viua cum auripigmento fuerit extincta, hunc autem in modum charta mollis claudatur postremis folijs eiusdem leuiter compressi; videbis enim in priori charta litteras conspicuas breuissimo tempore, non secus ac si attramento ductę fuissent. Si quis autem crederet id peragi solius qualitatis eductione, is profectò Metaphysici personã assumpsisse videretur.

Atrum autem colorem illum ex permixtione vnius cum alia substantia inde mihi suasi, quòd ex admixtione illius aceti cum aqua iam dicta, color ille consurgit.

Hîc Lectorem monitum velim, ne decipiatur si hoc experimentum apud Auctores legerit; cùm ab ipsis haud fideliter relatum fuerit; ad cum enim quem explicuimus modum fieri debet, vt voto respondeat euentus. Non semel enim illud à nobis felici successu factum fuit. De hoc tamen alijsque similibus quamplurimis in Physicis disputandum.

Admonitio!

Illud itidem addendum superest, quod nedum modò iam dicto contingit effluuium pertingere ad locum distantem penetrando folia vt diximus; verùm etiam nullis interpositis folijs solo intermedio aere, cùm fuerit in debita distantia suspensa charta, iam supradicta aqua, diluta, subtus verò, vel contra charta altera, in qua descripti sint characteres aceto supra relato, post modicum enim tempus, prædicti characteres se se dant in conspectum, non secus ac si forent atramento ducti.

Cæterum

Cæterum hæc non ita sunt vsurpanda, quasi mihi persuasum habeam nullam, agentis naturalis vi, qualitatem procreari, siquidem nihil mihi certius hoc naturæ opere, vt in Physicis demonstrabo; nam si nulla foret, saltem ea, quæ virtus impressa dicitur proiecto tributa à proijciente, adeò certa est, vt nihil supra, quod paulò infra paucis perstringam, eadem de re cumulatiùs in Physicis acturus. Sed hoc nihil foret, nisi etiam aliæ suppeterent, inter quas calor ipse, de quo sit sermo; Non enim eius vlla foret sensatio, nisi & ipse qualitas esset, circa quam sensus se se exerceret, & nisi etiam eadem sensatio, veluti qualitas nouiter producta, contingeret; siue enim id iuxta Democriti sententiam, vel ad Anaximandri aures explicare, vel aliquo alio modo contendas, oleum, operamque perdes; Neque enim sensationem illam tactus, particularum è tangibili profluentium incursu in sensus organum, vt videbatur Democrito, quatenus videlicet particulæ illæ sensus organum percellunt, illudque subeunt, neque per neruulorum motum, vt Anaximandro placuit, haud fieri, nullo alio addito suo loco mihi operosum erit ostendere. Fatendum quidem, vt paulò suprà dicebam, effluere calidas ex corpore calefaciente particulas, indeq; ab eo reliqua calefieri, harum exceptione, sed non citra qualitatis productionem, cùm effluxus ille particularum, ac incursus earundem in expositum calefaciendum, se habeat veluti conditio, ac applicatio virtutis ipsius agentis. Commentitium siquidem est omnino illud, quod plerisque Scholasticorum adeò arrisit, vt eorum nemini secus rem fieri posse, videretur; nimirum calefaciens nihil de propria substantia effundendo, sic propriam exercere actionem calefactricem, vt immediatè in ipsum corpus circumstans, eam effundat, nouiter caloris qualitatem educendo è potestate materiæ, eandemque protrahere non dissimili naturæ lege ad certum spatium, quod sphæram actiuitatis, quatenus in orbem fiat, appellandum duxerunt, quam si statuamus, veluti terminum particularum effluentium, rectè sensisse videbimur, vtpotè quam maximè ad veritatem accedentes. Exigua tamen admodum ea est, quam natura præscripsit qualitatis procreationi, vt ampla admodum particularum effusioni. Quod autem nos præcipuè præter commemoratum experimentum in hanc duxit sententiam, fuit animaduersio habita non tam de reflexionibus, quàm de refractionibus; haud enim facilè nobis videbatur explicari posse, qua ratione contingeret, vt crystallo terso, ac expolito exposito radijs solaribus, nisi foret id sphærica figura donatum, vel saltem ex vna parte sphærica superficie præditum esset, quamuis ex alia parte planum, ignis procrearetur. Quid enim confert figura illa ad eductionem caloris, imò & substantialis formæ ex potestate materiæ? Cur solares radij in planum crystallum incurrentes à tergo non conuergunt, vt inde ignis procreari queat? Vnde est quod illa figura lenticularis ad hanc radiorum fractionem desideretur, si lumen atque calor non alia ratione procreatus dicatur, nisi quia agentis vi, nullis affluentibus particulis à corpore calefaciente, ex subiectæ materiæ potestate fuerit eductus? non satis intelligo, quid commune habeat lenticularis figura cum illa qualitatis eductione è potestate materiæ: vt itaque ex omnibus corporibus in hac vniuersa compagine rerũ exiguæ particulæ exeunt, ita vt quodlibet corpus sua habeat effluuia; ita id eò, vel maxime censendum igni conuenire, quod huius ope cæterorum excitantur effluuia, ita planè odorosa corpora exposita, vel soli, aut igni, vehementius sua effundunt effluuia, quę alioquin constipante frigore, veluti conjecta carceribus, in suis ædibus detenta fuissent.

Non omnis qualitas vt gauda est.

Inde quoque non mediocriter inualescit assertum, quoniam rarefactioni maximè consentaneum videtur, cùm ea sanè contingat calidis particulis subeuntibus corpus, quod ea mediante maiores dimensiones adipiscitur, non quod ita contingat, vt nihil de nono excitetur; hoc enim intolerabile omninò, cùm multa sequantur incommoda, & si qui sunt, qui hac tempestate non pauci, quibus Peripatetica dogmata plus nimio arrident, in id tamen adeò propensi sunt, vt tametsi cætera respuant ab Antiquis tradita, hoc tamen vnum præ cæteris amplectendum existiment; non aduertentes, illud crimen incurrere quòd minus consequenter, se philosophatos præbeant; nam intrusis particulis calidis corpus aliquod maiores profectò dimensiones acquiret, sed si procreari substantiales formas, saltem aliquas, affirment, inextricabilibus difficultatibus premuntur; nam id non euenit, nisi præparata materia, tùm per qualitates primas, tùm per inde cõsequentes, quatenus videlicet magis, vel minus attenuata reddatur, quod à simplici partium distractione expectandum non est, ad id minimè idonea, cùm scilicet in singulis illis particulis, vtpotè subituris substantialem formam hæc maior, vel minor attenuatio fieri debeat. Quòd si hæc sibi parum negotij facessere

cessere arbitrentur, quòd fortasse in Veterum sententias abierint de animæ natura, quasi hæc è plurimis particulis sit coalita, iam recedunt à cæpto philosophandi instituto, minimè proprijs principijs hęrentes: preterquam quod oneri succumbunt explicandi sensationis modum, cùm particularum illarum nulla sentiendi facultate sit prædita, nec omnium aggeries, cùm hæc præter singulas nihil importet, cui sentiendi munus acceptum referri possit.

De his tamen hactenus.

Pluribus nanque, & experimentis, & rationibus, suo loco, quæ diximus confirmare tentabimus.

Interim audiamus, hoc tanquàm certo, ac explorato recepto, quid Philosophi senserint.

Explicatio quorundam. Aliqui igitur actionem illam calefactiuam imminui, ad rei naturam retulerunt. Sed beatissimi sunt, si felicitas in causarum assecutione posita est, iuxta illud. *Felix, qui potuit rerum cognoscere causas:* vnius enim cuiusque rei ijs admodum obuia causa erit, nec multum operosum videbitur ipsis primordia rerum omnium habere perspecta.

Aliorum explicatio. Alij propterea cautiùs loquentes, & si re fortasse cum ijs conuenirent, saltem verbis se dissentire ab ijsdem conati sunt ostendere; quamobrem existimarunt, id aliunde non oriri, nisi ex eo quia actio illa non infinitè procedat, sed definito spatio absoluatur. Etenim, vt ipsi aiunt, illud est naturæ lege præscriptum, vt vniuersis agentibus, quorum actio extra effunditur, commune sit, videlicet quòd ipsorum effectus longiùs producti, sensim decrescant; causam existimant, quòd illorum vis certo termino definiatur; hinc enim fit, vt in *Et deinceps.* proximo spatio tenuior, quam in ipsa sit causa effectrice, qualitas excitetur, atque adeò in remotiorem partem, tenuiorem quoque agens ipsum qualitatem producat, alioquin in infinitum eius actio progrederetur, si videlicet præuia illa qualitas, qua agens afficitur, æqualem sibi in proximo medio procrearet, sic & in partibus remotioribus; vnde nusquam foret status, ac finis agendi; cùm tamen omnia agentia actiuitatis terminum habeant disparem, prout singulorum virtus, ac energia magis, vel minus breui compendio fuerit definita. Et vt verbo dicam, huius arcani ea causa ipsis visa est, quod vnumquodque agens, si primum excipias, eá sit donatum vi, vt fortiùs, atque arctiùs in breuiorem distantiam, debiliùs, ac infirmiùs in maiorem, operetur.

Si igitur spectentur radij exeuntes ab ipsa causa effectrice sigillatim, sic se habent apud ipsos, vt in parte propinquiori sint robustiores, & quo pars fuerit remotior, eo sint debiliores, atque hunc in modum, vt ipsi loquuntur, vniformi quadam difformitate, tandem languescant. Hæc est apud illos vniformis difformis effusio caloris prodeuntis ab igne, quem putant, modo iam explicato, fortiùs operari in propinquius, at verò debiliùs in remotius, vniformi iam dicta difformitate.

Reijcitur. Sed hæc non cohærent cum ijs, quæ experimento nobis innotuerunt; si enim ignis calefacit effundendo particulas propriæ substantiæ, certè radij calorifici longè aliter explicandi sunt: dicendum enim, potius calorem illum progressione languescere, quoniam in sphæræ modum se se diffundit, ita vt ignis sit in centro huiusinodi sphæræ, quam cum ijs, actiuitatis appello, vbi sphæræ nomine, nè Geometricè intelligas solidam figuram ab ipsis definitam, quasi extremum huius sit superficies, intra quam punctum existat, à quo omnes lineæ ductæ, & ad prædictam superficiem terminatæ sint inter se æquales; non enim sic se res habet, longè siquidem acriùs, & in longiorem distantiam ignis operatur sursum, quàm ad latera, & ad latera magis, quàm deorsum; si tamen sit illi circumfusus aer; nam alioqui in loco vnde omnis erat aer extrusus à nobis medio hydrargiro, vt fieri solet (qua de re suo loco) obseruauimus nec fumum ascendere, imò descendere, nec flammam excitari, quamuis combustibile sui natura facile in flammam abire posset; erat enim bombix illita suphure; quemadmodum æsca erat, quod adhibuimus pro experimento fumi; quomodo autem accensio facta fuit, suo loco explicabimus. Sed potius sphæræ nomine intelligenda solida quædam figura rotunda, non quaquauersum æquè sic se habens; ad hanc igitur superficiem vtcunque rotundam actio calefactiua peruenire dicitur, quatenus ad eam radij calorifici iam dicti terminantur. Si ab ipso igitur igne, veluti centro, rectos vndique radios ad superficiem illam protensos, animo concipiamus, comperiemus, quò longiùs à medio progrediuntur, eò semper ampliori interuallo ab inuicem diuaricari: contra autem eò semper arctiùs stringi, quò propiùs ad centrum accesserint, quoad in vnum tandem simul omnes conueniant, seque mutuò amplectantur. Si igitur quidpiam fuerit expositum igni calefaciendum, dùm

propè

propè fuerit constitutum, longè plures radios excipiet, quàm à longè, & eò plures, quò fuerit propinquius, & eò pauciores, quò fuerit remotius, quæ vt meliùs intelligantur, infra positum schema iuuabit intueri.

Exploratum est Opticis validiores radios calorificos à centro Solaris corporis prodire, quod etiam de igne existimandum; non enim cortex tenuis ignea sphæricæ figuræ æquè calefaceret, ac ignea sphæra; verùm illud quoque apud ipsos receptum est, scilicet ab omni puncto Solaris corporis secundùm omnem positionem radios exire luminosos, qui tametsi ex vno puncto proueniant, atque adeò sint diuergentes; nihilominus in tàm longinqua distantia, qui in speculi superficie excipiuntur, veluti paralleli existimantur, atque adeò speculi beneficio conuergūtur sic Mechanici pro proparallelis accipiunt lineas ab extremis libræ coeuntes in telluris centro. Sic Astronomi paruos arcus circulorum maximorum in primo Mobili pro lineis rectis, paruum illud discrimen negligentes, nec immeritò, nam exiguam differentiam etiam natura negligit. Tria igitur in vniuersum sunt radiorum genera, nam aliqui sunt diuergentes; alij verò conuergentes, & alij paralleli. *Radij extimates à centro corporis solaris sunt validiores.* *Tria sunt radiorū genera.*

Sit corpus aliquod luminosum, vnde exeant radij tùm à centro, tùm à quolibet superficiei puncto, & quidem generis omnis, nempe diuergentes, conuergentes, & paralleli. Lux effluit per lineas, siue radios rectos, & sine aliqua interruptione à corpore lucente, & Lux ipsa sphæricè dilatatur, omneque punctum lucidum infinitis lineis, seu radijs diffunditur; in huiusmodi autem effluxu extra lucidum corpus vbique terminum reperire potest occurrente corpore transitum impediente; hic autem effluxus fit secundùm trinas dimensiones. Hæc incidens in opaca, vel densa non quiescit, sed reflectitur angulis incidentiæ, & repercussionis equalibus in oppositā partē, hæc ipsa verò coarctari, & condensari potest in punctum. *Explicatio supra dictorum.*

His autem præhabitis consideremus schema infra.

A punctis superficiei corporis luminosi, cuius centrum A, exeunt radij triplicis generis, vt diximus, effusio verò hæc hactenus non benè fuit explicata, nam keplerus arbitrabatur rem sic se habere.

Sicuti se habent sphæricæ superficies, quibus origo lucis pro centro est amplior ad angustiorem, ita se habet fortitudo, seu densitas lucis radiorum in angustiori, ad illam in laxiori sphærica superficie, hoc est conuersim.

Si radij non nisi forent diuergentes, rectè quidem Keplerus rem explicasset, sed nec ipse, nec alij id demonstrarunt, quod nos in præsentia præstandum suscepimus. Vnde ratio virtutis superficiei minoris sphæræ, cuius centrum sit corpus lucidum, vt est ad superficiem sphæræ maioris, ita reciprocè esset virtus ad virtutem: sed ne dum ad radios diuergentes respicere oportet, verùm etiam ad alios, quibus natura vtitur; Res autem videtur sic explicanda. Sint radij diuergentes AL, AM intercipientes arcum LM peripherię maioris, itemque EG peripheriæ minoris; intelligantur ductæ EH, Gk parallelæ rectæ AI bissecanti arcus LM, EG, itemque BD in punctis I, F, G; manifestum est, longè plures radios excipi in EG, quàm in HK, vnde corpus constitutum in EG, ideò plus calefit, quàm si fuerit collocatum in HK, quia ibi plures radios excipit diuergentes (æque enim parallelos) quàm hìc. Si virtutem lucis in lineis spectare velimus, eam esse rationem ipsius in EG ad eandem in LM, quæ est reciprocè arcus LM ad arcum EG, hic demonstrare tentabimus. His tamen præmissis. *keplerus haud benè de intensione locutus.*

Definitio Prima.

Diuarications radiorum sunt eorundem radiorum interualla accepta in circumferentijs, ad quas è circulorum centris idem radij perueniunt.

Definitio Secunda.

Similes diuaricationes dicuntur, quæ accipiuntur penes interualla similia circumferentiæ vnius, & alterius circumferentiæ.

THEOREMA.

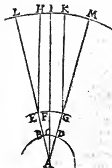
Si virtutis intensio attendatur in lineis. Eadem est ratio arcus ad arcum similem reciprocè, quæ est intensionis ad intensionem virtutis. Exemplum XXXXII.

T Sit lu-

Sit luminosum in A, vnde profluant radij AL, AM vsque ad circumferentiam LM, sic etiam arcus EG, cuius centrum sit idem A, Erit autem arcus LM similis arcui EG, vt constat ex Elementis,

Dico, vt est arcus LM ad arcum EG, ita esse reciprocè intensionem virtutis in EG ad intensionem virtutis in LM.

Resolutio.



QVoniam igitur est vt arcus LM, ad similem arcum EG, ita reciprocè intensio virtutis in EG ad intensionem virtutis in LM; sed vt diuaricatio radiorum in LM ad similem diuaricationem radiorum in EG, ita reciprocè est intensio virtutis in EG ad intensionem virtutis in LM; ergo, vt est arcus LM ad similem arcum EG, ita diuaricatio radiorum in LM ad similem diuaricationem radiorum in EG. Quòd ita se habet; diuaricatio enim radiorum in arcu maiori attenditur penès interualla radiorum similia ijs, quæ sunt in arcu minori, vt autem est vnum antecedentium ad vnum consequentium, proportionalibus (similia autem illa interualla proportionalia sunt) ita omnia antecedentia ad omnia consequentia, hoc est arcus ad arcum.

a 12. quinti.

Lemma.

QVod autem vt diuaricatio radiorum in LM ad similem diuaricationem radiorum in EG, ita reciprocè sit intensio virtutis in EG ad intensionem virtutis in LM, sic ostendo. *Quoniam enim diuaricatio radiorum in EG, quantum minuitur respectu diuaricationis in LM, tantundem intensio virtutis in EG augetur respectu virtutis in LM, & quantum augetur diuaricatio in LM respectu diuaricationis in EG, tantundem minuitur virtus in LM respectu virtutis in EG; propterea erit vt diuaricatio in LM ad similem diuaricationem in EG, ita reciprocè intensio virtutis in EG ad virtutis intensionem in LM, & contra.*

Compositio.

QVoniam igitur est vt arcus LM ad similem arcum EG, ita diuaricatio radiorum in LM ad similem diuaricationem radiorum in EG sed vt diuaricatio radiorum in LM ad similem diuaricationem radiorum in EG, ita reciprocè est intensio virtutis in EG ad intensionem virtutis in LM; vt ostensum est; ergo vt est arcus LM ad arcum EG. ita reciprocè intensio virtutis in EG ad intensionem virtutis in LM.

SCHOLION.

Notãda quædam.

Natura vtitur radijs diuergentibus, adeò vt segmenta maioris arcus, ne dum similia sint segmentis minoris, atque adeò proportionalia; sed etiam illa, & hac inter se sint æqualia, vnde superior demonstratio procedit; sed hoc non necessarium ad illam; cùm alioquin etiam vim habeat, sine huiusmodi æqualitate.

Quæ autem diximus de similibus arcubus, circumferentijs integris accommodari possunt. Quòd si in superficiebus consideretur virtus, ea erit ratio intensionis, ad intensionem virtutis, quæ est reciprocè partis superficiei sphæricæ ad similem partem alterius superficiei sphæricæ.

COROLLARIVM.

EX hactenus demonstratis colligitur, quòd si virtus spectetur in lineis, ratio virtutis in circumferentia minori ad virtutem in circumferentia maiori, reciprocè est, vt semidiameter

meter maioris, ad ſemidiametrum minoris, hoc eſt diſtantia maior ad diſtantiam minorem. Cùm enim demonſtratum ſit, intenſionem virtutis in arcu EG ad intenſionem in arcu ſimili LM, eſſe vt eſt arcus LM ad ſimilem arcum EG, hoc eſt vt circumferentia integra ad integram circumferentiam, hoc eſt vt ſemidiameter AI ad ſemidiametrum AF, hoc eſt vt diſtantia ad diſtantiam; propterea erit, vt intenſio virtutis in EG ad intenſionem virtutis in LM, ita diſtantia AI ad diſtantiam AF.

In ſuperficiebus autem, quoniam ſuperficies ſphærica ad ſphæricam ſuperficiem eſt a vt circulus maximus ad circulum maximum; circulus autem ad circulum b eſt in duplicata ratione ſemidiametrorum, ergo ſuperficies ſphærica ad ſphæricam ſuperficiem eſt in duplicata ratione ſemidiametrorum. Erat autem intenſio virtutis in ſuperficie ſphærica ad virtutis intenſionem pariter in ſphærica ſuperficie, reciprocè vt ſuperficies ad ſuperficiem, erit etiam reciprocè in duplicata ratione ſemidiametrorum.

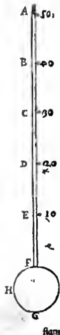
a Archimedes lib. pri. de ſphæra, & Cylindro pro. 30.
b Euclides lib. I.

Hæc porrò demonſtrata rectè videntur ex hypotheſi, quòd radij non ſint, niſi diuergentes, in ordine ad quos hactenus dicta procedunt; propterea ſi cæteri non ſunt negligendi, ſecus philoſophandum: Vnde cùm nos hæc meditaremur ad explorandum naturæ progreſſum, in operando ſaltem in producendo calore, operæ eſſe pretium arbitrati ſumus aliquod inſtrumentum conſtruere, cuius beneficio, ſi non præciſa ratio (hæc enim ab experimentis non eſt expectanda) ſaltem quàm proxima compararetur. Vnde neglecto Thermometro vulgari, velut inepto, aliud excogitauimus, fierique curauimus. Illud autem aduertimus minimè quidem idoneum, quoniam vini ſpiritus incluſus non ita ſcandet gradus, in quos fiſtula diuiſa eſt ſecundum medietatem Arithmeticam pro ratione graduum caloris ambientis ſecundùm eandem medietatem; plus enim caloris requiritur ad aſcenſum graduum fiſtulæ e. g. à trigeſimo quinto, vſque ad quadrageſimum, quàm à trigeſimo, vſque ad trigeſimum quintum; tunc enim aer magis compactus eſt, ac propterea magis reſiſtit condenſatione ſui, ſpiritui aſcendenti, atque vrgenti, caloris energia. Quod autem de aſcenſu à calore, ratione incluſi aeris diximus, illud idem de deſcenſu ſuo modo à frigore ratione ipſiusmet ſpiritus magis reluctantis condenſationem, intelligendum, cùm ſcilicet ad infimas partes peruenerit.

Supra tradita rectè procederent, ex hypotheſi, quòd natura, non niſi radijs diuergentibus vteretur.

Quæ, vt melius intelligantur Sit Thermometrum, vt à latere apparet in ſchemate, cuius fiſtula AF, diuiſa in quinquaginta partes æquales, ſphærula autem FHGI vini ſpiritum incluſum continens, qui vi caloris aſcendat per ſingulos gradus, itaut cùm peruenerit ad E, decem gradus confecerit, ad D, viginti, ad B quadraginta &c. hic enim eſt caloris effectus, cuius eſt rareſacere, ſi itaque aliquo gradu caloris peruenerit ad C, deinde aucto perueniat ad punctum medium inter C, & B, hoc eſt ad trigeſimum quintum gradum, iterum aucto perueniat ad punctum B, ſcilicet ad gradum quadrageſimum; nè putes incrementum caloris, quo vini ſpiritus peruenit à gradu trigeſimo ad trigeſimum quintum, æquale eſſe incremento, quo ſpiritus peruenit à trigeſimo quinto vſque ad quadrageſimum; ſecundâ enim vice ſpiritui aſcendenti plus obſtat aer, vtpote magis conſtipatus, quàm aſcendenti prima vice, ac propterea plus caloris requiritur in ſecundo aſcenſu, quàm in priori, quod autem de primis gradibus dico, illud idem de ſingulis intelligas velim, quodque de calore pronunciaui, ſuo modo etiam de frigore in deſcenſu eiuſdem ſpiritus, eſt vſurpandum. Verumenimuerò Florentiæ cùm hæc meditaremur, intenti prorſus naturæ operibus indagandis, hoc inſtrumentum tanquàm minus idoneum reijciendum dixi S. Principi Leopoldo, cui ſimul etiam addidi, ad naturæ progreſſum inueſtigandum in ijs, quas exerit operationes, alio eſſe opus inſtrumento, quod me iam eſſe meditatum aſſerui. Eius autem ſtructurâ aggreſſus, tùc ibi abſoluere non potui coactus illicò inde diſcedere, velut accerſitus à S. Republica ad Philoſophiam è Prima ſede profitendam in Patauino Lyceo; iterum propterea ad idem rediens, illud fieri Venetiis curaui; eſt autem eâ lege conſtructum, vt longè ſit diuerſa graduum partitio, vnde fit, vt optimè inſeruiat ad indagandos gradus qualitatis, quos agens natura conſtans

Explicatio ſupradictorū.



Termometrū nouiter ab Auctore adinuentum; exquiſite repræſentans.

ſtans in diuerſis partibus propriæ ſphæræ actiuitatis producit. Vt ſi fuerit conſtitutum agens calidum in puncto A, illudque calorem effundat vſque ad extremum E, id, quod conſtruxi inſtrumentum, conſtitutum e.g. in punctis B,C,D,E, monſtrabit, quæ nam ſit ratio caloris in puncto B ad calorem in puncto C, & eius, qui eſt in C, ad illum, qui eſt in D, &c. quo opere non pauca nos adinuenimus, vnde maximè naturæ quidem operantis leges innoteſcunt.

A B C D E

Thermometrũ alterum, exquiſitius differentias oſtẽdens.

Hìc tamen non præteribo hanc eandem inſtrumenti ſtructuram, à me nouiter excogitatam, adhibitam aliquando fuiſſe in eo Thermometro, quod caloris, ac frigoris differentias, non per ſpiritũ vini vndequaque concluſũ, oſtendit, ſed per aquã aſcendentẽ, inuerſo inſtrumento, cuius tubus orificium habet apertum, per quod videlicet aqua, in quam illud immerſum eſt, aſcendit, quatenus aer intra contentus alterationem ſubit caloris, vel frigoris, quam in priori Thermometro vini ſpiritus ſubibat; ita vt in hoc aer eo munere, quo in illo vini ſpiritus, fungatur. Hoc autem conducit in primis ad minimas internoſcendas differentias caloris, & frigoris; propterea quod tenuiſſimum aeris corpus exiguo calore attenuatum, amplitudinem oſtentat, quam vini ſpiritus, non niſi maiori copia eiuſdem qualitatis affectus, præſtare queit; vt enim illud rarioris texturæ eſt, ita magis peruiũ effluuijs. Nihil autem refert, quòd frigus negatiuum, vel poſitiuum quidpiam exiſtimes: vtcunque enim ſe res habeat, idẽ contingat neceſsè eſt; quod enim corpus per intruſionem frigidarũ particularum ſecundùm diuerſam poſitionem, & ordinem, variaſque figuras obtineret, per calidas exeuntes particulas non diſſimili ratione conſequitur. Vtrinque igitur dimenſionum decretio.

Hiſce itaque inſtrumentis adhibitis, quod ob permixtionem diuerſorum radiorum multiplicis ordinis, vt paulò antea dicebamus, demonſtratione non innoteſcit, facile, ſi non præciſè, quod ab experimentis expectandum non eſt, vt ſuperiùs innuimus, ſaltem quàm proximè ſedulitate conſequimur.

Multorum error.

His demonſtratis, de generatione ignis ope reflexionis agendum. Hìc itaq; conſiderandum, haud mediocriter pleroſque deceptos fuiſſe, exiſtimantes ignem eſſe tantummodo, vbi lucere conſpicitur, vel vbi ſaltem comburit; Cùm tamen quaquauerſum diffuſus ſit ſecundùm tenuiſſimos radios, vbi nec lucet, nec ipſa combuſtio contingit, quæ alioquin eius perhibetur character; propterea quod radij non ſunt adeò denſi, vt par eſſet; quò enim denſiores ſunt, eò etiam intenſiùs ſua munera obeunt: vt igitur ignis generetur, curandum eſt radios ipſos, alioquin vel multitudine paucos, vel nimium diuergentes, vel ſi veluti parallelos, vt ſolares, ad conuergentiam tantam redigi, quantam ignis comburens expoſcit; quod cùm paſſim à radijs ſolaribus beneficio ſpeculi concaui contingere videamus, quatenus pertinet ad inſtitutum, cùm in Catoptricis verſemur, experientes Artificium Analyticum, paucis nonnulla complectemur.

Quoniam verò de procreatione ignis per repercuſſum à ſpeculo concauo, nonnulla dicturi ſumus, plurima ſilentio prætereuntes, velut ab inſtituto non parùm aliena, ſolùm id non inconſultò commemorandum duximus, huiuſmodi repercuſſum, de quo loquimur,

Claudij Berigardo ſententia.

apud Claudium Berigardum, incomparabilis eruditionis virum, non eſſe propriè inſtar illius, quem plurimis corporibus contingere paſſim oculis vſurpamus: Corpora ſiquidem, dicebat ipſe, repercuſſionem propriam ſubeuntia, vt globuli eburnei, vitrei, fluuiales calculi, reſilire nos docuit experientia tantummodò compreſſu partis illius, in qua fit contactus; nã hac ſubitò redeunte ad priorem ſtatum, velut ab arcu partes aliæ repercutiuntur: vnde globuli plumbei, aliaque corpora, quæ compreſſa ad priorem figuram non redeunt, reſilire nequeunt. Liquet autem lucidi corporis effluuium, quod diffuſum per medium, nomine luminis donatur, haud particulis conſtare, quæ modo iam explicato comprimi vllo modo queant; quamobrem propriè ea repercuti eſt inficiandum; ſolumque concedendum interiecto corpore, quod nec illud recipere, nec retinere, quodam communicationis, ſeu mixtionis amore valet, ad parem angulum diffundi, quoniã ſcilicet in ea incidit, quæ directum greſſum inhibent. Hæc tamen ipſa diffuſio admodum obſcura eſt; niſi eam reflexionem dicas; ad quam profectò ſolùm id videtur deſiderandum, quòd globuli ipſi, dum in obſtaculum incurrunt, non cedant; quòd autem cedendo poſſint ad priſtinam redire figuram; in quibuſdam corporibus facilior expoſcit reflexio. Hunc itaque in modum dum ſolares

lares radij in expositum speculum incurrunt, resilire poterunt, atque inde ignem procreari, si videlicet ex huiusmodi repercussu ad speculum, velut æquè distantes incurrunt, sic vniantur, vt conuergentes facti sui conditionem, quam obtinent in illo perenni luminis fonte, vnde prodeunt, quam proximè consequantur. Sed hæc fortasse nimis, proximum est, vt aliqua de radijs, deque ipsius luminis effusione nonnulla breuiter hic subijciamus.

Primum autem se se offert speculum concauum sphæricæ sectionis, in cuius gratiam hæc subiciemus.

Qui de his hucusque tractarunt fœdam huic disciplinæ maculam inussisse videntur; modo enim demonstrationes contexentes sumunt radios solares, vt Geometricè parallelos, indeque suas demonstrationes deducunt; modo verò non vt Geometricè parallelos, sed potius, vt à centro Solis, vel eius superficiei puncto exeuntes, tanquam diuergentes supponunt, ex qua suppositione, ad demonstrandum progrediuntur. *Malè hanc mathesim pertem plerique tractarunt.*

THEOREMA.

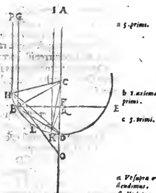
Exemplum XXXXIII.

Si in speculum concauo-sphæricum radius parallelus ei, qui per speculi centrum, extra tamen sextantem eiusdem incideret Dico reflexum eius extra speculum cadere.

Sit speculum HDE, cuius centrum C, per quod transeat radius AD: speculi sextans sit BD, radius verò PH parallelus ipsi AD incidat in H, extra sextantem BD. Dico eius reflexum cadere extra speculum.

Intelligatur HO radius reflexus ipsius PH.

Resolutio.



Quoniam igitur HO cadit extra HD occurrens radio AD protracto ad partes D; ergo angulus CHO, maior erit angulo CHD, sed angulus CHD æqualis est [a] angulo CDH; ergo angulus CHO maior erit angulo CDH. Sed angulus HCO æqualis est angulo CHO; nã angulus HCO æqualis est angulo PHC, ob parallelas, angulus incidentiæ æqualis est ãgulo reflexionis, ac ob id PHC, ipsi CHO, ergo angulus HCO, maior erit ãgulo CDH. Quod ita se habet, est [b] enim angulus HCO, major angulo BCO, angulus autem BCO, seu BCD, æqualis est [c] angulo CDB; ergo angulus HCO, maior erit angulo CDB; ac propterea multò maior angulo CDH. *a 5. primi. b 1. axioma primi. c 5. primi.*

Compositio.

Quoniam angulus HCO maior est angulo CDH, [α] sed angulus HCO, æqualis est angulo CHO; [β] ergo angulus CHO, maior erit angulo CDH; sed angulus CHD, æqualis est, [γ] angulo CDH; ergo angulus CHO, maior erit angulo CHD; ergo HO, cadet extra HD &c. Quod oportebat ostendere. *α Vt supra ostendimus. β Vt supra demonstratũ est. γ 5. primi.*

THEOREMA.

Exemplum XXXXIV.

Si fuerit speculum cauo-sphæricum; per cuius centrum radius aliquis inciderit in illud, huic autem radio parallelus alter incidat in terminum sextantis, cuius initium punctum est, per quod incidit radius per centrum. Dico, radium incidentem in sextantis terminum prædictum, reflecti ad eiusdem terminum alterum.

Repetatur superius schema, in quo speculum BDE, cuius centrum C, radius per centrum AD, sextans BD, diametri quarta pars DF, radius autem GB incidens in sextantis terminum B. Dico hunc reflecti ad punctum D, secundò, & reliquos omnes radios inter GB, & AD parallelos incidentes in sextantem BD, reflecti in segmentum FD.

Reso-

Resolutio.

QVoniam igitur radius GB reflectitur ad punctum D; ergo angulus GBH æqualis erit [a] angulo DBL; at verò angulus CBH æqualis est angulo CBL; ergo reliquus CBG æqualis est [b] reliquo CBD, sed angulus CBG æqualis est [c] angulo BCD; ergo angulus CBD æquabitur [d] angulo BCD; ergo BD æquabitur [e] CD. Quod ita se habet: est enim BD subtendens sextantem circumferentiæ, atque adeò æqualis [f] semidiametro CD.

a ex supra demonstratis. b 3. ax primi. c 29 primi. d 1. ax. pri. e 6 primi. f ex elementis.

Compositio.

QVoniam igitur BD subtendit sextantem circumferentiæ, propterea æquabitur [α] semidiametro CD; ergo angulus CBD æquabitur [β] angulo BCD. Sed angulus CBG æqualis est [γ] angulo BCD; ergo angulus CBG æquabitur [δ] angulo CBD. Sed angulus CBH æqualis est angulo CBL; ergo reliquus angulus GBH æquabitur reliquo angulo DBL; ergo radius GB reflectitur [ε] ad punctum D. Quod oportebat ostendere.

α ex elementis. β 5. primi. γ 29. primi. δ 1. ax. primi. ε ex supra demonstratis.

Exemplum XXXXV.

THEOREMA.

Secundò iisdem positis. *Dicò, reliquorum radiorum, quorum quilibet prædictis duobus est parallelus, nullum per reflexionem ascendere supra punctum F, vbi videlicet CD semidiameter bifariam diuiditur.*

Sit acceptus quicunque radius IK incidens in punctum K, & quia reflectitur versus radium AD, occurret illi: occurrat in Q, agatur KQ, itemque CK.

Quoniam igitur angulus IKL æqualis est angulo QKD, ex supra demonstratis, angulus verò CKL æqualis est angulo CKD; ergo reliquus angulus IKC æquabitur [a] angulo reliquo CKQ. Sed angulus IKC æqualis est [b] angulo KCQ; ergo angulus KCQ æquabitur [c] angulo CKQ; ergo latus CQ æquabitur [d] lateri KQ; ergo CQ non potest esse æqualis CF; nam & QK deberet esse æqualis QD; quare CQ plus QK foret æqualis CD, atque adeò foret æqualis CK, contra vigesimam primam primi.

a 3. ax. pr. b 29. primi. c 1. ax. primi. d 6. primi.

At neque CQ potest esse minor, quàm CF, nam QK deberet esse minor, quàm DF, siquidem CQ, QK sunt æquales; item CF, FD sunt æquales; quamobrem aggregatum ex CQ, QK foret minus ipsâ CD, ac propterea, & ipsâ CK, quod est contra 21. primi.

Aliter breuiùs. Quoniam latera CQ, QK semper debent esse æqualia, propterea punctum Q, nunquam cadet in F; namque latus QK, siquidem æquale ipsi CQ, deberet esse æquale FD, contra octauam tertij.

Insuper non potest cadere supra F; si enim caderet, ipsa CQ non foret æqualis QK, alioquin QK foret minor, quàm QD, contra 8. tertij.

In cauo-sphærico itaque speculo non fit vnio in puncto, vt, superiùs ostensum fuit; in speculis autem, quorum forma sectio conica est, secus euenit; Et ad parabolicum quod attinet id iam demonstratum fuit ab alijs, quatenus ostensum est parallelas axi in parabolam ad punctum reflecti, inter quod, & verticem ipsius paraboles interiecta linea, æqualis est quartæ parti lateris recti, vnde.

In speculo cauo-sphærico non fit vnio in puncto, vt in habentibus conicam sectionem.

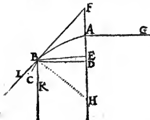
Exemplum XXXXVI.

THEOREMA.

Omnes radij solares in speculum concauum à parabola quacunque circa manentem axem circumducta procreatum, incidentes ea lege, vt axi æquidistent reflectuntur ad vnum, ac idem axeos punctum quod videlicet à vertice speculi distat interuallo quartæ partis lateris recti illius parabolæ, quæ speculum ipsum describit.

Sit

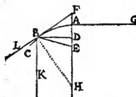
Sit coni cuiuslibet parabola ABC, cuius axis FD: recta verò iuxta, quàm possunt ordinatim applicatæ, seu quod idem est latus rectum, AG, cuius quarta pars sit AE, & à quouis sectionis puncto B, ducta sit BK parallela ipsi FD. Ostendendum est rectam KB reflecti ad punctum E, adeo vt angulus incidentiæ sit æqualis angulo reflexionis.



Et quoniam æqualitas angulorum incidentiæ & reflexionis attenditur penès angulorum æqualitatem, qui fiunt à rectis KB, EB, cum recta tangente parabolen in puncto B, perinde erit ac si ostenderimus rectam KB, ita reflecti in B ad punctum E, vt ducta FL tangente parabolen in B, angulus KBL æqualis sit angulo EBF.

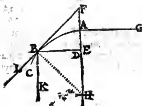
Verùm, vt non vna est hypothesis, ita nec etiam vna erit resolutio. *Pront multiplex hypothesis, ita multiplex resolutio.*

Vel primò supponi potest quod angulus FBE æqualis angulo LBK, vt quæsitũ sit, segmentũ AE æquale esse quartæ parti lateris recti AG, vt verum, quod resoluendo offendimus sit, quòd AE sit quarta pars lateris recti AG; inde enim regrediendo syntheticè in illud incurremus, vnde discessimus, quòd angulus FBE æqualis sit angulo LBK.



Vel supponi potest, quòd AE sit quarta pars lateris recti AG, vt in illud incurramus, quòd angulus FBE sit æqualis angulo LBK.

Et resolutio etiam variari potest, prò variatione præparationis, quod in omni Theoremate resoluendo est obseruandum, qua in re magnopere curandum est, vt quàm simplicissima sit præparatio; quò enim simplicior ipsa extiterit, eò etiam commendabilior est resolutio: Vnde aliqui irridendi sunt, qui theorema iã ab aliis resolutũ, cùm ipsi quoque resoluerint, vt aliquam laudem consequerẽtur, se faciliùs id ostendisse iactant, non aduertentes implicatiori vsos fuisse præparatione; vnde fieri non poterit, vt simplicior, vel facilior sit resolutio, cæteris tamen paribus &c. *Resolutio variari potest, pro varietate præparationis.*



Si prior statuatur hypothesis sic resolutio se habebit.

Intelligatur ducta BD ordinatim ad diametrum applicata.

Resolutio.

QVoniam igitur angulus LBK æqualis est angulo FBE, sed angulus LBK æqualis est angulo BFE ergo angulus FBE æqualis est angulo BFE; ergo latus BE [a] æquabitur lateri FE; quare quadratum BE æquabitur quadrato FE, sed quadratum BE æquale est [b] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; ergo quadratum FE æquabitur [c] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; sed quadratũ FE æquale est [d] quadruplo rectangulo DAE, vnà cum quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur [e] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; ablato communi quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [f] quadrato BD. Sed quadratum BD æquale est [g] rectangulo GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [h] rectangulo GAD; ergo rectangulum DAE erit quarta pars rectanguli GAD. Est autem communis altitudo AD; ergo AE erit [i] quarta pars ipsius AG. Quod ita se habet &c. per conuersum primæ sexti.

a 6 primi. b 47 primi. c prim. ax. primi. d 8 secundi. e 1 ax. primi. f 3 ax. primi. g 11 primi Apollonij. h 1 ax pri. i conu. 1 sexti.

Compo-

Compositio.

α 1. sexti. β 13. quinti. γ 11. primi Apollonij. δ 1. ax primi. ε 1. ax primi. ζ 8 secundi. η 1. ax. primi. θ 47. primi. ι 1. ax. primi. κ 6. primi. λ 29. primi. μ 1. ax primi.

QVoniam igitur AE est quarta pars ipsius AG; ergo ob communem altitudinem AD rectangulum DAE erit [α] quarta pars rectanguli GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [β] rectangulo GAD, sed quadratum BD æquale est [γ] rectangulo GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [δ] quadrato BD; communi addito quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur [ε] quadrato BD, vnà cum quadrato ED sed quadratum FE æquale est [ζ] quadruplo rectangulo DAE, vnà cum quadrato ED; ergo quadratum FE æquabitur [η] quadrato BD, vnà cum quadrato ED, sed quadratum BE æquale est [θ] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; quare quadratum BE æquabitur [ι] quadrato FE; ergo latus BE æquabitur lateri FE; quare angulus FBE æquabitur [κ] angulo BFE, sed angulus LBK æqualis est [λ] angulo BFE; ergo angulus LBK æquabitur [μ] angulo FBE. Quod oportebat ostendere.

Nunc videamus quid intersit secundùm aliam hypothesin. Supponamus igitur AE quartam esse partem recti lateris AG.

Resolutio.

a prim sexti. b c 11 primi Apollonij. d 1. ax primi. e 1. ax primi. f 47. primi. g 1 ax primi. h 8. secundi. i 1. ax primi. k 6 primi. l 1. ax. primi.

QVoniam igitur AE quarta pars est lateris recti AG; ergo rectangulum DAE quarta pars erit [a] rectanguli GAD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [b] rectangulo GAD: sed rectangulum GAD æquale est [c] quadrato BD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [d] quadrato BD; communi addito quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cùm quadrato ED æquale erit [e] quadrato BD, vnà cum quadrato ED: sed quadratum BD, vnà cum quadrato ED æquale est [f] quadrato BE; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur [g] quadrato BE. Sed quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquale est [h] quadrato EF; ergo quadratum BE æquabitur quadrato EF; ergo BE æquabitur [i] EF; ergo angulus EBF æquabitur [k] angulo EFB, sed angulus EBF æqualis est angulo LBK, (angulus enim incidentiæ, & reflexionis sunt inter se æquales) ergo angulus LBk [l] æquabitur angulo LFE. Quod ita se habet sunt enim Bk, FE, ex hypothesi inter se parallelæ.

Compositio.

α 29. primi. β 1. ax primi. γ 6 primi. δ 8. secundi. ε 1. ax primi. ζ 47 primi. η 1. ax primi. θ 3. ax primi. ι 11. primi Apollonij. κ 1. ax primi. λ 10. axioma primo sexti.

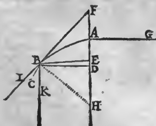
QVoniam igitur Bk, FE sunt inter se parallelæ; ergo angulus LBk æquabitur [α] angulo LFE: sed angulus EBF æqualis est angulo LBK (angulus enim incidentiæ, & reflexionis sunt inter se æquales) ergo angulus EBF æquabitur [β] angulo EFB; ergo BE æquabitur [γ] EF; ergo quadratum BE æquabitur quadrato EF, sed quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquale est [δ] quadrato EF; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED æquabitur [ε] quadrato BE, sed quadratum BD, vnà cum quadrato ED æquale est [ζ] quadrato BE; ergo quadruplum rectangulum DAE, vnà cum quadrato ED, æquabitur [η] quadrato BD, vnà cum quadrato ED; communi subtracto quadrato ED; ergo quadruplum rectangulum DAE, æquabitur [θ] quadrato BD. Sed rectangulum GAD æquale est [ι] quadrato BD; ergo quadruplum rectangulum DAE æquabitur [κ] rectangulo GAD; ergo rectangulum DAE quarta pars erit rectanguli GAD; ergo AE quarta pars erit [λ] lateris recti AG. Quod oportebat ostendere.

Vides igitur, qua ratione ex diuersa veri suppositione, diuersum quoque verum Analysta suo gressu ostendat: vnde syntheticè redeundo, deuenit in quæsiti deprehensionem, ac veri quidem intenti, consecutionem.

Sed non pigebit adnotare diuersam quoque contingere analysin ex præparatione diuersa.

Resolutio.

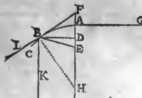
QVoniam igitur AE quarta pars est lateris AG, sed AE dimidium est ipsius DH, vt mox constabit; ergo DH erit dimidium ipsius AC, sed AF est [a] dimidium ipsius FD; ergo vt AG ad DH, ita FD ad AF; quare permutando [b] vt AG ad FD, ita erit DH ad AF, seu AD; quare rectangulum GAD, æquabitur [c] rectangulo FDH. Quod ita se habet; vtrunque enim est [d] æquale quadrato BD.



a 35. primi Apollonij.
b 16. quinti.
c 16. sexti.
d coroll. 8. sexti, & 11. primi Apollonij.

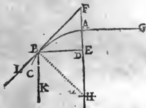
Lemma.

Quod autem AE sit dimidium ipsius DH, sic ostendo. *Quoniam angulus LBK æqualis est angulo FBE, sed angulus LBk æqualis est [a] angulo BFE; ergo angulus FBE æquabitur [b] angulo BFE; ergo latus BE æquabitur [c] lateri FE, at verò si ab æqualibus angulis LBH, FBH auferantur æquales LBk, & FBE remanebit [d] angulus EBH æqualis angulo KBH, sed angulus KBH æqualis est angulo BHE; ergo angulus BHE æquabitur angulo EBH; ergo EH æquabitur BE, seu EF; ergo FH est dupla ipsius EF, vt DF est dupla ipsius AF; ergo differentia totarum est DH, & dimidiarum est AE; ergo AE est dimidia ipsius DH.*



a 29. primi.
b prim. ax. primi.
c 6 primi.
d 3 ax. primi.

Compositio.



QVoniam rectangulum GAD æquale est [α] quadrato BD, rectangulum verò FDH æquale est [β] eidem quadrato BD; ergo rectangulum GAD æquabitur [γ] rectangulo FDH; ergo vt AG ad FD, ita erit [δ] DH ad AD; seu AF; ergo permutando, [ε] vt AG ad DH, ita FD ad AF, sed AF est [ζ] dimidium ipsius FD; ergo DH erit dimidium ipsius AG, sed AE dimidium est ipsius DH, vt ostensum est; ergo AE quarta pars erit lateris recti AG.

α 11. primi Apollonij.
β
γ 1. ax. primi.
δ 16. sexti.
ε 16. quinti.
ζ 35 primi Apollonij.

Vides igitur qua arte ex vero illo eodem supposito, quòd AE sit quarta pars recti lateris AG, peruentum sit resoluendo ad aliud verum, quo tendebat superior habita resolutio, vnde regrediendo syntheticè, ad quæsiti comprehensionem peruenitur.

SCHOLION.

Non inconsulto dictum à nobis fuit à quacunque parabola &c. nam credebatur olim inter specula vstoria, ad faciliùs, & celeriùs flammam excitandam, illud principem tenere locum, quod sic excauatum est, vt in eius superficie radij Solares incidentes, ad vnum certum communeque punctum reflectantur, illudque in vsu fuisse Veteribus legimus apud Plutarchum in Numa referentem, in Græcia ignem perennem quendam à Mulieribus quibusdam per ætatem ad Coniugium ineptis custodiri solitū si casu aliquo eius extinctio contigisset; nec licuisse ex aliquo alio igne renouari, sed potius flammam puram atque sinceram ex Solis radijs excitandam fuisse, & ad id quodam instrumento fuisse vsas scapha appellato in modū turbinis recti anguli excauato, quo, si aduerso Soli constitueretur, sic Solares radij in circumferentiam vndique incidentes omnes ad centrum concurrerent, collecti, vt inde quam citissimè quacunque materia combustibilis, inflammaretur: vnde ad

Supradictorū explicatio.

 parabola

parabola formā coni recti rectāguli sectione exeauata cōmemorata specula radios colligērĕ videbātur. At verò docta Posteritas in hac incumbens, id non solū speculo in formā parabola recti, atque rectanguli coni sectione excauato, sed insuper bis, quæ à parabola cuiuscunque coni, scilicet acuti anguli, obtusi anguli, & scaleni, descripta fuerint accidere deprehendit: animaduertens, cuiuscunque coni parabolam, eandem esse, quæ rectanguli coni.

Speculum hyperbolicum quale. Ad speculum Hyperbolicum quod attinet, vt id demonstretur, quòd scilicet de Parabola ostensum fuit, non est opus Analysi, cùm illicò constet ex ijs, quæ demonstrauit Apollonius lib. 3. Prop. 48., videlicet lineas cadentes intra hyperbolen conuergentes ad exteriùs punctum, quod dicitur ex comparatione factum reflecti ad punctum intrinsecum, itidem ex comparatione factum, atque adeò radios solares incidentes in speculum hyperbolicum conuergentes ad extrinsecum punctum iam dictum, quod focus extrinsecus nuncupatur, reflecti ad intrinsecum focum, necesse est.

Quomodo radij reflectantur in speculo elliptico. Hoc idem etiam intelligendum de speculo Ellyptico; ex eadem enim propositione 48. supracitata, ex vno foco ipsius ellipseos radios incidentes in concauum ipsius speculi ellyptici, in alium focum reflecti perspicuum est.

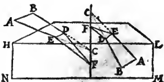
Quid intersit inter specula supradicta. Ex hactenus verò dictis satis exploratum cuique esse poterit, quid intersit inter supradicta specula; nam Cauosphæricum radios parallellos, vel quasi parallelos imperfectè conuergit, cùm non conuergat ad punctum; Parabolicum conuergit parallelos, vel quasi parallelos ad punctum; Hyperbolicum conuergentes vltrà, conuergit citra, seù conuergentes exteriùs poneipsum conuergit interiùs; Ellipticum diuergentes conuergit, vnde aptissimum est, sed tamen, quoniam exposcit radiorum fontem in determinato puncto, quod est vnum ex focis;propterea tanquam minùs idoneum relinquitur.

Ex Dioptricis quoque aliquid se offert considerandum, & primùm illud.

THEOREMA.

Exemplum XXXXVII. *Si oculus, & aspectabile sint in diuersis medijs se mutuo contingentibus, imago apparebit in concursu catheti, & radij ab oculo per punctum refractionis directè producti.*

Id autem demonstrabitur non dissimiliter ac ostensum fuit simile theorema in Catoptricis. Catheti autem nomine perpendicularis intelligitur ab aspectabili in communem superficiem vtriusque medij ducta.



Esto medium densius HL MN, sitque aspectabile F. Supponamus autem pupillæ diametrum esse AB: intelligatur radius opticus FEA vnus, alter FDB qui refracti sint in pūctis E D: per puncta autem F,E,A, intelligatur transire planum vnum, per puncta verò F,D,B planum alterum. Vtrunque planum demonstrabitur erectum ad superficiem communem vtriusque medij ductam, & huiusmodi plana se mutuò interfecabunt eorundemque communis interfectio crit recta FC, quæ demonstrabitur perpendicularis ad superficiem prædictam, demonstrabitur etiam rectam AE protractam occurrere ipsi CF, & rectam quoque BD eidem pariter productam occurrere, & vtriusq; occursus punctum esse commune C.

Multa sunt consideratu digna in hac matheseos parte. Multa in hac Matheseos parte sunt consideratu digna, quæque indigent maiori quàm hactenus perscrutatione, dū eorū quæ experimentis constant patet aditus Analystæ ad hoc, vt sua industria resolutione facta, principia inquirat, atque causas venetur, qua in re aliquando conabimur nostros labores impendere.

Radij luminosi non gracilescunt nec attenuantur quo magis protrahuntur. Ex Doctrina Dioptrica constat quod superiùs innuimus, videlicet radios parallelos ita diffundi, vt æquè proximè, & remotè luminosum illuminet, ac calefaciat, nec radios ipsos gracilescere quo magis protrahuntur, & penes hoc non esse explicandam intensionem, & remissionem; constat inquam ex Doctrina Dioptrica. Si enim sumatur lumen, & in debita distantia à tergo constituatur speculum concauum, ante verò idem lumen, chry-

stallum lenticulare, radij luminosi diuergentes, versus lentem, tam luminis, quàm à speculo conuexo reflexi, refractione facta paralleli fiunt: vnde haud mediocriter protrahuntur quare lumen media ipsa lente conuexa per noctem, licet longè admodum, ciaculari. Quod si inter lumen, & lentem depictæ quædam imagines in lamina trasparente fuerint constitutæ, laterna fit, quæ dicitur Magica, vnde imagines illæ vnà cum lumine vectæ in longa distantia visuntur: dummodo tamen alia quoque lens adhibita fuerit è regione prioris, ita vt vtraque aptata sit ad extremum tubi longitudinis ferè dimidij brachij. Aliud itidem occurrit consideratu dignissimum in Dioptrica, quòd scilicet imago rei aspectabilis in visus organo inuersè depicta sit, quamuis res ipsa minimè inuersa cernatur. Id autem vt in principia resolueretur, primùm oporteret exploratum habere locum in quo perficiatur visio, an in Retina, an in humore crystallino, an alibi. Multum enim refert id ad analysin instituendam nouisse, quinimmò etiam qua ratione visio perficiatur, num per imagines receptas eorum, quæ cernuntur ad qualitatis genus pertinentes, an per effluuium luminis repercussi à re aspectabili, subeuntis organum visus, de quibus hic disputationem instituere nimis alienum foret ab instituto, cùm solùm id innuisse nobis operæ pretium visum sit, vt cuique liceat intelligere, hoc idem quoque ad resolutricem artem spectare posse.

Laterna Magica qua arte fiat.

Aliud est quod in Dioptrica consideratu dignissimum.

Id tamen silentio non prætereo, nimirum de inuersione imaginis in oculo receptæ, nemini dubitandum, cùm experimento non semel id compertum fuerit, demonstrandum tamen non suscipiam, id necessariò euenturum, ne videar tantum mihi arrogasse, vt existimem exquisitè assecutum me fuisse refractionum mensuram, radiorum scilicet, quibus in hoc vtitur Natura opere, ita vt adamussim ij conuergant vbi fit visio, nec antea decussationem subire possint. Satis igitur sit rem, sic se habere experimento comprobatum fuisse: cur verò res aspectabilis haud inuersa appareat, inquirendum superesset, de quo nos cumulatè opportuniori loco, sermonem habebimus. Interim, vt aliquid insinuasse videamur, tantùm id addere lubet, quòd ad hoc non quicunque radius, sed qui visorius est, tantummodo conducit. Visorius autem ille in quo visio consistit, quique peruadit organi partem vbi visio ipsa perficitur; exiguus profectò existit: reliqui autem deferentes dicuntur, qui quamuis imaginem illam inuersam depingant, non ob id rem adspicimus inuersam: non enim visus imaginam, sed rem, cuius est imago, cernit, ad quem si respiciat exiguus ille visorius radius, quatenus nouam refractionem subiens eà in parte vbi visio celebratur, opportuno directionis modo, ita vt qui superior est radius, perinde sit ac inferior, & qui inferior, non secus ac superior rei aspectabilis partibus respondens existat, hanc non inuersam, sed ad eum quo est modum repræsentabit.

Sic etiam ex Musicis desumi possent exempla, Nunc aliquid ad Mechanicen pertinens attingemus.

Multi non obscuri nominis Mathematici, sequens Theorema demonstrandum sumpserunt;nos autem ratione longè diuersa illud idem præstitimus ad eum, qui sequitur modum.

Theorema mechanicum.

THEOREMA.

Grauia appensa extremitatibus Libræ si æquiponderantia extiterint; erit vt distantia ad distantiam à centro, ita reciprocè graue ad graue.

Et si fuerit vt distantia ad distantiam, ita reciprocè graue ad graue, ipsa grauia erunt æquiponderantia.

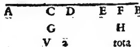
Exemplum XXXXVIII.

Sit libra CF, cuius centrum D, & extremitatibus C, F, appensa sint grauia G, H, æquiponderantia. Dico esse vt distantia DF ad distantiam CD, ita reciprocè graue G, ad graue H.

Acceptum sit punctum E, ita vt CE sit æqualis DF, & protracta sit DF in B, vt FB sit æqualis EF; sitque protracta DC, in A, vt AC, sit æqualis CE, Intelligatur autem grauitas æquè diffusa per AB.

Resolutio.

Q Voniam igitur est vt distantia DF, ad distantiam CD, ita reciprocè graue G, ad graue H; sed grauitas diffusa per AE tota collecta est in bissectionis puncto C, eaque est G: & grauitas diffusa per EB



tota collecta est in bissectionis puncto F, eaque est H; ergo vt DF ad CD, ita grauitas diffusa per AE ad grauitatem diffusam per EB; sed vt AE ad EB, ita grauitas diffusa per AE ad grauitatem diffusam per EB; ergo erit vt DF ad CD, ita AE ad EB. Sed AE est dupla ipsius CE, & EB est dupla ipsius EF; ergo vt CE ad EF, ita DF ad CD; ergo CE est æqualis DF. Quod ita se habet ex constructione.

Compositio.

QVoniam CE est æqualis DF; ergo vt CE ad EF, ita DF ad CD. Sed AE est dupla ipsius CE, & EB dupla ipsius EF; ergo erit, vt DF ad CD, ita AE ad EB; Sed vt AE ad EB, ita grauitas diffusa per AE ad grauitatem diffusam per EB; ergo vt DF, ad CD, ita grauitas diffusa per AE ad grauitatem diffusam per EB; sed grauitas diffusa per AE tota collecta est in bissectionis puncto C, eaque est G, & grauitas diffusa per EB tota collecta est in bissectionis puncto F, eaque est H; ergo erit vt distantia DF, ad distantiam CD, ita reciprocè graue G ad graue H. Quod erat operæ pretium ostendere.

Nec dissimiliter conuersum resolui, componique paterit.

Nec alia ratione ex alijs Mathesos partibus exempla depromi possent. Nunc quæ Physico-mathematica sunt breuiter aliqua ex parte prosequemur.

DE METHODO RESOLVTIVA

Pro Theorematibus alijs Physico-Geometricis.

CAPVT QVINTVM.

Platonis dogma

OMne tulisse punctum, qui miscuit Mathesin, præsertim Geometriam Physicę, adeo certum olim, ac exploratum erat Platoni, vt Ageometræ negaret ingressum in Academiam suam: vnde scripserat in Foro Οὐδὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Quod ita quidem interpretor; Sic naturá constantia Diuinæ manus industriá fabrefacta fuerunt, vt vbique calculum adhibuisse, & Geometricis rationibus fuisse vsũ supremũ rerum Conditorem, iure dixeris; Non enim licet ipsius Naturæ penetralia secretiora peruadere, ac intimiores recessus perquirere Mathematicarum Disciplinarum ignaro; Quamobrem inconsideratè admodum, Oceano contemplationum se se committere videtur, quicunque fauorabilem auram Geometriæ, negligit. Nos vniuersam contexímus Physicam, ex qua si quid laudis fuerimus consecuti, non nisi Mathematica quidẽ eruditione, quam illi passim necessitate coacti, causa veritatis assequendæ, miscuimus; Ijs tamen disputationibus baud neglectis, vnde veritas in perscrutandis Naturæ solertis operibus, emanare possit; præsertim id præ oculis habentes, vt ijsdem inspectis, secundùm rationem mensuræ ac mensurabilis, innumera Theoremata, conderemus; quibus demum edocta Posteritas, ad veritatem indagandam aduertat, in rerum naturalium perquisitione, sibi Mathematicas disciplinas excolere, magis posse esse præsidio, quàm verbosas, inanesque disputationes nutrire, & in ijs se se exercere; ac inde, velut ex palestra laudem vmbratilem, futilemque gloriam, ingenij quadam ostentatione potius, quàm solidam virtutem, splendidamque famam, se consecuturam intelligat. Hac autem in re locum præcipuè habet Ars, quam præ manibus habemus; propterea quod Alystæ illud est munus, propositum Theorema in principia resoluere, vt causam videlicet assequatur, cum alioquin ita esse constet, quod in Physicis passim contingit, experimento siquidem id ita esse liquet, causa verò latet.

Placuit igitur hîc eorum, veluti specimen quoddam exhibere, de quibus ferax Tractatio, Deo fauente, tandem aliquando prodibit in lucem; ostendendo videlicet, qua via nos etiam in Physico-Mathematicis haud sine magno veritatis lucro præceptis Analyticis, insistere

sistere debeamus; Quædam propterea opportuna exempla, paucis perstringemus, in studiosorum gratiam, præsertim Helenæ Corneliæ Piscopiæ Inclytæ Virginis, quæ quidem inter Mineruæ sequaces, tantùm extulit caput.

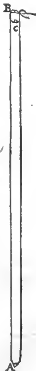
Quantùm lenta solent inter viburna cupressi.

De hac siquidem philosophandi ratione plures, ac plures allocutus, neminem adinueni, cui magis commemoratum Platonis dogma, perspectum, exploratumque foret. O magnum huius Æui portentum; Cùm & claritate Regiæ prosapiæ, & eximia pulcritudine formæ, & honestate morum, & solidioris eruditionis copia, ne dum in humanioribus literis, omnique politiori literatura, verùm etiam in sublimioribus Disciplinis, adeò spectabilis sit, vt nulla futura sit ætas, quæ tam excelsi nominis maiestatem, summa veneratione, Diuinisque laudibus, non prosequatur. Et si me vnquam cœpit admiratio, tunc me herclè, cùm splendidissimam eius Domum, locupletissimam Bibliothecam, adij, & per humanitatem Genitoris, munificentissimi Mæcenatis in Eruditos, Ioannis Baptistæ Diui Marci Procuratoris Amplissimi ad colloquia cum illa, non semel admissus fui; nulli siquidem tantam facundiam, nulli tantam dicendi copiam, nulli eruditionem tantam inesse, vnquam aduerti, vt non immeritò Mineruam alteram existimandam crediderim. Tanti refert sublimem animum summis vigilijs, improbisque laboribus, imitatione, Cleantis, excultum fuisse, præsertim sub disciplina Celeberrimi Viri Aloysij Gradenici Archipresbyteri, ac Primatis Præstantissimæ Cydoniæ Vrbis è Creta, cuius merita, præclaras dotes, silentio potius, quàm tenui, frigidaque oratione, venerari operæ esse pretium sum arbitratus. *Helenæ Corneliæ laudes.*

Redeamus in orbem sermonis. Si quid est quod ingenia Philosophorum exercuerit, mihi planè difficultas illa de ascensu corporum videtur, quæ quidem leuia dici alioquin, consueuere. Plerisque enim visum est, motricem quandam corpori ascendenti vim inesse, specie distinctam ab alia, quæ grauitas nuncupatur: ab hac enim vt corpus descensum, ita ab illa quidem ascensum, recognoscat; Rem autem magis introspicere conantes difficultatibus implicatioribus inuoluti, in varia placita distracti sunt: Vnde quidam vtramque motricem virtutem ad qualitatis genus reuocandam duxerunt, alij re non differre ab ipsius corporis substantia, crediderunt; Quibus prætermissis, non nulli tutiorem viam calcantes, in his quendam inuolui respectum existimarunt, adeò vt, quod minus est graue comparatione grauioris, leue dicatur, & contra; atque adeò sursum ascendere corpus non vi quadam actiua, cui videlicet ascensus debeat acceptus referri, sed potius extrusione, quatenus minus graue à grauiori extruditur. Nec propterea contra Naturæ indolem; quod enim aliquid ab vno potius, quam ab alio extrudatur, fit, eius exigente natura. Vt autem in his, quorum nos detinet meditatio, verum aliquid assequi possemus ad experimenta confugimus, rati hinc ad demonstrationes contexendas gressum fieri posse. Sumpsi propterea vitream fistulam longitudinis quatuor brachiorum, cuius extremum vnum vitro continuo clausum erat, vt in schemate cernitur, in quo tubus vitreus AB, cuius extremum A, clausum erat, alterum verò B apertum, huius porrò tubi amplitudo pollicem æquabat, mox in ipsum injeci vini spiritum, donec esset repletus, sumpsique sphærulam exiguam C compactam ex subere, & cera, vt minoris foret grauitatis in specie, quàm spiritus ipse, atque adeò in eum innataret; clausoque orificio superiori, adhibito fragmento vesicæ suinæ, cùm præsto esset Pèdulum, inuerso tubo, statim vibrationes numerare cœpi, cum primùm scilicet sphærula ipsa ascendere inciperet: prosequendo autem donec illa peruenisset ad fastigium, reperi ducentas vibrationes insumptas fuisse. At verò recluso orificio, vinique spiritu foras eiecto, ac in eius locum substituta aqua communi, reassumptam sphærulam in aquam ipsam inieci, in qua magis extabat, clausoque iterum orificio tubi, cæterisque peractis, vt priùs, sphærulæ ascensum tempore centum vibrationum tantummodo, absolutum fuisse deprehendi, quod mihi argumento fuit ascensum hunc per extrusionem contigisse; propterea

Difficultas de ascensu corporum.

Grauitatis, et leuitatis explicatio.

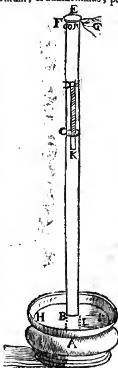


pterea quod partes aquæ circumstantes magis vrgent, ac premunt, quàm partes spiritus vini, cùm illæ his longè grauiores sint.

Cæterùm tunc extrusio desinit in fluidorum partibus, & in ijs, quæ sunt fluidis leuiora solidis, cùm omnia in æquilibrio fuerint constituta; ita solidæ magnitudines humido leuiores, si in humidum ipsum fuerint immissæ, ac impulsæ, donec totæ demergantur, sursum feruntur, ita vt pars aliqua extet, alia verò sit immersa, nec à motu cessant, nisi factum sit æquilibrium.

Hoc idem in aere contingit, vnde quando hydrargyrum intra tubum ad stationem vnius bracchij cum quarta parte sustinetur, non aliunde putandum id nisi ab aeris præmente grauitate, vel ab aliquo alio, puta à vi Elastica, prouenire; quatenus videlicet si id fiat sub diu, & in aperto aere, tanta est grauitas hydrargyri altitudinis vnius bracchij cum quarta parte, hoc est, tantum est momentum altitudinis ipsius, vt æquiualeat momento altitudinis atmosphæræ, cui alioquin æquipolleret momentum cylindri aerei altitudinis eiusdem atmosphæræ. Quod si id fiat in loco concluso, videlicet in ipso tubo immerso in restagnans hydrargyrum vase contentum, quod vndique clausum sit facta immersione, ita vt intus tantillum aeris relictum sit, adhuc eadem hydrargyri eleuatio continget, quoniam hic adeò compactus est, & constipatus, siquidem ille est, in quo versamur, & quem inspiramus, quantum totius atmosphæræ aer adgrauans, exigit, ita vt quemadmodum resistit pressioni illius, ita & æquiualenti cylindro hydrargyri.

Experimenta. In huius rei, de qua agimus confirmationem plurima quidem, & ab alijs, & a nobis experimenta facta fuerunt, vnde ascendimus montes, gestantes ipsum tubum, in quo hydrargyrum sustinebatur, ad altitudinem prædictam, cùm inferiùs eius orificium esset immersum, vt fieri solet, in hydrargyrum restagnans vase contentum, & adinuenimus, per tubum, ipsum hydrargyrum descendere, quò magis per montem ascenderemus: quod videlicet, cùm vas ipsum esset apertum, atque adeò hydrargyro ibi contento, aer incumberet, quò altiores nos constituti essemus, eò erat minus momentum aeris adgrauantis, & quia cylindri ex aere sunt breuiores, & quia sunt ex aere leuiori: Vnde maximè constat æquilibrium prædictum. Imò curauimus aliquando datà opera, vt non nihil aeris remaneret in tubo, qui si foret tantæ molis, vt extensus quantum fieri potest, non exigeret locum ampliorem, hydrargyrum in eadem statione se continebat. Quod si plus aeris relictum fuisset, pro sui debita extensione maiorem locum postulans, minor erat in tubo, ipsius hydrargyri eleuatio: Illud quoque notauimus, differentiam inter aerem in montis fastigio adhibitum, & ad radices ipsius, & alia multa, de quibus in Physicis agendum.



Solum hìc lubet subijcere experimentum à nobis excogitatum, quòd humidi pressionem in sibi subiecta, magnopere confirmat.

Experimentũ. Sumpsi tubum vitreum, qualis est BE, ex vtroque extremo apertum; extremorum vnum clausi, vt fieri solet vesica suina (erat vero tubi longitudo duorum bracchiorum) eum hydrargyro repleui, mox sumpsi cylindrum stanneum longitudinis quartæ partis vnius bracchij, vt crassitie æquaret amplitudinem calami scriptorij: hoc enim pacto laxè intrabat in tubum, qui erat amplitudinis pollicaris. Sumpsi etiam alterum cylindrum stanneum eiusdem omninò longitudinis, & crassitiei, atque adeo ponderis, immersi in hydrargyrum atq; notaui partis extantis quantitatem (extabat autem, quia stannum in hydrargyro innatat) eamq; partem vestiui zonula ex vesica suina confecta, cylindrus hunc in modum ex parte vestitus, repræsentatur

per

per DCk, ita vt filo validè circumuoluto, zonula illa cylindri parte DC prædictam tegeret, ac propterea quamuis immersus in hydrargyrum, huic nullatenus aditum præbere posset; Alterum verò nullo tegmine indutum in hydrargyrum immisi, vt ad perpendiculum tamen foret erectus; extabat autem, quoniam hydrargyrum est stanno grauius in specie, atque vas illud in quo, & hydrargyrum, & huiusmodi cylindrus aeri libero exposui per spatium viginti quatuor horarum. Cylindrum autem alterum immersi in hydrargyrum tubi BE, per orificium E, quod postmodum clausi membranulâ tenaciter adstrictâ circumuolutione funiculi FG; Tubum paratum hoc modo immersi in hydrargyrum HI restagnans in vase A: mox verò immissa manu in restagnans hydrargyrum HI, acu membranulam perforaui qua extremum alterum tubi, videlicet, quod subtus hydrargyrum restagnans existebat, clausum erat. Statim descendere cœpit hydrargyrum conclusum in tubo, & cum eò etiam cylindrus stanneus CD, donec ipsius hydrargyri statio facta sit in C ad altitudinē BC, vnius bracchij cum quarta parte ferè, ita vt locus CF intra tubum foret omni aere destitutus. Ad spatium 24. horarum, cùm extraxissem cylindrum CD, qui secundùm aliquam sui partem mersus erat in ipsum hydrargyrum, vtpotè minùs grauis in specie, partem immersam adinueni omninò friabilem: partem autem extantem CD spoliatam indusio reperi omninò intactam ab hydrargyro. Obseruaui cylindrum alterum immersum in hydrargyrum sub aere libero, & adinueni eum prorsus friabilem, nedum secundum immersam, sed etiam secundùm extantem partem, etsi aliquantulum minus.

Hinc mihi satis euidenter colligi posse videbatur dari pressionem illam fluidi in sibi subiecta, & insuper reijciendam esse Veterum opinionem de attractione, quam stannum, atque adeò aurum, nam eadem est ratio, erga hydrargyrum exercet; siquidem apertè constat hydrargyrum per cylindrum illum, non ascendere vi quadam attractum, sed potiùs compressum, atque extrusum ab aere premente, quod cuique perspectum esse potest. *Pressio fluidorum colligitur.*

Neque propterea hoc minùs existimandum plausibile, quod supponat aliquid controuersum, scilicet elementa in propria sede adgrauare, nam sensu, quo id accipiendum voluit Archimedes, nulla laborat difficultate; ait enim. Ἕκαστον δὲ αὐτῦ μέρος, θλίβεται ὑπὸ τῦ ὑγροῦ ὄντος ὑπὲρ αὐτῦ, κατὰ κάθετον, ἐὰν αὐτὸ τὸ ὑγρὸν ᾖ καταβαῖνον ἔν τινι ἢ ὑπὸ τινὸς τεθλιμμένον. Hoc est. *Vnaquæque autem pars eius premitur humido supra ipsa existente ad perpendiculum, si humidum sit descendens in aliquo, aut ab aliquo alio pressum.* *Archimedis locus explicatur.*

Ex hactenus dictis addisces non tam facilè subscribendum sententiæ, etsi per multa sæcula receptæ, propterea quòd veritas tandem tractu temporis, cuius est filia, se se dat in conspectum; quamobrem post hac haud licebit in attractionis confirmationem id in exemplum vsurpare, quod videlicet virga aurea, cùm primùm hydrargyrum tetigerit, illud ad se alliciat, ac trahat. Hinc etiam explosum manebit hoc sympathiæ genus: hinc etiam reiecta occulta qualitas, ad quam omnem nodum difficultatum soluere profitentes, confugiunt. Non enim ea est Naturæ indoles, cuius profectò longè, lateque diuersa est operandi ratio.

Neque conturbet animum, quod illud idem supra commemoratum non eueniat ex aliqua alia materia, putà ligno adhibito cylindro; huius enim fortasse, cùm ea non sit structura, qualem exposcunt exiguæ fluidi particulæ, lignei cylindri corpus, peruadere nequeunt: vnde adhæsione ad cylindrum, grauitatis momentum fluidum non deperdens, ab imminenti, & adgrauanti super hydrargyrum in vase contentum aere, eleuari non patitur. In eodem enim instanti dicere licet, nunc vltimò non est descensus aeris, sed immediatè post erit; nunc vltimò non est ascensus hydrargyri, sed immediatè post erit; tam enim illius descensui, quam huius ascensui, extrinsecus conuenit incipiendi modus. Cùm hoc tamen illa naturæ prioritas descensus cohæret, à quo scilicet alteriùs pendet ascensus. *Difficultati assumitur.*

Quoniam autem ascensus adhæsionem exigit, cùm dicere liceat, nunc vltimo non est ascensus, sed immediatè post erit; ita & adhæsio, quæ successiuè fit, atque adeò successiui naturam redolet, tunc vltimo non est, sed immediatè post erit.

Non dissimilis apud aliquos est ratio fluidi ascensus per exiles fistulas, siue vitreas, siue alteriùs rationis, ex vtroque capite reclusas; humor namque ille inquiunt cylindrus ex aere per angustiam ipsius fistulæ, non nihil momenti ammittit; vt autem æquè ponderet cum aere circumstanti fieri debet cylindrus partim aqueus, etsi secundum minimam partem, partim aereus. Quod si fistula desuper clausa fuerit fluidum non ascendit ob Elasticam vim

aeris

aeris inclusi: vnde est, vt æquipolleat grauitati, pressionique aeris incumbentis fluido restagnanti; ac propterea huic non pateat aditus in fistula. Res autem non sic se habet namidem contingit in loco vbi nullus aer, vel saltem adeò exiguæ quantitatis, vt vix eredas ei quidquã deferendũ, quod nos Florentiæ sumus experti, sed potius aliunde id prouenit, quia scilicet dum exilis ille tubulus immergitur non nihil in fluidum, huius pars inclusa in angustia ipsius tubuli multum ammittit momenti: vnde nequit æquiponderare partibus circumiacentibus, sed his vrgentibus prementibusque cylindrus ex humido intra tubuli angustiam cedit, eousq; ascendens, vt eius altitudo possit in æquilibrio esse cum cylindris ex humido circumiacente. Nihil enim refert, siue desuper premat, vel non premat aer.

An extrusum ascendat motu accelerato.

Quædam autem de extruso corpore inquiri solent, inter quæ primùm an ipsum extrusum ascendat motu accelerato.

Res planè non exiguis est obuoluta difficultatibus, nam ad accelerationem confirmandam facit illud experimentum, quod si corpus humido leuius fuerit immissum in illud, ita vt ad imum ipsius fuerit propulsum, relictum propriæ naturæ, per humidum ipsum ascendens, ad superficiem eius cùm peruenerit, non sistit, sed subsultat valdè pro ratione profunditatis, vnde cæpit ascendere: cæteris autem paribus, non tantum subsultabit, si parum fuerit in humidum propulsum, quòd etsi plerisque videatur id comprobare corpus illud ascendere natiua vi, & ab interno principio, tamen saltem illud certè confirmat, ascensum illum acceleratum esse.

Difficultas in Archimedis doctrina, de ijs quæ vehuntur in humido.

At verò iuxta Archimedis doctrinam, hoc habet aliquid difficultatis, propterea quod ipse nititur demonstrare Propositione sexta, Solidam magnitudinem humido leuiorem, in humidum impulsam, tanta vi sursum ferri, quanto humidum molem habens magnitudini æqualem, grauius est ipsa magnitudine. Sed vbicunque magnitudo fuerit constituta in humido, siue nimirum in profundo, siue prope superficiem, eodem modo se habet: ac propterea semper æque humidum molem habens magnitudini æqualem, grauius erit ipsa magnitudine. Vnde nullus foret discrimen ascensus, contra experimentum.

Difficultas in contrariam partem.

At ex alia parte illud multum negotij facessit, quod nisi vis ascensus attendatur penes illum excessum Archimedeum, videretur attendendus penes altitudinem cylindrorum, eò vel maximè, quod id experimento hydrargyri superius allato confirmatum videtur; ideò enim in fastigio montis hydrargyrum humiliorem habet in tubo stationem, quia aeris incumbentis mercurio restagnanti, cylindrus est breuior, & si etiam leuioris aeris atque adeò minus est eius momentum pressionis, ac extrusionis, quàm ad montis radicem, vbi aeris cylindrus est longior imò etiam, & grauioris aeris. At verò in superiori experimento, quando scilicet nos repleuimus tubum vitreum aquâ communi, in quam corpus leuiùs humido immisimus, atque deprehendimus duplo celeriùs illud corpus ascendisse per communem aquã, quàm per vini spiritum; id tunc considerandum occurrit. Cylindrus æque altus, ac tubus, in huius imo plus vrget illud corpus humido leuius, quàm in superioribus partibus, vbi cylindrus est breuioris altitudinis, vt dicebamus de cylindro aeris ad montis radicem comparatione illius cylindri aeris ad montis apicem; etsi illud intercedat discriminis, quòd cylindri aquei sunt vniformis grauitatis, at qui ex aere sic se habent, vt partes quo fuerint viciniores terræ sint crassiores, atque adeò grauiores, & contra; ergo velociùs initio videretur debere ascendere illud corpus, & paulatim tardiùs, quanto scilicet vrgentes cylindri breuiores fiunt, cùm tamen experimento sit exploratum, vel ascensus celeritatem augeri, vel saltem æquabilem esse: quamobrem vndique sunt angustiæ.

Compositio difficultatis.

Hæc tamen hunc in modum componenda videntur. Si solidam magnitudinem in humidum innatantem, vtpotè humido leuiorem, perpendamus, duplicem partem, immersam vnam, extantem alteram comperiemus. Superimpositam autem magnitudinem considerat Archimedes, à qua deorsum illa prematur, ita vt neutra ab altera expellatur magnitudo: quæ verò pars prius extabat, non amplius extet.

Si animo concipiamus auferri super impositam illam magnitudinem, ea quæ tota erat immersa, ascendet, adeò vt partim sit immersa, & partim extet. Hanc itaque vim respexit Archimedes, qua videlicet magnitudo illa ascendit, dixitque, magnitudinem humido leuiorem in humidum impulsam, sursum ferri tanta vi, quanto humidum molem habens magnitudini æqualem, grauius est ipsa magnitudine: tantus enim hic est grauitatis excessus, quanta grauitas est super impositæ magnitudinis, à qua quemadmodum habet ma-

gnitudo

gnitudo illa, vt deorsum prematur, & detineatur, ne ascendat, & neutra alteram expellat, ità à pari vi habet, vt sursum feratur cùm ascendit.

Si quæ autem est acceleratio motus, non aliunde quàm ab impulsu concepto, putandum est, oriri.

Verùm quod attinet ad extrusionem, non sic existimandum cum quibusdam, quasi momentum Cylindri extrudentis, cùm præualet, celeriorem inducat motum in extruso, quàm, quem ipse subit; propterea quod idem concipiendum est in ipsa extrusione contingere, quod in Bilancis lancibus, quæ per itum, & reditum sic se componunt ad æquilibrium, vt qua lege vna descendit, altera ascendat. Quod itaque solida magnitudo leuior humido, in humido grauiori celeriùs ascendat; ab excessu grauitatis ipsius humidi molem habentis æqualem ipsi magnitudini, supra eiusdem magnitudinis grauitatem, petendum est; quantò enim maior hic excessus fuerit, tanto etiam maiori vi sursum magnitudo ipsa fertur. At ab altitudine cylindri tantum est expectandum æquilibrium, ita vt si fluida fuerint eiusdem naturæ, vt cylindrus cylindro æquiponderet, eiusdem debet esse altitudinis. Quod si cylindrus vnus fuerit ex grauiori materia, debet tantæ esse altitudinis, quanta exposcit materiæ grauitas: quod euidenter constat ex cylindris aqueis, & mercurialibus. Axioma enim est apud Mechanicos, quod quæ eidem æquiponderant, & inter se æquiponderent: Experimento autem, & ab alijs, & à nobis deprehensum est, cylindrum aqueum altitudinis decem, & septem bracchiorum cum dimidio ferè, æquiponderare cylindro aeris atmosphæræ, cui æquiponderat cylindrus mercurialis, altitudinis vnius brachij, cum quarta circiter parte; ergo necesse est hos duos cylindros secundùm prædictas altitudines esse æquiponderantes; Itaque mercurialis cylindrus vnius bracchij cum quarta parte æquiponderat cylindro aquæ altitudinis decem, & septem bracchiorum, cum dimidio. Hoc autem est pro ratione grauitatis, nam si aduerteris, quæ est ratio $1\frac{1}{4}$, ad $17\frac{1}{2}$, eadem reciprocè est grauitatis aquæ ad hydrargyri grauitatem: grauitas enim aquæ ad grauitatem hydrargiri, est, vt 1, ad 14; Vnde non mirum si detur hæc æquiponderatio inter commemoratos cylindros.

Extrusio quo pacto contingat.

Pressio autem illa humidarum partium, causa est ascensus solidæ magnitudinis, humido leuioris; cylindrus enim, in quo hæc minus habet momentum, tantùmque ei deest, quantùm est humidi altitudo molem æqualem habentis parti ipsius solidæ magnitudinis, quæ super humidum extaret. Vnde nequit æquiponderare circumstanti, nisi quoad superficiem illa magnitudo peruenerit. Tunc enim tametsi illi desit humidum molem æqualem habens parti demersæ ipsius magnitudinis, tamen loco ipsius est grauitas eiusdem magnitudinis, cùm tanta moles humidi, quanta est partis demersæ, eandem, quam tota magnitudo, grauitatem habeat.

Pressionis humidarum partium causa quid.

Cæterùm iucundum foret, ex huiusmodi æquiponderantia superius significatâ atmosphæræ altitudinem colligere, quod à nemine factum aduerti. Si namque grauitas aeris ad aqueam fuerit, vt 1, ad 1177, vt nos plurimis experimentis adinuenimus, quando moles aliqua determinata aeris ponderauerit vt 1, eadem aquæ ponderabit, vt 1177: quare si fiat vt 1, ad 1177, ita bracchia $17\frac{1}{2}$ ad aliud, reperiemus pro altitudine atmosphæræ brachia $20597\frac{1}{2}$. Vel si fiat vt 1 ad 14, ita 1177, ad 16478, si determinata moles aeris ponderauerit vt 1, eadem hydrargyri ponderabit 16478: fiat igitur vt 1, ad 16478, ita $1\frac{1}{4}$ ad aliud, illudque erit $20597\frac{1}{2}$, vt prius, ita vt fluidi telluri incumbentis, vel si mauis atmosphæræ altitudo, erit brachiorum $20597\frac{1}{2}$. Si itaque 3000 brachiorum Florentinorum (brachij enim nomine intelligimus Florentinum) miliare conficiunt atmosphæræ altitudo erit milliariorum 6 [illegible]. Ex hypothesi tamen quod ea esset ratio grauitatis aeris ad quàm: Non est tamen dissimulandum, aerem ipsum non esse homogeneum; quò enim altius ascendimus, eò etiam tenuiorem, leuioremque aerem adinuenimus. Aer siquidem duobus milliarijs e.g. distans à terra, in grauitate non eam habebit rationem ad aquam, non eam inquam, quam habet hic, quem inspiramus, sed longè minorem.

Atmosphæræ altitudinem colligere.

Illud autem huic officit ratiocinio, quod aer haud est homogeneæ naturæ: quo enim remotior à terris eò leuior, cùm tamen illud vim sumat ab æqualitate densitatis, atque spissitudinis, ac propterea grauitatis. Si placet igitur, ad æquabilitatem grauitatis redigatur, atque proueniet altitudo duplo maior.

Verùm adhuc iudicium anceps, nam plerisque, inter quos Tycho visum est eliminandum ignem

Tychonis opinio.

ignem Aristotelicum in Lunæ concauo, vaporesque circa terram diuersos ab aere agnoscendos, aeremque ad confinia Lunæ prorogandum, ibi desinentem in ætherem. Alijs verò inter quos Keplerus, placuit vaporem ab alijs creditum dicendum esse aerem: illum autem ad montium fastigia terminari, & supra fumosas exhalationes crepusculorum lampades existere, & statim æther succedere; Vt igitur Tycho successoriam attenuationem aeris in æthere, & obliteratione densitatis aereæ, ita & hic discrimen corporũ agnoscit, quod si quis supra consisteret, non minus ipsi in oculos incursurum opinatur, ac superficies, quæ aerem ab aqua separat in oculum incurrit; idque propter refractiones, quarum hanc causam existimat, vt etiam hanc in discrimen aeris, & ætheris contulit, quod Rothmannus negauit, nullam existimans refractionem contingere, à qua cauendum sit in capiendis Solis altitudinibus, solumque à terra ad cælum, aerem esse, excepto pauculo vapore. De his tamen oportuniori loco: solùm hæc innuisse sufficiat. Hoc vnum addam, non videri benè ratiocinatum keplerum in assignanda differentia crassitiei, ac grauitatis inter aerem, & aquam; Dicebat enim, eam esse rationem vt quindecim myriades myriadum cyathorum aeris, æquiponderarent vni cyatho aquæ. At si sermo sit de aere, quem inspiramus, ac de aqua elementari nimis est exorbitans. De his tamen occasione refractionum in Diopricis agemus: qua autem ratione adinuenerimus pondus aeris, illudque contulerimus cum pondere aquæ, ostendemus in Physicis. Interim ad Resolutiones redeamus, & in re de qua agimus esto exemplum.

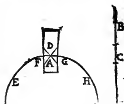
Kepleri sententia exploditur.

Exemplum XXXXIX.

THEOREMA.

Solidarum magnitudinum per humidum ascendentium, quæ leuior est sursum celeriùs fertur.

Sit magnitudo A leuior humido, eius autem grauitas esto B: at humidi molem habentis æqualem magnitudini A grauitas sit BC.



Accipiatur quædam magnitudo D, cuius grauitas sit æqualis C: magnitudo igitur ex vtrisque magnitudinibus A, D, constans, erit leuior humido; nam magnitudinis ex vtrisque magnitudinibus A, D constantis, grauitas est BC; humidi vero molem habentis æqualem huiusmodi aggregato, grauitas maior est quàm BC, quoniam videlicet BC, est grauitas humidi molem habentis æquale magnitudini A: quamobrem si huiusmodi aggregatum e duabus magnitudinibus, demittatur in humidum, vsque eo demergetur, vt tanta moles humidi, quanta est pars magnitudinis demersa, eandem, quam tota magnitudo, grauitatem habeat. Demissum igitur sit in humidum, cuius superficies EFGH.

Resolutio.

a Archimedes prop. 6. de insidentibus humido.

QVoniam A magnitudo sursum fertur [a] tanta vi, quanta est grauitas C, sed magnitudo A premitur abs magnitudine D, grauitate C; ergo tanta vi magnitudo A sursum fertur, quanta deorsum premitur à magnitudine D; ergo neutra ab altera expelletur; ergo magnitudo A erit demersa, & magnitudo D erit extans: ergo tanta moles humidi, quanta est magnitudo A, grauitatem habet eandem, quam composita magnitudo ex A, D. Quod ita se habet &c.

Compositio.

QVoniam igitur tanta moles humidi, quanta est magnitudo A, grauitatem habet eandem, quam composita magnitudo ex A, D; ergo magnitudo A erit demersa, & magnitudo D erit extans; ergo neutra ab altera expelletur; ergo tanta vi magnitudo A sursum feretur, quanta deorsum premitur ab ipsa magnitudine D, sed à magnitudine D, premitur grauitate C; ergo A sursũ feretur tantâ vi, quãta est grauitas C. Quod oportebat ostendere.

His

His hic sic habentibus.

QVoniam si solida magnitudo A fuerit adhuc leuior, cùm eiusdem supponatur esse molis, humidi quidem molem habentis æqualem leuiori magnitudini A, erit eadem grauitas BC; sed magnitudinis A grauitas minor est, quàm B; ergo excessus grauitatis humidi molem habentis æqualem leuiori magnitudini A, maior erit quàm C, eritque grauitas magnitudinis D: sed A sursum fertur tanta vi, quanta est grauitas C in prima hypothesi; ergo cùm A fuerit adhuc leuior in secunda hypothesi, feretur sursum vi, quæ maior sit, quàm grauitas C; ergo magnitudo A cum leuior fuerit, maiori vi feretur sursum; ergo celeriùs.

Nunc demonstrabimus, quod superiùs experimento nobis innotuisse dicebamus. Esto igitur.

THEOREMA. Exemplum XXXXX.

Solida magnitudo leuior humido per fluidum grauius velociùs ascendit, quàm per leuius.

Hoc Theorema superiori schemate repetito demonstrabitur non absimili ratione, ac superiùs eadem præmissa demonstratione; eademq; Analysi, ac Synthesi repetita.

THEOREMA. Exemplum XXXXXI.

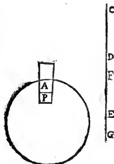
Si aliqua fuerit solida magnitudo leuior humido, huic autem adiecta sit alia quapiam itidem humido leuior solida magnitudo, hoc aggregatum immissum in humidum, maiori vi, quam initio sola proposita magnitudo, sursum feretur.

Sit magnitudo A, cui addita sit magnitudo P, & vtraque sit leuior humido. Dico &c.

Magnitudinis A leuioris humido, grauitas sit CD; humidi verò molem habentis æqualem ipsi A, grauitas sit CE: aggregati autem ex A,P grauitas sit CF; humidi verò molem habentis æqualem aggregato ex A,P, grauitas sit CG.

Resolutio.

QVoniam igitur aggregatum ex A,P impulsum in humidum, maiori vi sursùm fertur, quàm magnitudo A; sed magnitudo A in humidum impulsa, tantâ vi sursùm fertur, [a] quanta est grauitas DE, & aggregatum ex A,P tantâ vi sursùm fertur, [b] quanta est grauitas FG, ergo FG maior erit, quàm DE; communi ablata FE, ergo EG maior erit, quàm DF. Quod ita se habet: Nam CD est grauitas magnitudinis A, & CF est grauitas aggregati ex A,P, itē CE est grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini A, & CG est grauitas humidi molem habentis æqualem aggregato ex A,P, ergo DF, erit grauitas magnitudinis P, & EG erit grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini P, sed grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini P, maior est grauitate eiusdem magnitudinis P, ergo EG maior erit, quàm DF.



a *Arch. de insidētibus humido.*
b *Arch. ibid. c 5. axio. pr.*

Compositio.

QVoniam igitur magnitudinis A grauitas est CD; aggregati autem ex A,P, grauitas est CF: humidi molem habentis æqualem magnitudini A, grauitas est CE, & humidi molē habētis ęqualē aggregato ex A, P est CG; ergo DF erit grauitas ipsius P, & EG, erit grauitas excessus, quo humidum, cuius grauitas CG, superat humidum cuius gra-

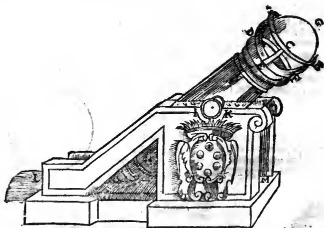
uitas CE; atq; adeò erit grauitas humidi molem habẽtis æqualem magnitudini P, ſed grauitas humidi molem habentis æqualem magnitudini P, eſt maior grauitate eiuſdem magnitudinis P, cuius grauitas eſt DF; ergo EG maior erit, quàm DF: communi addita FE; ergo FG maior erit, quàm DE: ſed magnitudo A in humidum impulſa, tanta vi ſurſum fertur, quanta eſt grauitas DE, & aggregatum ex A,P, tanta vi ſurſum fertur, quanta eſt grauitas FG; ergo aggregatum ex A,P in humidum, impulſum, maiori vi ſurſum fertur, quàm magnitudo A. Quod oportebat oſtendere.

Experimenta quædam. Cùm aliquando contigerit, vt experiremur nonnulla ad proiectorum motum pertinentia, ſcilicet Mortariũ æneum, quod puluere pyrio oneratum adhibetur ad explodendos globos, erat autem exiguæ longitudinis, dimidij palmi Romani, globus verò æneus erat ſex vnciarũ; inſtructũ cũ eſſet autẽ illo puluere pyrio, vti dictũ eſt, obſeruauimus pro quantitate pulueris, proiectionis diſtantiam, eadẽ ſẽper retẽta dimidij anguli recti, eleuatione, & quidẽ oneratum denario pulueris proijciebat globum ad diſtantiam vnius brachij ferè Florentini; paratum autem duobus denarijs in maiorem diſtantiam, & ita experti ſumus vſque ad quinque pulueris denarios.

Duo propeuiſtur inquirenda. Primum. Duo porrò videbantur plurimum negotij faceſſere, quæ quidem æquè perturbabant animum, eundemque incitabant ad ſpeculandum. Primum, quòd retenta eadem pulueris quantitate, Mortarium non proijciebat globulum ſemper ad eandẽ diſtantiam, ſed modò ad paulò maiorem, modò verò ad paulò minorem, adeò vt centies ſi id repetitum fuiſſet centies quoque variatio contigiſſet, tametſi omni induſtria, diligentia, ac ſtudio curatum fuiſſet, vt iiſdem ſemper manentibus experimentum fieret.

Secundum. Secundum, quod non erat minori inquiſitione dignum, cur interualla, diſtantiæque, ad quas globulus proiectus perueniebat, non eam ſeruarent rationem, quæ inter pondera pulueris; dum enim onerabatur Mortarium duplo pulueris, non propterea dupla erat diſtantia, ad quam globulus proiectus pertingeret.

Cùm autem animum ad meditandum appellerem, illud ſe ſe obtulit circa primum, veluti ſummoperè probabile, illud phænomenon ſcilicet non aliunde, quàm à diuerſitate contactus globuli cum ipſius Mortarij caua ſuperficie, prouenire; Ac propterea animum induxi, vt crederem futuram, ſi aliquid remedij adinueniretur, quo liceret ab huiuſmodi contactu declinare, nullam varietatem in proiectione, etſi eadem pulueris quantitate, ac iiſdem omnibus manentibus, quæ contingere ſolebat.



Peropportunum quidem illicò mihi viſum fuit id, quod mox explicabo.

Erat

Erat autem Mortarium, vt in adiecto schemate DHF ad eleuationem dimidij anguli recti, fulcitū capsulæ LM, medijs ansulis IK, &c. eius orificio aptata erat machinula ADEFB, cui insidebat globulus CG, eaque erat ratione ipsi orificio accommodata, vt in quatuor punctis medijs cochleolis coniuncta esset, Mortarijque æri infixa; eius autem Zonulā ACB, ea ratione fieri curaui, vt internus ambitus ipsius exilis esset instar aciei cultri ad euitandam quantum fieri posset contactum cum ipso globulo, cùm autem intromissus fuisset puluis, & aptato globulo, vt vides, puluere accenso, & globulo exploso, obseruatus fuit terminus, ad quem ille perueniret, quo pluries, ac pluries facto, deprehensum est summa constantia semper globulum ad eundem terminum peruenisse, quod maiori mihi fuit argumento, varietatem illam priùs obseruatam non aliunde originem traxisse, quàm ab eo iam insinuato contactu, atque hunc in modum veritate deprehensa, statim animum subijt cupiditas inquirendi causam, vnde non seruaretur ratio in distantijs, quæ esset in ponderibus pulueris, quæ singulis vicibus fuerunt adhibita, itaque in memoriam recolens, quòd illa linea descripta ab exploso globulo proximè accederet ad parabolicam, statim se obtulit ea quæ sequitur demonstratio, qua ostenditur, rationem distantiarum esse eandem cum ratione quadratorum à viribus pulueris explodentis. *Experimenti explicatio.*

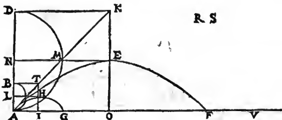
Considerandum est enim, vni denario pulueris pyrij tantam inesse vim, duobus denarijs duplam, tribus denarijs triplam, & sic deinceps; non propterea tamen distantiæ secundum quas fit explosio globuli, hanc seruant rationem, sed potius eam, quæ est inter quadrata; vnde si vis pulueris fuerit, vt vnum, vis alia fuerit, vt duo, & sic de reliquis, distantia ad distantiam non erit, vt vnum ad duo, sed vt vnum ad quatuor, quod nos sequenti demonstratione comprobabimus. Præsens autem Theorema est vnum ex illis quamplurimis Physico-Geometricis, quæ in naturali Philosophia nos afferimus; placuit vtpotè non omni iucunditate destitutum ad hanc Artem illustrandam in exemplum afferre. *Notandum.*

THEOREMA.

Exemplum XXXXXII.

Si certo quodam impetu proijciatur graue secundùm directionem eleuatam supra lineam horizontalem, & alio itidem impetu secundùm eandem directionis lineam idem graue proijciatur. Dico esse, vt quadratum impetus ad impetus quadratum, ita spatium in linea horizontali ad spatium in eadem linea confectum.

Sit linea horizontalis AV, ad cuius extremum A impetu R, secundùm directionis lineam Ak facta sit extrusio alicuius grauis, & ad eiusdem lineæ extremum A secundùm directionem eiusdem lineæ AK facta sit extrusio eiusdem grauis impetu quidem S. Dico esse, vt quadratum R ad quadratum S, ita spatium confectum à graui extruso impetu R super rectam horizontalem AV, ad spatium confectum super eandem lineam à graui extruso impetu S.



Intelligatur ad extremum A erecta perpēdicularis AD, ita vt si graue ipsum secūdùm huiusmodi lineā impetu R extruderetur, perueniret ad D, at si foret proiectum impetu S, secundùm eandem directionis lineam perueniret ad B.

Quoniam igitur, vt nos in Physicis demonstrauimus, impetus, siue velocitatis gradus siue momentum, quo impellitur graue per rectam AD vsque ad D, idem est, ac momentum, quod acquireret illud idem graue naturaliter descendens ex D in A, & illud, quo impellitur vsque ad B, idem est ac illud, quod graue acquireret naturaliter descendens ex B in A, momentum autem acquisitum in A per descensum ex D in A, ad momentum acquisitum itidem in A per descensum ex B in A, est in subduplicata ratione spatij AD, ad spatium AB; *Quid Impetus, siue Velocitas.*

ergo

ergo momentum, quo impellitur graue ex A in D ad illud, quo impellitur ex A in B, est in subduplicata ratione spatij AD ad spatium AB. Sed momentum, quo graue ex A expellitur in D est ex hypothesi R, illud verò, quo expellitur ex A in B, est itidem ex hypothesi S; ergo R ad S subduplicatam habebit rationem spatij AD ad spatium AB; quare vt quadratum R ad quadratum S, ita AD ad AB.

Hic per mensuram momenti intelligitur recta, per quam impetus, & momentum potest proycere mobile ab extremo, ad extremum ipsius; quod prius intelligendum de descensu.

Quoniam verò graue extruditur per AD momento R, & per AB momento S, erunt AD, AB mensuræ ipsorum momentorum; esto igitur AD mensura momenti R, & AB mensura momenti S, (hoc enim intelligere nihil prohibet). Super AD, & AB descripti sint semicirculi AMD, ACB, intersecantes directionis lineam AK in punctis M, C, quæ quidem erunt extrema quadrantum AM, AC, quando angulus KAF, vel kAD fuerit semirectus; secundùm quam directionem demonstrationem conteximus, quoniam secundùm eandem hoc Pisis nos experti sumus.

Per punctum C ducta sit LH parallela rectæ AF, cui itidem parallella per punctum M ducta sit NE, sitque CH facta æqualis ipsi LC, & ME facta sit æqualis NM. Ex H cadat perpendicularis HI, & ex E perpendicularis EO. Esto autem HI axis parabolæ, cuius vertex H, amplitudo autem AG, deinde EO esto axis parabolæ, cuius vertex E, amplitudo autem AF. Manifestum est parabolam AEF describi impetu R, cuius mensura fuit AD, & parabolam AHG describi impetu S, cuius mensura fuit AB. Intelligatur IH protracta ad T & OE ad k sic BT æquistabit AI, & DK æquidistabit AO.

α 4. sexti, & 16. quinti.
β 34. primi.
γ 11. quinti.

Quoniam igitur est, vt AF ad AG, amplitudo ad amplitudinem, ita semiamplitudo AO ad semiamplitudinem AI, sed α vt AO ad AI, ita Ok ad IT; sunt enim triangula AOk, AIT, inter se similia, seu AD ad AB; sūt β enim OK, IT, æquales ipsis AD, AB, ergo erit, γ vt AF ad AG, ita AD ad AB, sed vt AD ad AB, ita quadratum momenti R, ad quadratum momenti S, ergo vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AF ad AG. Quod oportebat ostendere.

Quoniam verò, vt superiùs itidem innuimus, experimentū à nobis Pisis confectum fuit, ita vt linea directionis angulum semirectum efficeret cum linea horizontali, propterea demonstrationem superiorem confecimus experimento apprimè respondentem. Visum est tamen operæ pretium aliam contexere, quæ inseruiat cuicunque angulo, quem linea directionis cum horizontali conficiat; eam autem hìc subijcimus.

Exemplum XXXXIII.

THEOREMA.

Si certo quodam impetu proyciatur graue secundùm directionem eleuatam supra lineam horizontalem, & alio itidem impetu secundùm eandem directionis lineam idem graue proyciatur. Dico esse, vt quadratum impetus ad impetus quadratum, ita spatium in linea horizontali ad spatium in eadem linea confectum.

Sit linea horizontalis AV, ad cuius extremum A, impetu R, secundùm directionis lineam Ak facta sit extrusio alicuius grauis. Et ad eiusdem lineæ horizontalis extremum A secundùm directionem eiusdem lineæ AK, facta sit extrusio eiusdem grauis impetu S. Dico, esse vt quadratum R ad quadratum S, ita spatium confectum à graui extruso impetu R super rectam horizontalem AV, ad spatium confectum super eandem lineam à graui extruso impetu S.

Intelligatur ad extremum A erecta perpendicularis AD, ita vt si graue ipsum, secundùm huiusmodi lineam impetu R extruderetur perueniret ad D, at si foret proiectum impetu S, secundùm eandem directionis lineam perueniret ad B.

Quoniam igitur, vt nos in Physicis demonstrauimus, impetus, siue velocitatis gradus, siue momentum, quo impellitur graue per rectam AD vsque ad D, idem est, a c momentum,

quod

quod acquireret illud idem graue descendens ex D in A, & illud, quo impellitur vsque ad B, idem est, ac illud quod graue acquireret naturaliter descendens ex B in A, momentum autem acquisitum in A per descensum ex D in A, ad momentum acquisitum in A per descensum ex B in A, est in subduplicata ratione spatij AD, ad spatium AB; momentum enim ad momentum est vt tempus ad tempus, tempus autem ad tēpus est in subduplicata ratione spatiorū, ergo momētum, quo impellitur graue ex A in D ad illud, quo impellitur ex A in B, est in subduplicata ratione spatij AD ad spatium AB. Sed momentum, quo graue ex A expellitur in D est ex hypothesi R, illud verò, quo expellitur ex A in B, est itidē ex hypothesi S; ergo R ad S subduplicatam habebit rationem spatij AD ad spatium AB; quare vt quadratum R ad quadratum S, ita AD ad AB.

Quoniam verò graue extruditur per AD momento R, & per AB momento S, erunt AD, AB mensuræ ipsorum momentorum; esto igitur AD mensura momenti R, & AB mensura momenti S, (hoc enim intelligere nihil prohibet). Super AD, & AB descripti sint semicirculi AMD, ACB, intersecantes directionis lineam AK in punctis M, C.

Per punctum C ducta sit LH parallela rectæ AF, cui itidem parallella per punctum M ducta sit NE, sitque CH facta æqualis ipsi LC, & ME facta sit æqualis NM. Ex H cadat perpendicularis HI, & ex E perpendicularis EO. Esto autem HI axis parabolæ, cuius vertex H, amplitudo autem AG, deinde EO esto axis parabolæ, cuius vertex E, amplitudo autem AF. Manifestum est parabolam AEF describi impetu R, cuius mensura fuit AD, & parabolam AHG describi impetu S, cuius mensura fuit AB. Intelligatur IH protracta ad T. Erit autem AK tangens parabolæ vnde descripta hac eadem erit directionis linea.

Hic per momenti mensurā intelligitur recta, per quā ab extremo, ad extremum impetus, atq; momentum proijcere potest mobile; assumimus enim tantā lineā, ad denotādū tantū impetū quantum requiritur, ad hoc, vt possit proijcere illud mobile ab extremo, ad extremū ipsius lineæ; quod de describenda intelligendum primi.

Apollonius lib. 1.

Resolutio.

QVoniam igitur est, vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AF ad AG; est autem vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AD ad AB; ergo erit a vt AF ad AG, ita AD ad AB, vt autem AF ad AG, ita AO ad AI, siquidem, vt duplum ad duplum, ita simplum ad simplum; ergo b vt AO ad AI, ita AD ad AB, sed vt AO ad AI, ita c est OK ad IT, seu OE ad IH, dimidium ad dimidium, atque adeò AN ad AL, cū hæ ijs sint d æquales; ergo e vt AD ad AB, ita AN ad AL, & permutando f vt AD ad AN, ita AB ad AL; & diuidendo g, vt DN ad NA, ita BL ad LA; & conuertēdo, h vt AN ad ND, ita AL ad LB, sed vt NM ad ND, ita LC ad LB; ergo per subtractionem æqualiū rationum erit, vt AN ad NM, ita AL ad LC, & i permutando, vt AN ad AL, ita NM ad LC; est autem AO dupla ipsius NM, & AI dupla ipsius LC; ergo vt AN ad AL, ita AO ad AI, sed OE est k æqualis AN, & IH æqualis AL; ergo vt AO ad AI, ita OE ad IH; est l autem OK dupla ipsius OE, & IT dupla ipsius IH, siquidem Vt AO ad ME ita Ok ad EK &c. ergo vt OK ad IT, ita AO ad AI, seu AF ad AG; vt enim simplum ad simplum, ita duplum ad duplum. Quod ita se habet; sunt enim triangula AOK, AIT inter se similia &c.

a 11. quinti. b 11. quinti. c 4. sexti. & 16. quinti. d 14. primi. e 11 quinti. f 16. quinti. g 17. quinti. h cor. 4 quinti. i 16. quinti. k 14 primi l 4. sexti. & 16. quinti.

Compositio.

QVoniam igitur est vt AF ad AG, ita AO ad AI; vt enim duplum ad duplum ita simplum ad simplum, & α vt AO ad AI, ita OK ad IT, (sunt enim triangula AOk, AIT inter se similia &c.) β est autē OK dupla ipsius OE, & IT dupla ipsius IH, siquidem Vt AO ad ME ita OK ad EK &c. vnde vt Ok ad IT, ita OE ad IH; ergo γ vt AO ad AI, ita OE ad IH, sed OE æqualis est AN, & IH æqualis est AL; ergo vt AO ad AI, ita AN ad AL; sed δ vt AN ad AL, ita NM ad LC, & permutando ε vt AN ad NM, ita AL ad LC, & vt AN ad NM, ita NM ad ND, vtque AL ad LC, ita ζ LC ad LB, atque adeò ex æquali, η vt AN ad ND, ita AL ad LB; & conuertendo, θ vt DN ad NA, ita BL, ad LA, componendoque, κ vt DA ad AN, ita BA ad AL, ac permutando, λ vt DA ad AB, ita NA ad AL. Erat autem, vt NA ad AL, ita AO ad AI; ergo μ vt DA ad AB, ita AO ad AI; sed vt AO ad AI, ita AF ad AG, ergo vt DA ad AB, ita AF ad AG, sed vt DA ad AB, ita quadratum momenti R ad quadratum momenti S; ergo vt quadratum momenti R ad quadratum momenti S, ita AF ad AG. Quod erat operæ prætium ostendere.

α 4. sexti. & 16. quinti. β 4. sexti. & 16. quinti. γ 11 quinti. δ 34. primi. ε 4. sexti, & 16. quinti. ζ 16. quinti. η cor. 8. sexti. θ 22. quinti. κ cor. 4 quinti. λ 18. quinti. λ 16. quinti. μ 11. quinti.

Videtur omnibus ferè probatum illud. Quod si graue projiciatur ad libellam, & per lineam horizontalem, ne minimum quidem excurrat per lineam rectam, sed statim incipiat descendere, atque adeò duplici impulsu, & scilicet à propria grauitate per lineam perpendicularem horizonti, & ab externo principio secundum lineam horizontalem, paraboli-

cam

eam lineam describat: Vnde non semel ad hanc veritatem indagandam curauimus experimenta fieri, præsertim verò ad explorandum num id quod alioquin à plurimis fuit decantatum, cum veritate consentiat; an scilicet si Bombarda fuerit horizontaliter directa, dum globum explodit vi inclusi pulueris accensi, eodemque momento temporis, quo globus exit ex orificio Bombardæ alter similis, ac æqualis magnitudine, & pondere cadat ex eodem orificio per rectam perpendicularem ad horizontem, simul etiam vterque ad horizontem ipsum pertingat; quod vt experiremur Liburni commorantes hac vsi sumus industria: onerata enim bombarda debito puluere, & globo ferreo, ad eius orificium aptauimus bacillum tantæ longitudininis quanta erat semidiameter orificij, & nonnihil etiam amplius, vt non nisi vi orificio transuersim intromitti posset; sic enim firmiter hærebat referens eiusdem orificij diametrum. Mox verò cepimus alium globum ferreum eiusdem magnitudinis atque adeò ponderis, cumque quibusdam funiculis ligauimus ita firmiter, vt vno ex ijs suspendi posset, hunc præterea bacillo circumuoluimus, nodisque firmauimus, vt accenso igne, momento, quo extrusus globus ex Bombardæ orificio exiret, descenderet alter; Animaduertimus verò hoc experimento pluries repetito coram Magnatibus, plurimisque alijs inferioris notæ, curiositatis gratia illuc confluentibus, etiam eorum testimonio, citiùs perpetuo globum descendentem per lineam perpendicularem ad horizontem pertingere: vnde suspicari cæpimus, etiam fatentibus ijs, qui rem secus euenturam arbitrabantur, id acceptum referendum esse medij impedimento, quod nos adprobantes, ac admittentes existimauimus, posse quempiam, hunc, qui sequitur in modum, ratiocinari. Si tamen illud, quod primo loco occurrit suppositum, tanquam verum admitteretur nimirum, quòd impulsus vnus, alium retardet.

Nullus hac in re patet aditus Analystæ, siquidem principijs nutantibus nulla fit resolutio, quatenus tamen conijcere permittitur, hac ratione quispiam ratiocinari posset.

Experimentũ de Bombarta explodente pilam horizontaliter.

Dum proijcitur lapis in aquam secus horizontem præsertim si figura instar placentulæ extiterit, impulsus autem validus, per aquam saltim excurrit antequam immergatur, atque descendat, quod non contingeret nullo præuio impulsu; nam alioquin superimpositus aquæ, propriæ naturæ relictus statim descendit; imò si per aerem perpendiculariter in aquam cadit, nulla interposita mora petit imum; quo pacto præoccupatur responsio, quod scilicet id ita eueniat, quoniam graue à medio ad medium diuersum, hoc est ab aere ad aquam, transeat. His habitis.

Medium retardat sui crassitie grauis descensum, & quo crassiùs eò magis retardat; vnde si fuerit crassissimum, omnem descensum prohibet. Insuper impulsus horizontalis retardat eiusdem grauis descensum; ita vt quo vehementior extiterit, eò etiam magis illum retardet; quod si vehementissimus fuerit, omnem descensum prohibet; vtrunque igitur retardat, & impedit; quare si vnum tantum nequear descensum omninò impedire, alio accedente, impediet; quanto autem crassius medium extiterit; tanto minùs de horizontali impulsu ad idem consequendum requiritur; si itaque medium fuerit aqua, hæc autem attenuata facessat in aerem; & quantum crassitiei ammiserit, tantundem horizontalis impulsus, quo lapis per aquam excurrebat vigoris acquisierit, itaut aggregatum momentorum resistentiæ aquæ attenuatæ puta aeris, & impulsus adaucti æquale sit aggregato momentorum resistentiæ aquę, & impulsus non adaucti quò graue per aquam excurrebat, idem in aere contiget effectus, nempe graue per aerem feretur iuxta lineam horizontalem; itaque si hac licet quamuis leui vti coniecturá, non erit absimile vero, vt globus vi Bombardæ explosus per aliquod spatium, ac tempus feratur horizontaliter, dummodo vis impellens tantum habeat momentum quanto ad id est opus; quæ non tanquam certa, sed vt non omninò improbabilia dicta sunto.

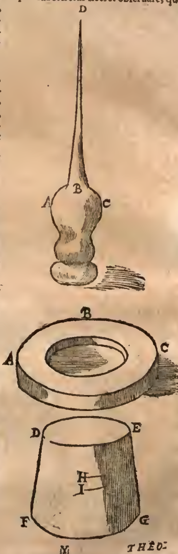
Experimentũ proponitur glaciequm.

Cùm nobis foret in desiderio præclarum illud inquirere, quo nam pacto aqua in glaciem concresceret, & quis hac in re foret Naturæ progressus, propterea multum hac in re laboris pertulimus, nec exiguum tempus insumpsimus. Erat autem vas vitreum, prout in adiuncto schemate intueri licet, nimirùm vas sphæricum ABC, ex quo collum graci-



le con-

se consurgebat BED longitudinis trium partium vnius brachij Florētini, sphærici vasis diameter erat duarum partium ex ijs, quarum viginti totum brachium complent; collum adeò erat gracile, vt eius orificium foret instar pupillæ oculi: erat porrò communi aqua repletum vsque ad terminum E. Dum autem huiusmodi vas fuit in glaciem immersum citra collum ipsum, obseruatum fuit aquam ascendere vltrà terminum E, quod non modicam adstantibus admirationem ingessit, cùm potius ratio dictaret aquam per angustam fistulam descendere debere, cùm frigidi proprium sit condensare: inde cuiusque animum adstantium suspicio inuasit, nè id ex vasis immutatione ortum duceret, ob id peropportunum duxi vas idem in aquam calidam immergere, vt inde quid suboriretur liceret obseruare, quo facto, cernimus illicò aquam descendere infra E, cùm tamen oppositum quisque sibi suasisset euenturum, intelligens calidi proprium esse rarefacere; propterea maioris adhuc suspicionis inde causa est orta, ne id à continentis mutatione prouenirct; quamobrem, vt veritatem tandem assequeremur, haud irrationabile duxi vas alia figura præditum adhibere, cuius videlicet parietes forent depressi, vt in adiuncto schemate perspicuè apparet; experimento autem facto, secus rem euenire deprehensum est: immò variatis quoque vasis penes vitri crassitiem, hinc etiam symptoma variari obseruare licuit.



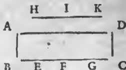
Quinimò, vt impensiùs rem ipsam nostra contemplatione persequeremur, anulum æneum fieri curaui, vt in tertia figura ABC, quem aptabam masculo DFGE, in quo descendere vsque ad H aduertebam: erat autem masculum etiam æneum, mox in ignem anulo iniecto, donec ferè candesceret, eidem iterum aptabam masculo obseruans quousque descenderet, & aduerti peruenisse ad I punctum infra H, existente anulo, tam priùs, quàm posteà, parallelo horizonti: vnde eiusdem anuli dilatationem conieci; siquidem masculum erat coni segmentum, vnde versus basim crassitie sua crescebat: hinc porrò datâ philosophandi ansâ multa sum meditatus, & quidem id absolutè nequaquam euenturum arbitrabar, inspecta naturalis agentis natura, qua actionem vniformiter difformiter, vt aiunt, effundit; Ob id data hypothesi, quòd calor æquè inuaderet, non autem actione illa vniformi difformi, quid secuturum quærebam: Vnde Theorema condidi. *Experimentũ alterum.*

In prima figura vas depressum à lateribus repræsentatur per ABC. In secunda figura anulus æneus respræsentatur per ABC. Tandem masculum significatur per EDFG, cui aptabatur anulus, qui descendebat ad H, postquam autem fuerat calefactus, & iterum aptatus, descendit vsque ad I: Vnde conijcere licuit, anulum illum secundùm intimam superficiem dilatatum fuisse vi caloris; qua de re deinde causam inquirere conati sumus.

Exemplum XXXXXIV.

THEOREMA.

Magnitudo rarefactione adaucta vi caloris aequè inuadentis singulas eius partes, mensuras acquirit maiores in ratione, quâ ab initio.



Sit magnitudo ABCD, quæ suscipiat incrementum per caloris intrusionem. Vel igitur ratio est rationalis, vel irrationalis. Sit primo rationalis, atque adeò BC sit multiplex ipsius AB: cùm itaque BC sit multiplex ipsius AB, erit diuisibilis in partes, quarum quælibet sit æqualis ipsi AB; diuidatur, cæque sint BE, EF, FG, GC. Cùm itaque calor æquè inuadat ex hypothesi singulas partes, tantum afferet incrementum vni ex ipsis, quantum alteri. Sit autem HI incrementum factum parti BE; tantundem enim fiet reliquis partibus, quarum singulis cùm sit æqualis AB, etiam & illi fiet incrementum HI; omnia autem incrementa facta partibus BE, EF, FG, GC, sit Hk.

Resolutio.

QVoniam igitur figura contenta sub BC plus HK incremento, & AB plus incremento HI continetur sub lateribus habentibus eandem rationem, quam habent latera BC, AB; ergo vt BC ad AB, ita eadem BC plus HK incremento, ad AB, plus HI incremento; sed vt HK ad HI, ita BC ad AB, ergo vt BC plus HK ad AB plus HI, ita HK ad HI, & permutando, vt BC plus HK ad HK, ita AB plus HI ad HI, & diuidendo vt BC ad HK, ita AB ad HI, & permutando, vt BC ad AB, ita HK ad HI; * ergo incrementum, quod suscipit BC ad illud, quod suscipit AB erit, vt BC ad AB,* sed vt BC ad BE, ita BC ad BA, cùm BA, BE supponantur æquales; ergo vt BC ad BE, ita incrementum, quod suscipit BC, ad incrementum, quod suscipit AB, sed HK est incrementum, quod suscipit BC, & HI est etiam incrementum, quod suscipit AB, * ergo vt BC ad BE, ita HK ad HI, estque ex hypothesi ratio multiplex; ergo quàm multiplex est BC ipsius BE, tàm multiplex etiam erit HK ipsius HI. Quot igitur partes in BC continentur, quarum quælibet æqualis est BE, totidem continentur in HK, quarum quælibet æqualis est HI. Quod ita se habet &c.

Compositio.

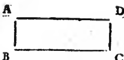
QVoniam igitur BC diuisa est in partes, quarum quælibet æqualis est BE, singulisque facta sunt incrementa, quorum quodlibet æquale est HI, eorumque aggregatum est HK; ergo quot partes in BC continentur, quarum quælibet æqualis est BE, totidem continentur in HK, quarum quælibet æqualis est HI; ergo quàm multiplex est BC ipsius BE, tàm multiplex erit HK ipsius HI; ergo vt BC ad BE, ita HK ad HI,* sed Hk est incrementum, quod suscipit BC, & HI est incrementum, quod suscipit AB; ergo vt BC ad BE, ita incrementum, quod suscipit BC, ad incrementum, quod suscipit AB,* sed vt BC ad BE, ita BC ad BA, cùm BA, BE supponantur æquales; ergo incrementum, quod suscipit BC ad illud, quod suscipit AB, erit, vt BC ad AB; ergo incrementa erunt magnitudinibus proportionalia,* ergo vt BC ad AB, ita HK ad HI, & permutando vt BC ad HK, ita AB ad HI, & componendo, vt BC plus HK ad HK, ita AB plus HI ad HI, & permutando, vt BC plus HK ad AB plus HI, ita Hk ad HI, sed vt Hk ad HI, ita BC ad AB; ergo vt BC plus HK ad AB, plus HI, ita BC ad AB. Ergo figura contenta sub BC plus Hk incremento, & AB plus incremento HI, continetur lateribus habentibus eandem rationem, quam habent latera BC, AB. Quod oportebat ostendere.

Breuiùs diceremus * sed vt BC ad BE ita BC ad BA, cum BA, BE supponantur æquales * ergo vt BC ad AB ita HK ad HI &c.

At verò si supponamus rationem esse ineffabilem, instituetur Analysis ad eum, qui sequitur modum.

Resolu-

Resolutio.



QVoniam igitur figura post rarefactionem, æquè inuadente calore, similis est figuræ ante rarefactionem; figura autem sub BC plus incremento ex rarefactione in BC, & AB plus incremento ex rarefactione in AB est post rarefactionem, at verò quæ sub BC, & AB est anteà; ergo figura contenta sub BC plus incremento ex rarefactione in BC, & AB plus incremento ex rarefactione in AB similis est figuræ sub BC & AB; ergo vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad AB plus incremento ex rarefactione in AB, ita BC ad AB; ergo permutando, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad BC, ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad AB; ergo per conuersionem rationis, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad idem incrementum, ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad idem incrementum; & diuidendo, vt BC ad incrementum ex rarefactione in BC, ita AB ad incrementum ex rarefactione in AB, & permutando, vt BC ad AB, ita incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB, sed vt incrementum ob intrusum calorem in BC, ad incrementum ob intrusum calorem in AB, ita est incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB; ergo incrementum ob intrusum calorem in BC ad incrementum ob intrusum calorem in AB erit, vt BC ad AB; sed capacitas prædicti incrementi in BC ad capacitatem similis incrementi in AB, secundùm certum intensionis gradum, est vt BC ad AB; ergo incrementum ob intrusum calorem in BC ad incrementum ob intrusum calorem in AB, est vt capacitas huiusmodi incrementi in BC ad capacitatem similis incrementi in AB, iuxta certum intensionis gradum. Quod ita se habet.

Compositio.

QVoniam igitur extensionis incrementum ob intrusum calorem in BC ad incrementum ob intrusum calorem in AB est, vt capacitas huiusmodi incrementi in eadem BC ad capacitatem incrementi in AB, iuxta certum intensionis gradum; sed capacitas incrementi prædicti in BC ad incrementi capacitatem in AB secundùm certum intensionis gradum, est vt BC ad AB; ergo incrementum ob intrusum calorem in BC, ad incrementum ob intrusum calorem in AB, erit vt BC ad AB; sed vt incrementum ob intrusum calorem in BC ad incrementum ob intrusum calorem in AB, ita est incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB; ergo vt BC ad AB, ita incrementum ex rarefactione in BC ad incrementum ex rarefactione in AB; ergo permutando, vt BC ad incrementum ex rarefactione in BC, ita AB ad incrementum ex rarefactione in AB; & componendo vt BC plus incremento ex rarefactione in BC, ad incrementum; ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad incrementum: & per conuersionem rationis, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC ad BC, ita AB plus incremento ex rarefactione in AB ad AB; ergo permutando, vt BC plus incremento ex rarefactione in BC, ad AB plus incremento ex rarefactione in AB, ita BC ad AB. Figura igitur contenta sub BC plus incremento prædicto, & AB plus prædicto incremento similis est figuræ sub BC, & AB, sed illa est post rarefactionem, hæc verò antea; ergo figura post rarefactionem, æquè inuadente calore, similis est figuræ ante rarefactionem. Quod oportebat ostendere.

Quæ autem diximus de anulo æneo iniecto in ignem per calorem alterato, experti quoque sumus in anulis ligneis infusis in humidum, vnde nobis innotuit dilatationem quoque fieri in concaua superficie. Erant autem anuli ex buxo, qui trium dierum spatio in aqua detenti fuerunt, vt inde plurimum humoris attraherent; quorum vnus fibris constabat perpendicularibus basi, alter autem eidem parallelis. Vterque dilatationem subijt, hoc intercedente discrimine, quòd primus antiquam retinuit figuram circularem, & coni trunco applicatus multùm descendit infra terminum, quem antea aridus sibi præscripserat: secundus verò ad ellipticam figuram deflexit, vnde applicatus eidem coni trunco ægrè descendere poterat.

Quæ de anulo æneo dicta sunt. Author expertus est in annulis ligneis iniectis in humidum.

Multos hac experimentũ vexauit. Conturbabantur autem mordicus tuentes omnia alterari à natura per qualitates sine appulsu particularum, siue corpusculorum, quorum aggeries constituit effluuium. Non enim ipsis hæc videbantur admodum propriæ sententiæ accommodata, secus verò cautiùs pbilosophantibus nobis; cùm vtriusque symptomatis causam communem esse, simùlque vtroquo experimento perbellè sententiam nostram confirmari aduerteremus. Vtrobique siquidem contingit particularum intrusio, siue anulus æneus iniectus in ignem fuerit, siue ligneus in aquam: vnde duo hæc contraria, licet in diuersis subiectis ad similes effectus conspirantia, notauimus.

Ex accidenti potest id secus euenire, vt in funibus. Hæc autem intelligenda sunt per se, eùm ex accidenti secus euenire nihil prohibeat; si enim calor æquè inuaderet funem, non contingeret incrementum ad eum, quem diximus modum; funis enim adauctus non foret sibi similis, sed plus excresceret secundùm longitudinem; nam humido perfusus excrescit secundùm crassitiem, secundùm longitudinem decrescens: at verò si calefieret extruso humido, quamuis æquè eum inuadente calore, gracilior fieret longitudine adauctus, quod ipsius funis texturæ debet acceptum referri; siquidem ea est ex pluribus, pluribusque spiris, vnde fit, vt pro ratione istarum modo iam dicto debeat incrementum suscipere, quod Geometricè ostendi facilè posset. Imaginandum est enim singulas helices, siue mauis spiras, quibus funis contexitur, atque compaginatur, per intrusas particulas dum dilatantur, quasi crassiorem cylindrum amplectentes coarctari debere; spirarum autem coarctatio, funis est decurtatio; exeuntibus verò iisdem particulis humidis spirarum earundem longitudines constrictæ, quasi graciliorem cylindrum amplectentes distenduntur; harum autem elongatio, funis quoque elongatio est.

Item in musculis. Musculorum in animalis corpore structura, eandem conditionem sortitur; nam per intrusas particulas spirituosæ substantiæ dum dilatantur, musculi non elongantur, sed contrahuntur, vnde motus contractionis subsequitur.

Monitum.

Ex hactenus dictis memento magnitudinem adauctam similem esse sibimet non adauctæ.

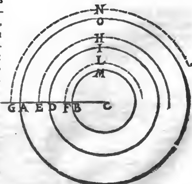
His suppositis, id quod sequitur demonstrabitur.

Exemplum XXXXV.

THEOREMA.

Si magnitudo aliqua alteratione suscipiat incrementum, dum augetur terminus vnus modo iam dicto, augentur & reliqui.

Sit e. g. figura comprehensa duabus peripherijs AO, BM concentricis, quorum centrum sit C; ducatur ex C recta CG occurrens peripherijs iam dictis in punctis B,A; alteratione suscipiat incrementum, diuidatur AB bifariam in D, & centro C, interuallo CD describatur circumferentia DI; Supponamus autem alteratione circumferentiam DI adauctam esse vsque ad circumferentiam EH.

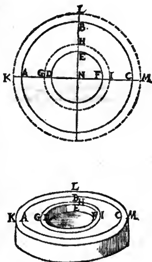


a Ex superiori cautela. Quoniam verò figura adaucta similis est figuræ non adauctæ, erit a vt circumferentia DI ad latitudinem AB, ita circumferentia EH ad latitudinem suam, ea verò sit GF, & centro C, interuallo CG descripta sit circumferentia GN, & centro eodem interuallo CF descripta sit circumferentia FL; ob similitudinem igitur erit, vt DB ad DI, ita EF ad EH, & vt DI ad AD, ita EH ad GE; ergo ex æquali vt DB ad DA.

DA, ita EF ad EG, sed DB æqualis est AD; ergo, & EF æquabitur GE. Quoniã verò anularis figura adaucta, comprehensa circumferentijs GN, FL, similis esse debet ei, quæ comprehenditur circumferentijs AO, BM, propterea, vt latitudo GF ad circumferentiam EH, ita latitudo AB ad circumferentiam DI, & vt latitudo GF ad latitudinem AB, ita circumferentia GN ad circumferentiam AO, & sic de omnibus alijs circumferentijs transeuntibus per puncta latitudinis GF, in quibus ipsa GF diuisa est proportionaliter, vt AB in punctis suis, per quæ transeunt aliæ circumferentiæ; itaque tandem vt GF ad FL, ita AB ad BM, & permutando, vt GF ad AB, ita FL ad BM, sed GF maior est, quàm AB; ergo & FL maior erit, quàm BM; adaucta igitur circumferentia DI vsque ad EH, & latitudo AB euadat tanta, quanta est GF, & circumferentia AO augebitur, vsque ad GN, & etiam BM augebitur vsque ad FL; quare si circumferentia AO augetur, etiam circumferentia BM augebitur. Quod oportebat ostendere.

THEOREMA.

Si solidum aliquod sit anulare, & agente calore æquè in singulas eius partes rarefiat, acquiret mensuras maiores in ratione, quam prius habebat, & latius fiet secundùm intimam superficiem. Exemplum XXXXXVI.



Sit Solidum anulare ABCDEF, in cuius singulas partes æquè agente calido, rarefiat. Dico solidum illud rarefactum secundùm intimam superficiem anularem latius esse. Intelligantur omnes circumferentiæ extensæ, vt ampliùs extendi non possint; Sic enim erunt lineæ rectæ, & in demonstratione, quam subijciemus, intelligatur facta comparatio rectæ mensuræ solidi anuli cùm circumferentijs extensis, vt ampliùs extendi non possint. Quandoquidem solidum rarefactum calore æque inuadente singulas eius partes, acquirit maiores mensuras, in ratione, qua ab initio; ac proinde illi debet simile esse; ob id ratio mensuræ FC, ad totam circumferentiam intimam FEDF; eadem esse debet in solido anulari rarefacto, quæ ex hypothesi sit descripta ipsa IHGI. Itemq; ratio mensuræ FC, ad extimum circulum CBAC rarefactum atq; adeò extensum vsq; ad extimum circulum MLKM. Quoniam igitur, vt est FC mensura latitudinis anuli ante rarefactionem ad circulum extimum CBAC; ita debet esse mensura latitudinis anuli rarefacti, ad extimum circulum MLKM; At vero FM, ad MLKM maiorem habet rationem, quàm FC, ad extremum circulum CBAC; proinde mensura latitudinis circuli anuli rarefacti, minor esse debet, quàm FM. Et Rursus; quoniam, vt FC mensura latitudinis circuli ante rarefactionem, ad intimum circulum FEDF, ita debet esse mensura latitudinis anuli rarefacti, ad intimum circulum eiusdem; Est autem, ratio FM, ad intimum circulum FEDF maior, quàm ratio FC, ad eundem circulum intimum FEDF, proinde latitudo circuli anuli rarefacti minor erit, quàm FM, & circũferẽtia IHGI intima circuli rarefacti maior erit circũferẽtiã FEDF; ex hypothesi verò anulus extenditur vsq; ad MLKM, ergo circulus intimus anuli rarefacti transibit per pũcta inter F, M, u.g. per I; & inter E, L, vt per H, & inter K, D, ex: gr. per G. Est ergo circulus GHI latior circulo DEF. Quod oportebat ostendere.

Quòd autem FM, ad MLKM maiorem habeat rationem, quàm FC, ad CBAC, sic demonstrabimus. Nam quòd FM, ad FEDF maiorem habeat rationem, quàm FC, ad FEDF, apertè constat ex 8. quinti. Illud igitur sic ostendemus.

In-

C D

A I B

G H

E L K F

Intelligatur continuata femidiameter vsq; ad circuli centrum N in superiori figura, & in adiuncto diagrammate sit AB æqualis semidiametro NM, & CD sit circumferentia MLKM extensa quidem, vt amplius extendi non possit; deinde EF sit æqualis semidiametro NC, & GH sit circumferentia CBAC extensa, vt amplius extendi non possit. Ex AB secetur AI segmentum æquale ipsi semidiametro NF; & etiam ex EF, secetur Ek eidem æquale. Erit propterea IB æqualis FM, & kF æqualis FC. Si igitur ostenderimus IB ad CD in adiuncto schemate maiorem habere rationem, quàm kF ad GH ostensum erit, quod erat operæ pretium. Quoniam igitur est ex hypothesi, vt AB ad CD, ita EF, ad GH. Intelligatur iam esse vt BI, ad IA; ita FL, ad LE: (cadet autem punctum L inter E, & k, vt in-
a 18. quinti. feriùs ostendemus). Quoniam igitur est vt BI, ad IA, ita FL ad LE, erit [a] componendo, vt BA, ad AI, ita FE, ad EL; vt verò CD, ad AB, ita ex hypothesi est GH ad EF, quamobrem
b 22. quinti. ex æquo erit, [b] vt CD, ad AI, ita GH, ad EL; sed vt AI, ad IB, ita est ex constructione EL,
c 22. quinti. ad LF, ergo ex æquo rursus erit, [c] vt CD, ad IB ita GH, ad LF; & conuertendo, [d] vt IB, ad
d cor. 4. quinti. CD, ita LF, ad GH. Sed LF, ad GH maiorem habet rationem, [e] quàm KF, ad eandem GH,
e 8. quinti. ergo, & IB, ad CD maiorem habebit rationem, quàm KF, ad GH.

Quod autem punctum L cadere debeat inter E,K, sic facilè ostenditur. Quoniam enim est AI æqualis EK; & AB maior, quàm EF. Si ab AB; & EF auferantur æquales AI, EK remanebit IB maior, quàm KF; proinde EK, ad KF maiorem habebit
f 10. quinti. rationem, quàm AI, ad IB. Quare EK maior erit [f] segmento vno ipsius EF, habente ad segmentum alterum rationem, quam habet AI, ad IB; est autem, vt AI ad IB, ita EL, ad LF. Ergo segmentum EK maius erit segmento EL, ac proinde punctum L necessariò cadet inter E,K: Quod &c.

A I B

E L K F

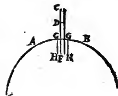
Ad fluida pertinet etiam & illud, quod sequitur.

THEOREMA.

Angusta fistula ex vtroque extremo reclusa immissa in humidum secundùm extremum vnum, per eam humidum ipsum ad certam quandam stationem necessariò ascendet.

In schemate intellige literam E, vbi circumferētia AB, secat fistulam CF. Sit humidum, cuius superficies repræsentetur per AB, sitque fistula FC vitrea; sic enim apparet humidi ascensus per ipsam, ex vtroque extremo F, & C reclusa, immissa in humidum secundùm extremum F, ita vt pars immersa sit FE, extans autem EC. Dico humidum per ipsam intus ascendere debere supra superficiem AB in certa quadam determinata statione quiescens, v.g. D.

Resolutio.



Quoniam itaque fistula FC immissa in humidum secundùm orificium F, per eam ascendit humidum ipsum supra humidi superficiem AB, v.g. ad D, & ibi quiescit, ergo vt humidum intra fistulam CF sit in æquilibrio cum humido GH circumstante, debet esse quidem maioris altitudinis, quàm FE, ergo momentum humidi intra fistulam CF, vt sit æquale momento hu-

midi

midi circumſtantis GH, requirit maiorem altitudinem, quàm FE, ergo momentum humidi FE intra fiſtulam in F, minus erit, quàm momentum humidi GH extra fiſtulam in H. Quod ita ſe habet; humidi enim cylindrus FE intra fiſtulam, ob multiplices contactus ad corpus conſiſtens in anguſtia fiſtulæ, vbi includitur, minus habet momentum, quàm humidum circumſtans GH, eiuſdem altitudinis, & eiuſdem rationis extra fiſtulam.

Compoſitio.

QVoniam humidi cylindrus FE intra fiſtulam, ob multiplices contactus ad corpus conſiſtens in anguſtia fiſtulæ, vbi includitur, minus habet momentum, quàm humidum circumſtans GH, eiuſdem altitudinis, & eiuſdem rationis; extra fiſtulam ergo momentum humidi FE, intra fiſtulam in F, minus erit, quàm momentum humidi GH extra fiſtulam in H; ergo momentum humidi intra fiſtulam CF, vt ſit æquale momento humidi circumſtantis GH, requirit humidi maiorem altitudinem, quàm FE; ergo vt humidum intra fiſtulam CF, ſit in æquilibrio cum humido GH circumſtanti, debet eſſe quidem maioris altitudinis, quàm FE, ergo fiſtula FC immiſſa in humidum AB ſecundùm orificium F, per eam aſcendit humidum ſupra ſui ſuperficiem AB, e.g. ad D, & ibi quieſcit.

Alia Reſolutio.

Exemplum LVII.

Intelligatur ſuperficies HH concentrica ipſi AB.

QVoniam humidum aſcendit per fiſtulam FC; ergo humidum circumſtans deſcendit, ergo humidum per fiſtulam FC expellitur ab humido circumſtanti; ergo minus eſt preſſa ſuperficies HH ad F orificium fiſtulæ, quàm in H; ergo minus eſt momentum FE in F, quàm GH in H. Quod ita ſe habet; humidum enim FE intra fiſtulam, minus habet momentum in F, ob multiplices contactus cum corpore conſiſtente, quàm GH extra fiſtulam in H.

Compoſitio.

QVoniam humidum FE intra fiſtulam minus habet momentum in F, ob multiplices contactus cum corpore conſiſtente, quàm GH extra fiſtulam in H; ergo momentum humidi FE intra fiſtulam in F minus eſt, quàm momentum humidi GH extra fiſtulam in H; ergo minus eſt preſſa ſuperficies HH ad fiſtulæ orificium F, quàm ad H; ergo humidum per fiſtulam FC expelletur ab humido circumſtanti; ergo humidum circumſtans deſcendit; ergo humidum aſcendit per fiſtulam FC. Quod &c.

Quoniam verò expulſio eſt finita, propterea etiam aſcenſus finitus erit; ergo humidum ipſum per fiſtulam iam dictam aſcendet ad determinatam ſtationem.

SCHOLION.

Aduerte ex accidenti contingere poſſe, vt humidum non aſcendat, quia nimio lentore impeditur; & quia fortè tanta grauitas eſt, vt non admittat compenſationem contactus cum grauitate.

Redeuntes itaque ad ea, quæ humido inſident, non prætoribimus, quod in re, de qua agimus, eſt magnoperè conſiderandum, videlicet, dum ſupra dicebamus humidum mole æquale ſolidæ magnitudinis parti, eiuſdem eſſe grauitatis cum ipſa magnitudine, & alia huiuſmodi, id intelligendum eſſe, vt exploratio grauitatis fiat, huiuſmodi corpora ponderando in eodem medio; eam ob cauſam, quoniam ſolidæ magnitudines humido grauiores, in ipſo humido tanto ſunt leuiores, quanta eſt grauitas humidi molem habentis ſolidæ magnitudini æqualem. Itaque ad ipſa ſolida libranda, vt videlicet inde eorum pondera innoteſcant, idem oportet adhibere medium; hoc enim pacto proportionaliter adimitur ijs grauitatis

Explicatio multorum, quæ facient in primis ad inſtitutum.

graui-

grauitas; quod omninò ad explorandam grauitatem eorum requiritur; non enim benè institueretur libratio ponderum, si vnum eorum in aere, aliud autem in aqua foret; quoniam plus adimit de grauitate aqua, quàm aer; vt igitur duo grauia, nobis constet æquè ponderare, seù duo corpora æqualis esse ponderis, vtrunque debet, vel in vacuo, vel in aere, vel in aliquo alio fluido, in quo illa descendant, esse constituta.

Libratio vel per descēsum, vel per ascensum.

Non est autem alienum ab instituto obseruare, quod non est exigui momenti, nimirùm librationem institui posse, vel per descensum, vel per ascensum, de primo hactenus: de secundo pauca subijciam.

Supponamus Libram esse ligneam, eamque constitutam esse infra aquam, qua lignum est leuius: sit autem trutina ipsius infixa fundo vasis, vbi aqua: manifestum est, si ad extremitates lancium, seu brachiorum ipsius Libræ fuerint alligata solida humido leuiora, eiusdem grauitatis in specie, eiusdem molis, eiusdemque figuræ, æquali impetu sursum ascensura, atque adeò in bilance fieri æquilibrium, quòd si vnum mole fuerit maius altero, quod est maius, maiori impetu sursùm ascensurum esse, atque idem euenturum quoq; in libratione per descensum, dum videlicet ex vna parte bilancis fuerit constitutum pondus maioris grauitatis absolutę: adeò vt in ascensu, quod est maioris molis, etsi eiusdem grauitatis in specie, quod maioris est grauitatis absolutę, maiori impetu sursùm feratur. Vt igitur, si fuerint duo corpora lignea ponderis inæqualis, quod est maioris ponderis descendit, vni ex brachijs bilancis appensum, quodque minoris est ponderis, eleuatur, dum libratio fit in fluido leuiori, puta aere; ita contra, quod maioris est ponderis, in fluido grauiori ascendit, quodque minoris est ponderis descendit, dum scilicet vtrunque fuerit extremis lancium bilancis, vnum vni, alterum alteri alligatum, in fluido grauiori in specie.

Figura non facit ad momentum grauitatis, sed ad celeritatem motus.

Obseruandum tamen est, à nobis commemoratam fuisse figuram, non quasi hæc faciat ad momentum grauitatis in ijs, quæ sunt humido grauiora, itemque leuiora; sed quia habet se veluti conditio ad faciliùs scindendum medium: atque adeò conducit ad velocitatem descensus, aut ascensus. Est enim delirantium somnium, humidum, seu fluidum, cuiusmodi est aqua, nullam habere resistentiam ad diuisionem.

Corpora siquidem generis eiusdem, eiusdemque grauitatis, grauiora, quàm humidum, & sibi similia, æqualem in humido grauitatem habent. Quòd si vnum velociùs descendit, quàm alterum, potest id figuræ acceptum referri: inde tamen non licet maiorem grauitatem inferre. Ita fit, vt idem corpus segniùs, vel velociùs descendere possit per quodcunque humidū, e.g. per aerem, quando scilicet humido grauius fuerit, prout videlicet ipsum in humidum fuerit immissum, constans figura irregulari, nimirum gracili, & oblonga secundùm vnam dimensionem, & lata secundùm alteram; nam si descendat immissum secundùm latitudinem, segniùs; at si secundùm gracilem, & oblongam dimensionem, celeriùs descendet. Id autem de ascensu quoque intelligendum omninò.

Supradicta de libratione faciant etiam ad descensus celeritatem.

Cæterum supradicta de libratione in eodem medio &c. faciunt etiam suo modo ad descensus celeritatem. Illud tamen discriminis intercedit, quòd in libratione grauius ipsum præponderat; si enim fuerint æqualis grauitatis in specie, vt se habet moles ad molem, ita grauitas ad grauitatem; si igitur mole est maius, ita etiam & grauitate, at quæ æquè grauia sunt æquè ponderant; quod autem grauius præponderat. Sed non ob eam causam, quia præponderet quod est grauius, existimandum est celeriùs descensurum, cùm vtrunque ex quiete descendit; quod enim grauius est altero, est etiam eò maius, supposita eadem grauitate in specie; quoties igitur moles in mole continetur, toties grauitas in grauitate; perinde est igitur, ac si plura corpora æqualis molis, & grauitatis sumpta fuerint, ita vt vno relicto reliqua fuerint coniuncta, & illud, & hoc aggregatum eodem momento incipiant descendere; vt enim hæc omnia disiunctim æquè velociter descendissent cum eo, quod seorsùm descendere supponitur, ita etiam coniuncta, remotis impedimentis, videlicet medij resistentia &c; coniunctio siquidem nihil addit, nihilque detrahit. Vnde si sint corpora plumbea, quorum vnum ponderet decem, alterum autem mille, æquè velociter in vacuo descenderent; at in pleno, si quid discriminis est, id oritur à resistentia medij; nam si corpora fuerint eiusdem grauitatis in specie, proportionaliter quidem fit ipsis detractio grauitatis; nam hæc fit pro ratione grauitatis partis ipsius medij, quæ mole sit æqualis corpori descendenti; vnde quemadmodum se habet grauitas aeris mole æqualis plumbo mille librarum ad grauitatem aeris mole æqualis plumbo decem librarum, ita se habet pondus mille li-

brarum

brarum ad pondus decem librarum; sed si fuerit ablatum ad ablatum, nempè pondus aeris ad pondus aeris, vt totum ad totum, scilicet vt plumbum ad plumbum, etiam reliquum ad reliquum; hoc est id, quod retinet de grauitate pondus mille librarum ad pondus id, quod retinet de grauitate decem librarum plumbi, vt totum ad totum se habebit; facta detractione iam dicta per grauitatem aeris, quem vnà cum plumbo suppono librari in vacuo, & grauia ipsa descendere per aerem; Cùm autem grauitas sit instrumētū quo Natura vtitur in descensu grauium, propterea, vt hæc æquè velociter in vacuo descenderent, ita etiā in pleno: obstat tamē resistentia medij, quæ attendi debet, & penes superficiei partē corporis descendentis, partem, inquam, cui subiectū mediū occurrit resistens, & partim etiam penes modū, quo occurrit, vel scilicet ad angulos rectos, vel obliquos; nam si foret, vt graue ad graue, ita illa superficiei pars iā dicta vnius corporis ad superficiei partē alterius corporis, æquè velociter descendere deberent supposita grauium eadē grauitate in specie. At si subiectū mediū eodē modo vtrique occurrat, nēpè ad rectos angulos, ita vt vtraque superficies, cùm plana fuerit, vtrique etiā cylindri ex medij substātia ad rectos āgulos occurrere intelligātur; quod si vna fuerit plana, altera autem etsi illi æqualis, gibba, conica, vel in duas partes diuisa, ita vt hæ mutuò sibi occurrāt, se seque interscent in vna, eadéq; linea recta, variabitur ratio resistentiæ; nāque superficiei planæ fit resistentia ad angulos rectos, at vero huic fit resistētia ad angulos obliquos, quæ minor est illa: ita fit vt parallelepipedum humido grauius difficiliùs descendat, e.g. per ipsum humidum, quàm si eadem moles constauerit figura acuminata, vel si eadem moles immittatur in fluidum secundùm superficiem latiorem, difficiliùs descendet, quàm si immittatur secundùm angustiorē, quod etiā nonauit Philo. lib.4. de Cœlo Tex.45.

At verò si grauia fuerint diuersæ grauitatis in specie, in pleno non fit detractio grauitatis proportionaliter, ita vt reliquum ad reliquum eandem habeat rationem ac totum ad totū, nam si e.g. fuerint duo corpora æqualis molis vnum plumbeum, alterum autem aqueum, & vtrumque descendat per aerem; plumbum ad aquam habet rationem ferè vt $11\frac{1}{2}$, ad 1. aer mole æqualis plūbo ponderet, vt $\frac{1}{2}$, plūbo detrahitur grauitatis vt $\frac{1}{2}$, & remanēt vndecim pro grauitate ipsius, aquæ autem detrahitur grauitas, vt $\frac{1}{2}$, & remanet $\frac{1}{2}$ pro grauitate ipsius: non est autem vt $11\frac{1}{2}$ ad 1. ita 11. ad $\frac{1}{2}$. Vnde nequeunt descendere æquè velociter in pleno, in vacuo tamen pari velocitate ferentur. *Aduertenda quædam.*

Aer mole æqualis aquæ ponderabit id, quod exprimitur per fractionem cuius numerator est 1, denominator autem 1177; quo detracto ex 1, fit reliquum expressum per fractionem, cuius numerator est 1176, denominator autem 1177; detracto verò ex 11, cum dimidio, fit reliquum 11, cum fractione, cuius numerator est 1175, denominator autem 2354. Non est porrò, vt 11, cum dimidio ad 1, ita 11, cum fractione, cuius numerator est 1175, denominator verò 2354, ad fractionem, cuius numerator 1176, denominator verò 1177. Itaque detractio grauitatis non fit proportionaliter, vt dictum fuit.

Iuuat autem hìc adnotasse ad descensus maiorem velocitatem non sufficere, quod graue ad graue maiorem habeat rationem, quàm superficies ad superficiem mobilis, etiamsi solùm ea attendatur, quæ est attendendam, nempe totius superficiei grauis descendentis pars, cui subiectum mediū occurrit ac obuium fit resistens. Sed insuper attendere quoque oportet modum occursus, an videlicet fiat secundùm angulos obliquos, an verò secundùm angulos rectos; id enim magni refert in re, proposita. Agedum redeamus vnde discessimus; & de aeris ponderatione, rationeq; grauitatis ipsius ad grauitatem aquæ, pauca quædam in medium adducamus. *Notāda quædam de acceleratione maioris descensus.*

Videtur Keplerus rem non benè explicasse: nam reuera, vt experimento nobis comprobatum fuit; si aeris moles ponderat vnum, loquendo de illo, quem inspiramus, eadem cùm fuerit aquæ ponderabit 1177. At vt est grauitas ad grauitatem, ita densitas ad densitatem, & contra. Is autem putat rationem densitatis collectam ex refractionibus, ex æthere in aerem. & ex aere in aquam, esse, vt 1, ad $1177\frac{1}{2}$, & quidem in linea recta: ex vtroque proportionis termino, effecto cubo, existimat colligi rationem, quæ inter 1, & 1533304682, addens, Non dubiū si quis in puro æthere consisteret, funderetq; hinc vnum cyathum aquæ, inde 15. myriades myriadum cyathorum aeris, quin hæc æquiponderatura sint, & in cameræ, seu cubo duodecim pedes longo, lato, & alto non plus inesse materiæ cùm aere illo purissimo, qui ætheri contiguus est plenus est, quàm in cubisco aquæ, qui patet per octauam partem pollicis in omnes dimensiones. At alibi dixerat, toties tenuiorem *Kepleri deceptio.*

Z esse

esse aerem aqua, & æther aere, decies centies millies: vnde nec etiam sibi videtur constare. Modus autem consequendi rationem ponderis inter aerem, & aquam, hic vnus est. Sumpsimus sphæricum vas plumbeum vndique clausum, aere repletum, quod cùm demissum in aquam non demergeretur, cùm scilicet plumbea cortex foret modicæ crassitiei, propterea additū fuit tantū plumbi, vt fieret demersio, eius autem pondus inquisitum fuit in aere repertumque librarum 4. vnc. 6. den. 4., & gran. 16. hoc est gran. 31216. Eadem ponderatio facta fuit in aqua, repertumque est pondus librarum 0. vnc. 7. den. 10. hoc est omnibus ad grana redactis gran. 4272; operationis autem progressus est vt sequitur.

Modus explorandi Aeris grauitatem.

Pondus molis plumbeæ pilæ non compressæ, vnà cum plumbo addito, vt fieret immersio &c. pondus inquam in aere.	Lib. 4.	6.	4.	16.
Pondus eiusdem aggregati, in aqua.	Lib. 0.	7.	10.	
Differentia Pondus molis aquæ æqualis prædicto aggregato.	Lib. 3.	10.	18.	16.
Duæ vigesimæ tertiæ partes librarum 4. 6. 4. 16. auferendæ pro aqua respondente moli ipsius plumbi.	Lib. 0.	4.	17.	$2\frac{10}{23}$
Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ non compressæ.	Lib. 3.	6.	1.	$13\frac{13}{23}$
Pondus pilæ plūbeæ compressæ, vna cū plumbo addito in aere.	Lib. 4.	6.	4.	23.
Pondus pilæ compressæ, cum addito plumbo, in aqua.	Lib. 1.	9.	17.	14.
Differentia Pondus molis aquæ æqualis prædicto aggregato.	Lib. 2.	8.	11.	9.
Duæ vigesimæ tertiæ partes librarum 4. 6. 4. 16. vt supra auferendę &c.	Lib. 0.	4.	17.	$2\frac{10}{23}$
Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ compressæ.	Lib. 2.	3.	18.	$6\frac{13}{23}$
Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ non compressæ.	Lib. 3.	6.	1.	$13\frac{13}{23}$
Pondus molis aquæ æqualis capacitati pilæ compressæ.	Lib. 2.	3.	18.	$6\frac{13}{23}$
Pondus aquæ mole æqualis aeri, cuius pondus erat gran. 7. illudque fuit inuentum, subtracto pondere pilæ non compressæ, & ponderatæ in aere, cuius pondus erat lib. 2. 11. 7. 6. à pondere eiusdem pilæ compressæ 2. 11. 7. 13. horum enim differentia est 7. Pilæ autem fuerunt ponderatæ in aere sine addito plumbo, quoniam hoc non erat opus.	Lib. 1.	2.	7.	7.

Quod si illud adhibere placet, pondus pilæ non compressæ cum plumbo, erit Lib. 4. 6. 4. 16. cùm plumbum additum esset 1. 6. 21. 10. At compressæ pondus cum plumbo addito erat Lib. 4. 6. 4. 23. horum autem differentia est itidem 7. at verò lib. 1. 2. 7. 7. valet grana 8239. itaque moles aeris, quæ ponderat 7. cùm fuerit aquæ ponderabit 8239. Ratio igitur aeris ad aquam, est vt 7. ad 8239. omnibus diuisis per 7. erit vt vnum ad 1177.

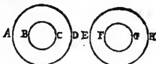
Vel pondus pilæ cum addito plumbo, in aere.	Lib. 4.	6.	4.	16.
Pondus aquæ æqualis mole prædicto aggregato.	Lib. 3.	10.	18.	16.
Aggregatum.	Lib. 8.	4.	22.	32.
Pondus pilæ cum addito plumbo compressæ considerato tantum pondere ipsius plumbi.	Lib. 4.	6.	4.	16.
Pondus aquæ mole æqualis prædicto aggregato.	Lib. 2.	8.	11.	9.
Aggregatum.	Lib. 7.	2.	15.	25.
Aggregatum primum.	Lib. 8.	4.	22.	32.
Aggregatum secundum.	Lib. 7.	2.	15.	25.
Differentia, & pondus aquæ mole æqualis moli aeris cū plūbo.	Lib. 1.	2.	7.	7.
Pondus aeris.	Lib. 0.	0.	0.	7.
Vel pondus aquæ æqualis mole pilæ non compressæ addito plūbo, causa submersionis &c.	Lib. 3.	10.	18.	16.
Pondus aquæ mole æqualis pilæ compressæ addito plumbo.	Lib. 2.	8.	11.	
Differentia, & pondus aquæ mole æqualis aeri, cuius pondus fuerat gran. 7.	Lib. 1.	2.	7.	7.

SCHO-

SCHOLION.

Aduertendum est autem, ideò detrahi duas vigesimas tertias partes, vt dictum est, duas inquam vigesimas tertias partes librarum 4. 6. 4. 16. quoniam grauitas plumbi ad grauitatem aquæ est in ratione, vt 11$\frac{1}{2}$ ad 1. fiat igitur vt 11$\frac{1}{2}$ ad 1. ita 31216 ad aliud, illudque erit $\frac{62432}{23}$ hoc est 2714$\frac{10}{23}$ si autem 2714. quæ sunt grana diuidamus per 24. prouenient 113. den. & 2. gran. si verò 113. diuidamus per 24. fiet quotiens vnc. 4. & den. 17. vnde integer quotiens erit vnc. 4. den. 17. & gran. 2$\frac{10}{23}$. *Notanda quædam.*

Supradictorum Theoria.



Quæ hactenus dicta sunt, sic ostenduntur. Sint pilæ, quarum vna AD, altera verò EH mole quidem æquales. Intelligatur AD plena aqua, cuius pondus sit lib. 3. 6. 1. 13.$\frac{11}{23}$. Intelligatur redacta ad paruitatem BC, tantæ capacitatis, vt contineat aquæ libras 2. 3. 18. 7.$\frac{11}{23}$.

Intelligatur pila EH plena aere, quæ ponderata in aere non habet nisi pondus continentis; aer intus inclusus nihil in aere ponderat: intelligatur compressa ad paruitatem sphæræ FG tantæ capacitatis quantæ est BC; aer autem contentus in EH pila maiori redactus sit in parua pila FG Manifestum est interstitium inter pilam AD, & pilam BC, futurum æquale interstitio inter EH, & FG, itaque moles aquæ contentæ in interstitio priorum pilarum erit æqualis moli aeris contenti in interstitio secundarum pilarum: hic autem aer compactus in FG fuit ponderis granorum 7. estque differentia aeris contenti intra pilam FG, & EH, seu est pondus aeris contenti in interstitio pilarum EH, FG *. At verò differentia ponderis aquæ contentæ in pila AD maiori lib. 3. 6. 1. 13$\frac{11}{23}$ à pondere aquæ contentæ in pila minori BC lib. 2. 3. 18. 13$\frac{11}{23}$. differentia inquam est lib. 1. 2. 7. 7. itaque pondus aquæ in prædicto interstitio est lib. 1. 2. 7. 7; pondus aeris in æquali interstitio est gran. 7; Ergo ratio ponderis ad aquæ pondus est, vt 7. ad vnc. 14. 7. 7. omnibusque redactis ad grana, vt 7. ad 8239. hoc est, vt 1. ad 1177.

* *qui enim erat in FG perinde est ac id cui fit additio in æquilibrio &c.*

Hìc tamen non dissimulabo errorem commissum ab illo experimentorum compilatore, qui in huius experimenti historia fecit aerem non compressum grauiorem compresso, oblitus eorum, quæ docuit Galilæus, & iampridem Aristoteles. Quod ex eo planè cuique constabit aduertenti, longè difficilius impelli deorsum cyatum inuersum, in humidum initio quàm postea immersionis decursu; eam ob causam, quia aer intra cyatum incipit constipari ab humido subtus occurrente cyato deorsum propulso; tunc autem factum cum sit tantum corpus grauius in specie, non resistit prementis manui; vnde nulla in immersioni progressu resistentia percipitur. *Error commissus à quodam in aeris ponderatione.*



Auctoris modus alter explorandi aeris grauitatem.

Sit instrumentum ADBC vitreum, quod repletum sit hydrargyro; deinde superimposito digito orificio A, inuerso instrumento, vt fieri solet, demergatur orificium prædictum digito clausum in hydrargyrum restagnans vase contentum: mox subtracto digito, permittatur exitus hydrargyro incluso in vase, descendet autem ad stationem F consuetam supra superficiē hydrargyri stagnantis, nimirùm ad altitudinem vnius brachij cum quarta parte: mox verò idem orificium perseuerans immersum, claudatur vesica suina, funiculo scilicet eam firmiter stringendo, vt omnis aeri prohibeatur ingressus, cùm scilicet orificium ipsum aeri fuerit expositum; inuersum autem instrumentum immergatur in aquam: & quoniam contingit, vt grauius sit in specie, quàm aqua; propterea vna, vel duæ, vel plures, si opus fuerit, aptentur vesicæ, quarum duæ in schemate repræsentan- *Aucloris modus peculiaris ad explorandā aeris grauitatem.*

tur per EG, HI aere quidem repletæ, ita vt factâ inuersione extet pars colli instrumenti, e.g. KA; insuper addito pondere, sc. annulis quibusdam ex metallo, superimpositis collo, ita vt hoc illos ingrediatur, descendentes vsque ad ligaturam vesicarum EH, adgrauantes tantùm, vt apex colli A descendat ad aquæ superficiem; quod, vt meliùs cognoscamus, aptanda est summitati cuspis quædam peracuta, ita vt obseruandum sit tantam fuisse factam ponderis additionem, quantum requiritur ad immersionē vsque ad acumen illius cuspidis: mox autem perforetur vesica, atque aditus permittatur aeri, manifestum est per huiusmodi ingressum instrumentum magis immersum iri. Notetur igitur quantum ponderis est auferendum ex supra imposito, illudque seruetur,

Explicationis continuatio. Deinde vas repleatur vsque ad orificium aquâ, relicto hydrargyro, vt priùs, & iterum claudatur orificium, superimposita eadem cuspide ad immersionem obseruandam, videatur quantum ponderis auferendum sit, vt eadem immersio, eodemque modo contingat; hoc autem pondus conferatur cum supra seruato; nam si illud fuerit gran. 7. hoc erit 8239. ergo grauitas aeris ad grauitatem aquæ rationem habebit, vt 7. ad 8239. hoc est, vt 1. ad 1177. vt priùs: sunt enim eiusdem molis.

THEOREMA.

Exemplum LVIII.

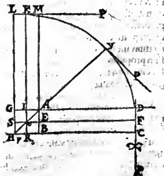
Si rei stabili prisma fuerit horizontaliter infixum, ad cuius extremum graue fuerit appensum. Dico potentiam, qua resistit fractioni, ad graue reciprocè esse, vt longitudo prismatis, ad semi-altitudinem eiusdem.

Sit prisma HGDC, cuius pars HGAB, sit rei stabili, v.g. parieti, quidem infixa: pars verò ADCB sit extra; sit autem graue X appensum ad extremum C, ita vt momentum resistentiæ in AB (hic enim frangeretur, si frangi deberet) æquale sit momento grauis X appensi ad C; diuisa sit AB bifariam in E.

Dico graue X ad resistentiam in AB reciprocè se habere, vt EB ad BC.

Intelligatur erectum prisma perpendiculariter ad horizontem, vt HLMB, cuius pars HGAB, sit terræ infixa, diuisaque GA bifariam in I, sitque potentia P æquipollens graui X, & eadem potentia P applicata ad M.

Resolutio.



QVoniam igitur resistentia æquè diffusa per AB ad graue X, est vt BC ad BE: sed loco grauis X intelligi potest potentia P applicata ad C; ergo ratio resistentiæ æquè diffusæ per AB ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC ad BE; sed loco resistentiæ æquè diffusæ per AB, intelligi potest [a] potentia resistens, cuius momentum in E; ergo potentia resistens, cuius momentum in E, ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC ad BE; sed si potentiæ resistentis momentum in E, æquipollet potentiæ P applicatæ ad C, eidem æquipollet etiam idem potentiæ resistentis momentum in R; BE, BR existentibus æqualibus, vt ostendetur; [b] ergo potentia resistens, cuius momentum in R ad eandem potentiam applicatam ad C, erit reciprocè, vt BC ad BR, seu potentia resistens, cuius momentū in I, ad ipsam potētiā P applicatam ad D erit reciprocè, vt AD ad AI; (idem est enim momentum in I, ac in R, & vt AD ad AI, ita BC ad BR) ergo potentiæ resistentis momentum in I, atque adeò [c] resistētia æquè diffusa per GA æquipollens [d] potentiæ P applicatæ ad M, æquipollet etiam momento eiusdem potentiæ applicatæ ad D. Quod ita se habet; ex Elementis.

[a] Coroll. 1. lemmatis 1.

[b] Lemma primum.

[c] Coroll. 1. lemma 1.
[d] ex infrapositis.

Lemma Primum.

Si fuerit vectis AC, cuius hypomoclion B, sitque ad extremum A applicata potentia P, & ad extremum C, applicata potentia Q, ita vt earum momenta sint aqualia. Exemplum LIX.

Dico si vectis inflectatur in B ad quoscunque angulos CBD, CBE, CBF &c. dummodo potentia P, eodem modo fuerit applicata, quo applicata est ad extremum A, momenta ad extrema D, E, F &c. applicata potentia, aqualia esse momento eiusdem potentia applicata ad extremum A.

Resolutio.

Quoniam igitur potentia applicata ad D æqualis est momenti cum eadem potentia applicatâ ad A, ſuppoſito eodem applicationis modo; ergo potentia applicata ad D æquipollet potentiæ eidem Q applicatę ad C, cui æquiualet eadem potentia applicata ad A, ſecundùm eandem diſtantiæ rationem ab hypomoclio; ſed potentia applicata ad A æquipollet potentiæ applicatæ ad C ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ergo eadem potentia applicata ad D debebit æquipollere potentiæ applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ſed potentia applicata ad D æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BD; ergo eadem erit ratio BC ad BA, quæ BC ad BD; Quod ita ſe habet; ſunt enim AB, BD inter ſe æquales.

Sic de alijs extremis E, F &c.

Compoſitio.

Quoniam igitur AB, BD, ſunt inter ſe æquales; eadem propterea erit ratio BC ad BA, quæ eſt eiuſdem BC, ad BD; ſed potentia applicata ad D æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BD; ergo potentia applicata ad D debebit æquipollere potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ſed eadem potentia applicata ad A, æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, ſecundùm rationem diſtantiæ BC ad BA; ergo potentia applicata ad D æquipollet potentiæ Q applicatæ ad C, cui ęquiualet eadem applicata ad A, ſecundùm eandem diſtantię rationem ab hypomoclio; ergo ſuppoſito eodem applicationis modo potentia applicata ad D ęqualis erit momenti cum eadem applicata ad A.

Sic de alijs extremis E, F &c.

Lemma Secundum.

Si priſma HGDC, fuerit erectum perpendiculare horizonti, vt HLMB, ita vt pars HQAB, qua erat infixa parieti, modo ſit ad rectos angulos infixa terra eodem modo, & loco grauis X, cuius momento aquale eſt momentum reſiſtentia in AB, ſit quadam potentia P, illi aquipollens applicata ſecundùm rectam PM, ad M, extremum priſmatis erecti, fracto priſmate in GA intelligatur ſuperimpoſitum aliquod graue ipſi LM, potentia P aquipollens, diuiſaque GA bifariam in I, & per I cadat perpendicularis KR.

Dico momentum in I, à graui ſuperimpoſito aquale eſſe momento reſiſtentia in GA.

Quo-

Quoniam enim eadem est resistentia in GA, quæ in AB, & potentia P applicata ad M, ex hypothesi æquipollet graui X, cui æquiualet resistentia in AB; ergo resistentia in GA æquipollet potentiæ P applicatæ ad M. At verò si nos intelligamus superimpositum graue aliquod ipsi LM, cuius centrum grauitatis adgrauet per rectam kR, equipollens potentiæ P, etiam fracto prismate in GA, eadem habebitur resistentia, quæ priùs, æquipollens potentiæ P applicatæ ad M; sed superimpositi grauis, cuius centrum grauitatis sit in recta kR, momentum est in eadem, puta in I; ergo momentum huiusmodi resistentiæ in I, fracto prismate, resistens æquipollet potentiæ P applicatæ ad M; sed momentum resistendo æquipollens potentiæ P applicatæ ad M, æquipollet resistentiæ in GA, eiusq; momento est æquale; ergo momentũ in I à graui super imposito, æquale erit momento resistentiæ in GA.

Corollarium Primum.

Hinc perspicuum est momentum in I à graui superimposito substitui posse loco resistentiæ in GA: tàm enim illud, quàm hæc æquipollet potentiæ P applicatæ ad M: atq; adeò absolutè momentum in I, substitui posse loco resistentiæ æquè diffusæ per GA.

Corollarium Secundum.

Hinc etiam intelliges per E ducta SF parallela horizonti, si quemadmodum fuit positum graue super LM, adgrauans per rectam KR, cuius momentum æquipolleret tam potentiæ P applicatæ ad M, quam resistentiæ in GA, ita super DC intelligi, vis quædam potest, premens secundùm rectam FS, itaut æquipolleat graui X, vel potentiæ P applicatæ secundùm rectam PC ad extremum C, ita vt eius momentum in E æquiualeat resistentiæ in AB, atque adeò momentum in E, substitui potest loco resistentiæ æque diffusæ per AB.

Compositio.

α coroll. 1. lē 2.
β ex supra ostensis.

QVoniam igitur resistentia æquè diffusa per GA, atque adeò α potentiæ resistentis momentum in I æquipollens β potentiæ P applicatæ ad M, æquipollet etiam momento eiusdem potentiæ applicatæ ad D, vt ostensum est; ergo potentia resistens, cuius momentum in I ad ipsam potentiam P applicatam ad D, erit reciprocè, vt AD ad AI, seu potentia resistens, cuius momentum in R, ad eandem potentiam applicatam ad C erit reciprocè, vt BC ad BR (idem est enim momentum in I, ac in R, & vt AD ad AI, ita BC ad BR:) sed, vt superiùs ostensum est, γ si potentię resistentis momentum in R, ęquipollet potentię P applicatę ad C, eidem ęquipollet etiam idem potentię resistentis momentum in E; BE, BR existentibus ęqualibus, δ ergo potentia resistens, cuius momentum in E, ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC ad BE. Sed loco potentię resistentis, cuius momentum in E, intelligi potest resistentia ęquè diffusa per AB; ergo ratio resistentię ęquè diffusę per AB, ad potentiam P applicatam ad C, erit vt BC, ad BE: sed loco potentię P applicatę ad C, intelligi potest graue X; ergo resistentia ęquè diffusa per AB, ad graue X, erit reciprocè vt BC ad BE. Sic deprismate inclinat v.g. iucũdũ HY &c. & quod deprismate, idẽ de Cylindro &c.

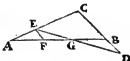
γ lemma 1.
δ coroll. 2. lemmatis 2.

SCHOLION.

Aduertendum est autem, dicendum non esse momentum resistentiæ in AB ad momentum grauis X, esse vt BC ad BE: etenim momenta possunt esse æqualia, etsi distantiæ ab hypomoclio sint inæquales; eritque vt distantia ad distantiam, ita reciprocè graue ad graue momentis æqualibus existentibus: sed potius dicendum, resistentiam in AB ad graue X rationem habere, vt BC ad BE. Non enim graue idem est quod momentum grauis; nec potentia

potentia idem est quod momentum potentiæ: nec resistentia idem quod momentum resistentiæ, quæ planè confundenda non sunt, nec promiscuè vsurpanda, vt cuique, etsi leuiter in Mathematico puluere versato, perspicuum esse potest; Non enim momentum in E ad momentum in C, est vt BC ad BE: siquidem momenta rationem compositam habent ex ratione distantiarum, & grauitatum homologè. Hoc itaque sensu falsissima est propositio; tantum igitur dicere licebit, resistentiam in E ad potentiam in C: seu si mauis, potentiam in E ad potentiam in C esse reciprocè, vt BC ad BE; quo pacto momenta in C, & E erunt æqualia, quæ primo locum habent in vecte extensa, deinde in eadem inflexa.

Cæterum Tractatum hunc de resistentia iam dicta, copiosissimum in Physica nos inseruimus, considerantes prisma illud in triplici positione, vel vt parallelum horizonti, vel vt eleuatum, vel vt inclinatum; præterea secundùm diuersam applicationem virtutis frangentis, de quibus loco citato copiosè disputo, & omnia quantum in me fuit, diligentia sum prosecutus. *Auctor agit in Physica de potentia, qua corpora resistunt fractioni.*



Proponitur Theorema.

Quidam, vt probarent Galilęi illud assumptum, nempè *Gradus velocitatis eiusdem mobilis super diuersas planorum inclinationes acquisiti tunc sunt aquales, cùm earundem planorum eleuationes æquales sunt*; multa dixerunt, quę tamen cum veritate consentire minimè videntur, de quibus paulò infrà sumus acturi. Interim perpendere opus est quid ab ijsdem pronunciatum fuerit de ęquiponderantiâ grauium super planis eandem eleuationem habentibus, in cuius gratiam assumunt, duo grauia simul coniuncta ex se moueri non posse, nisi centrum commune grauitatis ipsorum descendat: quo admisso, quod profectò non est inficiandum, illud enunciant. *Si in planis inæqualiter inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus duo grauia constituantur, quæ inter se eandem homologè rationem habeant quam, longitudines habent planorum. grauia æquale momentum habebunt.* Sed quęso in ipso limine difficultas occurrit; poterat enim id vniuersaliùs enunciari de planis quomodocunq; inclinatis, eandem tamen eleuationem habentibus; sic enim illa demonstratio, quâ ipsi vtuntur, ne dum id, sed etiam hoc probaret. Verùm hoc omisso, perpendamus demonstrationem ipsam; supponunt enim plana inęqualiter inclinata repręsentari per AC, & BC, eandem tamen eleuationem habentia: constituunt verò horizontalem AB, grauia verò supponunt in A, & B punctis, & insuper grauis A momentum ad momentum grauis B, in ratione esse, vt AC ad CB, deinde secant AB in F, ità vt BF ad FA sit, vt AC ad CB, inde concludunt punctum F, esse centrum grauitatis grauium A,B, quæ per rectam AB, connectuntur.

Hic tamen est, quod ijs videtur facessere negotij; nam aliud est considerare grauia, vt appensa in A, & B, aliud verò vt adgrauantia super planis CA, CB; longè enim diuersa est huiusmodi consideratio. Rectè quidem concluderet illa demonstratio, si negligendum foret quicquid graue sibi adsciscit ob eleuationem planorum; si enim duo illa grauia appensa filo quodam intelligerentur connexa, ità vt illa imaginario filo per A,C,B ducto, cum fuerint connexa, liberè possint excurrere, atq; adeò ad motum vnius, alterius motus consequatur, grauia hunc in modum disposita dicenda forent ęquipondetantia; si enim non ità se habeant, vnum pręponderet, ità vt B descendat ad D, A ascendente ad E; ex E ducta EF parallela CD, actaque ED secante AB in G, manifestum est ACB ęquari ECD, ablato communi ECB, remanebit AE, ęqualis BD, vt igitur AE ad EF, ità BD ad EF, & propter parallelas EF, BD triangula EGF, DGB similia sunt; quare vt BD, ad EF, ità DG ad GE, sed BD, ad EF, est vt AE ad EF, hoc est, vt AC ad CB, hoc est, vt BF ad FA, hoc est vt momentum grauis in E ad momentum grauis in D, ergo ipsorum grauium in E, & D grauitatis centrum erit G, in horizontali lineâ AB, in quâ prius erat in F, ergo descendit graue ex B in D; ascendente altero ex A in E manere centro grauitatis connexorum grauium, manente inquam in ipsa horizontali linea, quod est impossibile, & contrà assumptum. *Aliquorum error.*

Hoc aliter a nobis ostendi posset, quod inferius pręstabimus, interim redeamus vndè discessimus. In eo igitur videntur peccare, quod assumunt grauia illa non quatenus adgrauant super planis, quod intollerabile est, propterea quod si intelligantur grauia super planis AC, CB constituta, ità vt graue vnum ex: gratia Y valeat 24. alterum Z valeat 8.

hunc

hunc enim in modum seruabitur ratio longitudinum planorum, nempè tripla, hanc enim constituimus rationem longitudinis AC ad longitudinem CB, atque etiam distantiæ BF ad distantiam FA. Si itaque graue Y, constituatur super planum AC, ita vt eius momentum absolutum, nempè 24. repræsentetur per segmentum AM, vt super planum CB, per segmentum BH ipsi AM æquale, at verò momentum absolutum grauis Z repræsentetur per segmentum BK subtriplum ad ipsum BH, & per AO illi æquale, mox verò ex M, & H perpendiculares cadant MN, HI, insuper ex O, & K perpendiculares cadant OP, KL, manifestum est ex Mechanicis graue Y, cuius momentum absolutum repræsentatur per AM, si fuerit constitutum super inclinatum planum AC, tale habere momentum, cuiusmodi est MN, & graue illud, cuius momentum absolutum repræsentatur per AO, constitutum super planum AC tantum habere momentum, quantum repræsentatur per OP, ita pariter illud graue, cuius absolutum momentum est BH constitutum super CB habere momentum HI, & graue, quod habet momentum absolutum BK constitutum super planum CB habere momentum KL, itaque cum sit quemadmodum AC ad CB, ita HB ad AO, & ita AM ad KB, propterea necessariò consequitur MN, & KL inter se æquari quamobrem graue Y constitutum super planum AC tantum habet momentum, puta MN, quantum graue Z super planum CB, nempè momentum KL, ergo graue Y super planum AC æquiponderat graui Z super planum CB, vndè propositio sic est demonstrata.

Verum enimuerò si eadē illa grauia suspensa fuerint ex Libræ extremitatibus A,B, æquiponderant ex centro F, quoniam vt AF ad FB, ita Z ad Y, at verò si eadem grauia pondere diminuta debeant ex ijsdem distantijs æqueponderare, necesse est decrementa fieri proportionaliter, ita vt quemadmodum est Y ad Z, hoc est 24. ad 8. ita sit decrementum vnius ad decrementum alterius homologè, vndè si ex Y, nempè 24. auferatur quarta pars, puta 6. remanebunt 18. & si ex Z auferatur quarta pars, puta 2. remanebunt 6. est autem 18. ad 6. vt BF ad FA, ac proindè graue vt 18. appensum puncto A extremitati Libræ æquiponderabit 6. graui scilicet appenso ad punctum B, vndè eorum idem erit grauitatis centrum F, si considerentur quatenus appensa sunt extremitatibus Libræ; At si spectentur pro vt constituta super planis, certum est graue Y vt 24. cum constitutum super planum AC habeat momentum vt MN, tale decrementum habet, vt eius momentum sit tantummodo vt MN, quæ in hac hypothesi respectu ipsius AM se habet vt quarta pars, nempè vt 6. ad 24. & graue Z super planum CB habere momentum KL, quæ respectu kB repræsentantis momentum absolutum vt 8. se habet vt 6. vnde videtur grauium istorum quatenus per modum vnius accipiuntur, non esse centrum grauitatis F.

Verùm hìc considerare oportet in grauibus appensis extremitatibus Libræ A, & B spectandas quidem esse distantias AF, FB, at si fuerint super planis constituta considerandas esse inclinationes planorum, ac proindè non mirum, si graue Y superimpositum plano AC æqueponderet graui Z super planum CB, etsi non patiantur decrementa prout requireretur ad æquilibrium, dum grauia forent appensa extremitatibus Libræ A,B, siquidem momenta grauium non à Libræ bracchijs, sed ab inclinationibus planorum dependent &c.

Supradictæ demonstratio ostensiua. Nos autem Propositionem hanc ostensiuè sic demonstrabimus &c.

Sit horizontalis AB, plana verò inclinata sint AC, CB, sitque graue Q positum in A ad graue ℞ positum in B in eadem ratione homologè cum planorum longitudinibus AC, CB; ostendendum est graue Q positum super planum AC graui ℞ positum super planum BC, cum fuerit vt AC ad BC, ita Q ad ℞, æqueponderare.

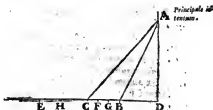
Sit grauis Q momentum absolutum repræsentatum per AM, ex puncto M cadat perpendicularis MN, eius momentum super planum inclinatum AC erit repræsentatum per MN. Sit BH æqualis AM, & BK fiat ad BH, vt BC ad AC, erit quidem grauis ℞ momentum absolutum repræsentatum per BK; ex puncto k cadat perpendicularis KL, & eiusdem grauis momentum super planum BC erit kL. Ostendendum est igitur



igitur MN æqualem esse KL; hoc enim pacto illa grauia æqueponderabunt super prædictis planis constituta, cùm eorum momenta super iisdem planis æqualia fuerint. Fiat vt BK, ad BH, ita AM ad AR, agatur RH, & insuper Mk. Quoniam igitur est vt AM ad AR, ita Bk ad BH, erit diuidendo vt AM ad MR, ita BK ad KH, quare RH, MK erunt parallelæ, Vel quia est vt RA ad AM, ita HB ad BK, ergo diuidendo erit, vt MR ad AM, ita KH ad KB, quare MK, AB erunt inter se parallelæ, vt perspicuè constat ex elementis, ergo NMKL est parallelogrammum, quare NM, LK erunt inter se æquales, est autem NM momentum grauis Q super planum AC, insuper LK est momentum grauis R super planum BC, ergo momenta grauium Q, R, super planis AC, BC sunt inter se æqualia, ergo prædicta grauia Q, R super planis AC, BC constituta, & aliquâ ratione connexa æquiponderabunt. Quod &c.

Principale intentum.

Sed descendendum est ad principaliter intentum; videtur mihi haud benè Galilæi assumptum à quibusdam demonstratum fuisse hunc in modum. Sint duo plana AB, AC inæqualiter inclinata eandem habentia eleuationem AD, sitque horizontalis CD; quicunque sit gradus velocitatis acquisitus in B, accepto eius subduplo, graue motu æquabili, & tempore casus currit idem spatium casus BA, iterumquicunq; sit gradus velocitatis acquisitus in C, accepto



eius subduplo, graue motu æquabili, & tẽpore casus currit idem spatium casus CA; tẽpora igitur, & spatia sunt proportionalia; nempè tempore BA, curritur spatium BA, motu æquabili: tempore autem CA, curritur spatium CA, motu æquabili, ergo per sextam de motu æquabili, gradus velocitatis sunt æquales; quare etiam illorum dupli æquales erunt, & ideò gradus velocitatis in B, & C sunt æquales. Hi tamen paralogizant, atque principium petunt; perindè enim est dicere mobile motu æquabili per AC, & per AB, ita moueri, vt tempus per AC, ad tempus per AB sit in ratione, vt spatium AC, ad spatium AD, perindè est, inquam, ac dicere, vel supponere, gradum velocitatis, quo mobile fertur motu æquabili per AC, æqualem esse gradui velocitatis, quo mobile fertur per AD, motu itidem æquabili atq; adeò duplum æquale esse duplo; Cùm autem hoc demonstrandum assumeretur, vides id supponi, quod ostendendum suscipitur; & nulli dubium, quin cuidam dicere liceat; velocitatis gradus acquisitus per descensum AC, sit v. g. EC, at verò acquisitus per descensum AB sit FB, minor, vel maior illo; æquales enim esse demonstrare oportet; & si id ab illo dici non posset, nulla opus foret demonstratione. Sit igitur EC, maior, quàm FB, atque descensus per AC, & AB sint vniformiter accelerati; diuidatur maximum momentum EC, acquisitum per motum vniformiter acceleratum per planum AC, diuidatur, inquam, bifariam in H, ita pariter momentum FB, acquisitum ex descensu per AB, motu vniformiter accelerato diuidatur bifariam in G; erit quidem HC, momentum motus æquabilis per AC, & GB erit momentum motus æquabilis per AB; his autem ita stantibus, non sequitur tempora esse in eadem ratione cum spatijs, ac proinde HC, & GB æquales esse, atque adeò eorum dupla æqualia esse; quod demonstrare intenditur. Si verò EC supponeretur æqualis FB, ita vt subdupla HC, & GB forent æqualia, quæsitum esset in suppositione; quod etiam contingeret, si subdupla ipsa supponerentur æqualia. Neque dubito, quin ille dicturus sit subduplum GB, non esse æquale subduplo HC, nec esse spatium CA, ad spatium AB, vt tempus motus æquabilis per AC, cuius momentum est HC, ad tempus per AB, motus æquabilis, cuius momentum est GB; quiquidem dixerit, celeritatis gradum acquisitum ex descensu per AC, motu vniformiter accelerato, non esse æqualem gradui descensus per AB, motu itidem vniformiter accelerato.

Præmittenda quædam.

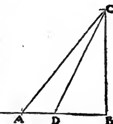
Ad ea, quæ sequuntur, præmittendum omninò id esse videtur, scilicet eatenus graue descendere per planum aliquod inclinatum, quatenus descendendo percurrit aliquid de linea perpendiculari ad horizontem, propterea quòd hæc natura vtitur ad descensum grauium; si licet enim animo concipere quod est impossibile, planum dari posse inclinatum ad horizontem, ità vt mobile percurrendo illud nihil conficeret de linea perpendiculari ad horizontem, nullus foret descensus illius; hinc verò consequens est tantum celeritatis in

huiusmodi descensu per planum inclinatum acquiri, quantum eâ, quam per inclinatum descendendo conficit, linea perpendicularis exposcit; quamobrem ab huiusmodi linea, vt petendus descensus est, ita penes ipsam celeritatis gradus attendi debent; his autem habitis esto.

Exemplum LX.

THEOREMA.

Gradus velocitatis eiusdem mobilis super diuersas planorum inclinationes acquisiti tunc sunt aequales, cùm eorundem planorum eleuationes aequales sunt.



Hoc apud Galilæum assumptum est, quod hìc demonstrare conabimur; placet tamen illud vniuersalius concipere hunc in modum.

Si graue aliquod moueatur, siue per lineam perpendicularem ad horizontem, siue per lineam quomodocunq; inclinatam, cùm ad lineam horizontalem peruenerit, aquales celeritatis gradus acquirit.

Sit aliquod graue descendens per rectam perpendicularem CB, vel per quascunque inclinatas CD, CA. Ostendendum est à mobili acquiri tantum celeritatis in puncto B ex descensu per perpendicularem CB, quantum in D ex descensu per inclinatam CD, vel in A ex descensu per inclinatam CA.

Resolutio.

QVoniam itaque dum graue mouetur, siue per lineam perpendicularem ad horizontem, siue per lineam quomodocunque inclinatam, cùm ad lineam horizontalem peruenerit, æquales celeritatis gradus acquirit; ergo tantum celeritatis mobile acquirit descendens per CD, vel per CA, quantum acquirit celeritatis descendens per ipsam perpendicularem CB; sed perpendicularis, quam graue in descensu per CD, vel CA, conficit, æqualis est CB; ergo mobile descendens per inclinatam CD, vel CA, tantum celeritatis in D, vel A consequitur, quantum per lineam, quam descendendo conficit, perpendicularem acquirit. Quod ita se habet ex hactenus disputatis.

Compositio.

QVoniam igitur mobile descendens per inclinatã CD, vel CA tantum celeritatis in D, vel A consequitur, quantum per lineam, quam descendendo conficit, perpendicularem acquirit, sed perpendicularis, quam graue in descensu per CD, vel CA conficit, æqualis est CB, ergo tantum celeritatis mobile acquirit descendens per CD, vel CA, quantum acquirit celeritatis descendendo per perpendicularem CB. Ergo si graue aliquod moueatur, siue per lineam perpendicularem ad horizontem, siue per lineam quomodocunq; inclinatam, &c. Quod oportebat ostendere.

Controuersia inter D. Stephanum de Angelis, & P. Ricciolium, de perpendiculo.

Occasione Theorematis nobis propositi resoluendi à D. Stephano de Angelis, appuli animum ad considerandam illam difficultatem Physico-Geometricam, vertentem inter ipsum, & P. Ricciolium, nempè de descensu grauis, ex hypothesi, quòd terra cieretur in orbem motu diurno: quam scilicet lineam descendens graue describeret. Ait enim Ricciolius. Si graue aliquod descenderet in æquatore à superficie ad centrum terræ horis præcisè sex, & non moueretur tellus nisi diurno motu, an linea descripta à graui cadente, caderet intra peripheriam semicirculi descripti supra semidiametrum telluris, an extra; ex hypothesi, quòd illud graue moueretur motu æquabili circa centrum, viginti quatuor horarum spatio periodum absoluens, vt ad centrum motu naturaliter accelerato secundùm quadrata temporum; qua datâ hypothesi Geometricè demonstrauimus lineam illam extra cadere.

Quoniam autem hìc differitur de resolutione Theorematum, quæ Physico-Mathematica dicun-

dicuntur, duximus non alienum ab instituto, hoc quod Physico-Geometricum est nostra persequi contemplatione; eò vel maximè, quia me vtrique rem gratam facturum sum arbitratus; & vt in arenam descendamus, primùm operæ pretium existimauimus aduertere.

Si quis graue aliquod in altum proijciat, ita tamen vt interim is moueatur ex accidenti, videlicet ad motum alterius, graui quidem proiecto communicari impulsum illum, quo proijciens fertur ad motum alterius; quod tametsi sit exploratum in primis, tamen id nobis innotuit experimento Florentiæ annis elapsis à nobis confecto; sic porrò licebit illud ob oculos constituere.

Sit planum horizontale, super quo currus velociter tractus Equorum vi excurrat per rectam AH; eidem verò sit à tergo aptata balista, cui præsideat aliquis, qui quando currus peruenerit ex A, in B, præses curru vectus, remittat arcum, atque adeò explosus globulus, qui ob modicam arcus tensionem ad mediocrem altitudinem perueniet, exempli gratia ad I, descendendo cadat super eundem currum, e.g. in E, factaque sit Parabola, cuius altitudo IC, amplitudo vero BE; validiori tamen facta ipsius arcus tensione, vel robustiori adhibita balista, explosus globulus ad maiorem perueniet altitudinem, puta in K, eò vel maximè si globulus ille fuerit plumbeus validiori respondens impulsui: qua de re suo loco; & facta sit semiparabola Bk, cuius altitudo kD, & altera semiparabola compleatur KG, nisi deficiat impetus horizontalis, quo deficiente graue ex L cadat per rectam LF, maioris, vel minoris altitudinis, prout citiùs, vel tardiùs horizontalis impulsus defecerit. *Experimentũ de curru.*

Tunc autem currus erit valdè promotus, prout valida fuerit expulsio balistæ, ita vt ponè ipsum in distantia notabili cadat: & quidem nobis ita contigit; nam spatiũ AB fuit viginti brachiorum Florentinorum, at verò BF quadraginta quinque, sed FH triginta septem circiter.

K L I A B C D E F G H

Vtrumque nos docet experimentum, graui communicari quendam horizontalem impulsum; secundum autem speciatim nos admonet, quando nimirùm graue ad tantam peruenerit altitudinem, vt in ascensu, descensuque tantum insumatur temporis, quantum horizontalis impulsus deficientia requirit, cùm ad lineæ descriptæ punctum, v.g. L, peruenerit, antequàm in tellurem incurrat, dum interim currus eandem subiens celeritatem, eundemque gradum velocitatis retinens, ad spatij punctum H, peruenerit; vt videlicet descendens ex L in F, rectam lineam describat, cùm ab interno principio tantùm, horizontali quidem impulsu corrupto, moueatur, atq; adeò vt à tergo cadat. *Ex hoc experimento duo colliguntur.*

Ex his facilè deprehendere licet hoc idem euenturum, si tellus diurna vertigine cieretur in orbem, graue verò sursum in æquatoris plano proijceretur; Illud enim ascendens, itemque descendens, mixtam describeret lineam; qualis verò ea esse deberet, alibi explicabo. Illud mihi tamen satis superque manifestum videtur, videlicet huiusmodi lineam mixtæ esse naturæ. *Idem quod in curru, contingeret si terra in orbem cieretur.*

Quòd si graue non fuerit proiectum, sed ex aliquo eminenti loco ceciderit, dummodo locus, vnde est descensus, moueatur: vt se habet aliquod cadens ex apice mali alicuius nauis &c; modò profectò non dissimili motum illum concipiet horizontalem, ita vt nisi nimia fuerit altitudo, graue cadat, ad calcem eiusdem mali. Ita quoque contingeret, si tellus circumacta diurna vertigine foret, & ex apice turris graue aliquod descenderet; nisi namque ex nimia altitudine caderet, ad calcem eiusdem turris pertingeret. Dicebam autem, nisi nimia foret altitudo, nam alioquin à tergo caderet malo promoto, vel ædificio ob eam, quam attulimus causam: quoniam horizontali impulsu consumpto solùm internum principium descensus remaneret, interim perseuerante impulsu tamen, vel in naui, vel in terra versus eam, ad quam etiam graue ascititio impulsu ferebatur, partem; hoc enim neque *Quod de proiecto dictum fuit, aptatur graui descendenti.*

nauis gressum, neque telluris reuolutionem assequi potest: vnde necessariò à tergò caderet. Supponimus autem modo, graue tunc non moueri in orbem, si tellus moueretur, non moueri, inquam, in orbem ab interno principio, quasi retinens naturam totius, vt multi hac tempestate comminiscuntur; sed potiùs ascititio quodam impulsu, non secus ac dum graue ex apice mali alicuius nauis descendit; eadem enim est prorsus ratio. Nec satis quidem intelligo quo pacto moueri posset ab interno principio, si prædictus impulsus omnino deberet hic intercedere. Aut enim illud graue descendendo redit ad proijcientis locum, vel non illum assequitur. Si secundum, rectè dixeris graue non moueri in orbem ab interno principio, aliàs locum illum assequeretur. Si primum, non conuincitur motus à principio quidem interno, cùm id fieri minimè repugnet extrinsecùs à principio videlicet externo, hoc est à proijcientis ascititio impulsu, vt fuit nobis experimento currus exploratum. At in Physicis cumulatè nobis hoc erit argumentum tractandum. Persuasum interim sit cuique, graue illud proiectum, haud fore, vt intrinsecùs in orbem moueretur, cùm hoc idem ab impulsu sibi extrinsecùs adueniente consequeretur, videlicet à proijciente, non vt huiusmodi, sed vt telluris motum subeunte, vel à tellure ipsa, at natura semper abhorret à superfluo, vt in necessarijs non deficit.

Telluris immobilitas ex hactenus traditis colligitur.

Hinc colligenda videtur immobilitas telluris. Neque vlla disparitas est inter motum currus, & telluris, quantum ad communicationem impulsus, quod motus illius sit velocissimus, huius autem non ita; nam si velocissimo motu impulsus validissimus proiecto communicatur, interim tellus velocissima sui gyratione adhuc reuoluitur, & si currus non adeò velociter fertur, sed longè segniùs, etiam explosò proiecto, segniùs prosequitur cursum. Neque etiam officit, quod pro disparitate inter motum telluris, & currus ab aliquibus afferri solet, quòd ad motum telluris sequitur aeris motus concomitans; vnde proiecti motus in orbem fouetur versus eandem partem; quod in curru non euenit, cuius motus aeris motus non comitatur versus eandem partem; non officit, inquam, siquidem experimentum feci etiam è plaga occidentali ad plagam orientalem, vnde non deerat ille motus aeris, si quis esset à motu telluris, à quo foueretur proiectum, & nihilominus ad tàm magnam distantiam decidebat à tergo.

Illud itidem considerandum se offert, quòd graue sursùm proiectum impulsu deficiente impotens ascensum protrahere, si per rectam perpendicularem factus sit ascensus, non quiescit in reflexionis puncto quiete priuatiua, nam de negatiua nulla difficultas; tunc enim mobile tantùm acquirit mutatum esse, cui quidem in spatio punctum, in tempore verò, instans respondet; illud porrò quietis priuatiuæ rationem non habet; vt enim motus, sic & huiusmodi quies, temporis mensuram exposcit; Quies enim, de qua est sermo, non quæuis est à motu cessatio, siue motus negatio, sed negatio in subiecto apto motum suscipere in ea duratione, in qua dicitur quiescere. Mobile autem illud nimirum graue non est quietis capax in illo instanti, sed consequi tantummodo potest mutatum esse, quod est finis ascensus, & principium descensus, ita vt in illo instanti valeat dicere, nunc vltimo non est descensus, non est motus in orbem descensum concomitans, sed immediatè post erit; quamobrem immediatè post, graue illud mouetur, & naturaliter descendendo, motu videlicet naturaliter accelerato ab interno principio, & motu quidem in orbem naturaliter deficiente. Nec certè credendum de ratione motus recti, & reflexi disruptionem esse per interpositam quietem, nam quandocunque mobile fuerit indifferens ad contrarios motus in aliquo mutato esse potest ab agente libero ad istorum alterum moueri, sed vnumquodque mobile in quouis mutato esse hunc in modum se habet; quamobrem potest in quolibet mutato esse, à libero agente ad vnum, vel alterum motuum moueri; quod si semel concesseris, non erit cur id deneges naturali agenti, ac propterea graui. Neque perturbet animum, quòd oppositi motus forent continui; nam id quidem incommodum existimandum, præsertim in Aristotelis doctrina, non est, eo sensu, vt vna credatur esse mutatio secundùm suum esse materiale, vt aiunt; nihil tamen obstat in ratione continui.

Dum graue sursum proijcitur, nulla interposita quiete, motum subiret duplicem &c.

Dum itaque graue sursum proijcitur, reflectendo, nulla interposita quiete, motum subiret duplicem, seu potius duplicem impulsum conspirantem in vnum, ita vt perinde sit, ac si duplici motu feretur, quorum vnus ad centrum naturaliter foret acceleratus, alter autem in orbem naturaliter deficiens, ex hypothesi quòd tellus ipsa diurna reuolutione cieretur in gyrum.

Eodem

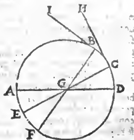
Eodem prorsus modo nobis est philosophandum, si graue descendat ex alto; nihil enim refert extrinsecum illum proiectionis impulsum sursùm præcessisse, eam igitur lineam describeret, qualem mobile duplicem hunc impulsum subiens requirit, & ab interno principio, secundùm motum vniformiter acceleratum, & ab extrinseco, à tellure scilicet in orbem acta, iuxtà motum in orbem; eam autem spiralem existimo, non qualem Archimedes designat, sed genere diuersam, ex hypothesi quòd tellus diurna reuolutione viginti quatuor horarum spatio, in æquatoris plano suam absoluens periodum, circa centrum moueretur. Illud porrò attendendum in primis, nè graue ipsum ob nimiam descensus altitudinem, impulsum extrinsecùs aduenientem in gyrum amiserit; hoc enim deficiente, graue deinceps ad rectitudinem gressus se restitueret, per rectam lineam ad centrum incedens.

Cæterum si vterque motus æquabilis esset, vtique linea ab ipso peracta spiralis foret Archimedea, dummodo vterque impulsus perseueraret, donec ille, qui est in orbem integram gyrationem perficeret, alioquin graue descripta spiralis parte, vtpotè impulsu in orbem inlumpto, recta descenderet, si descensus esset acceleratus, at in orbem æquabilis, mobile mixtam lineam longè diuersam designaret; quòd si descensus esset naturaliter acceleratus, in orbem naturaliter deficiens, longè adhuc magis linea illa diuersa foret; qualem autem ad vnguem, nunc designare non iuuat, iuuabit tamen in Physicis. Interim semper intellige ad integram lineam describendam requiri perseuerantiam, quantum sufficit, non vnius tantùm, sed vtriusque impulsus, vt superiùs innui. Nam vt dicebam futurum id existimo, si graue ex tanta altitudine cadat, ita vt quo tempore illud ad centrum telluris peruenisset, vnà fuisset eiusdem telluris expleta reuolutio, eodem scilicet peripheriæ puncto ad eundem locum restituto, alioquin non ita: Vnde nec Archimedis illa spiralis contingeret, nec alia, nisi hac data hypothesi, quod animaduertisse abs re non fuit.

Duo tamen videntur aliquid negotij facessere; primum videlicet extrusio per tangentem magni circuli transeuntis per locum, vnde graue descendit; secundum est illud, quòd in gyrum semel conceptus impulsus, eundem semper retineat velocitatis gradum, nisi videlicet ab aliquo retardetur, quod hic deesse videtur, nisi aerem id putes, qui si fortè motum eundem subeat in gyrum cum tellure, non erit graui impedimento, quò minus retento eodem celeritatis gradu, circumagatur. *Duo proponuntur difficultates.*

Ad primũ quod attinet; quamuis non defuerint quibus id visum sit prorsus ab omni veritate alienum, quibusdam parùm firmis experimentis adductis, & minùs cautè adhibitis; tamen re diligentiùs introspectâ, animaduertimus considerandum esse, non æque ratiocinandum de graui, quatenus præcisè subeunte vim extrudentem corporis circumacti, ac in gyrum reuoluti, cuiusmodi est rota, quæ circa proprium axem in orbem cietur; non æquè, inquam, ac de ipso, prout etiam grauitate præditum est, & secundùm etiam huiusmodi rationem spectatur. Quæ vt magis obuia reddantur, atque faciliùs ad sui perspicientiam animum admittant, hæc breuiter subijciam, eadem de re cumulatiùs in Physicis locuturus. *Occurritur primæ.*

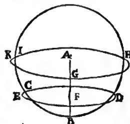
Quoniam verò quantùm ad id, de quo agitur, cùm eadẽ sit ratio rotæ circa proprium axem reuolutæ, ac telluris, si in orbem cieretur, propterea maioris claritatis gratia, de rota ipsa, quasi in locum telluris perenni vertigine circumactæ substituta, sermonem instituemus.



Esto igitur rota repræsentata per circulum ABCD, cuius centrum G, atque huiusmodi circulum intelligamus horizontaliter positum fulcimento substentatum è centro G, ductisque rectis AD, EC, FB per centrum, dum circulus ex A, v.g. in E reuoluitur, intelligamus pũctum A ferri ad E, ita vt diameter AD perueniat ad situm EC, deinde ad situm FB, & ita deinceps; commemorati propterea circuli motus nil aliud est, quàm diametrorum quædam circumuolutio. Imaginemur igitur diametrum solam AB circa G horizontaliter in orbem actam, si vis impellens punctum A versus punctum E, validior extiterit resistentia mobilis existentis in C, cùm D punctum peruenerit ad C, nisi quidquam obstaret, propelleret mobile per rectam tangentem CN, quòd si mobile quidem extiterit in B, dum D punctum eò peruenerit, mobile per rectam tangen-

tangentem BI impellet, nisi quicquam obstiterit, & sic de cæteris.

Hoc quasi me duceret ad credendum magnam esse affinitatem inter rotam in gyrum actam, & funependulum continuatâ reuolutione circumductum, vt rotæ motus in orbem ferè videatur nil aliud esse, quàm alicuius funependuli continuatus motus versus eandem partem: Vnde si nos imaginemur punctum in aeris medio, eidemque animo concipiamus funis alicuius funependuli extremum affixum, & graui, quod est funi alligatum, adeò validum communicatum impulsum, vt graue illud integram reuolutionem perficere queat; nemini dubium, quin funependulum quodammodo rotæ munere fungatur, ita vt si prædictus impulsus fuerit illi communicatus secundùm planum horizontale, se habeat veluti rota horizonti parallela: quòd si impulsus fuerit in plano verticali, se habeat instar rotæ verticalis; quæ vt faciliùs intelligantur. Supponamus A punctum in aeris medio, cui sit infixum funependulum AB, graue autem B; Impellatur graue B in gyrum, & quidem si mobile non multùm distet à perpendiculari transeunte per punctum, cui alligatum est extremum funis, & si non admodum validus fuerit impulsus, gyrum minorem efficiet EFDC, vnum è minoribus circulis sphæræ, cuius centrum A; quòd si motus cœperit ex C, in E, per E &c, vtique vrgente grauitate, graue præcisè non perueniet ad C, sed infra; at si impulsus adhuc fuerit maior, & maior fuerit distãtia à perpẽdiculo, vbi ei communicatur impulsus, maiorem adhuc graue parallelum, seu potius spiram describet in sphæra, ita vt tandem proximè accederet ad circulum maximum in sphęra, cuiusmodi est IkGH.



Imò funis affixus puncto immobili A, sua gyratione produceret quasi conicam superficiem; dicebam autem quasi conicam, nam re vera, vt esset conica, deberet habere circulum pro basi, ita vt eius terminus esset peripheria; sed funis describeret talem inuolutam superficiem, vt eius extremum mobile, describendo spiralem in plano, ea foret, veluti retorta, extremum cuius vnum esset punctum vertex, aliud autem linea, vti dicebam, helica; hìc porrò, non tàm accuratè res est accipienda, quoniam videlicet, pro ipsa, quam diximus superficie, quæ conica est, præsertim cùm vnica, vel duplex fuerit gyratio, sumi potest.

Mirabile quiddam proponitur. Hic autem mirabile quidpiam se nobis considerandum offert, quod experimento comprobatum fuit, videlicet adhuc seruari leges funependuli, suas vibrationes exercentis per planum verticale; adhuc enim dum graue in gyrum cietur, graue, inquam, funependuli efficit motus æquitemporaneos, ita vt si in plano verticali tempore quinquaginta pulsationum, confecerit quindecim vibrationes, totidem etiam conficiat, dum in gyrum agitur: vnde quis suspicari posset, si impulsus, quo graue describere valeret peripheriam circuli maximi horizontalis, tantus foret, æquitemporaneum ipsum futurum in circulis minoribus &c.

Redeuntes autem vnde discessimus. Imaginandum est, eam ob causam ipsum graue in orbem cieri, quoniam aliquid ei obsistit, ac impedimento est, quo minus per lineam moueatur, quam certè liberum ab omni impedimento, describeret; impedimentum porrò est fulcimentum, cui alligatus est funis, quo remoto, graue ipsum, sibi communicato ab impellente impulsu, per rectam lineam ageretur, ex vi tamen ipsius impulsus; aliunde impediretur, vt mox dicam; nec vlli profectò datum est posse mobili communicare impulsum, nisi per rectam lineam. Id autem vnde sit in Physicis explicabo.

Graue tamen inde propulsum aliam longè diuersam lineam describit quod aliunde habet, vel ab impedimento iam dicto, vnde cogitur circuli peripheriã describere, aut non semper eadem velocitate retentã, sed paulatim potius imminutã, scilicet mobilis grauitate contranitente, concurrente etiam medij circumambientis obsistentia, ad quietem tandem se restituit. Eadem quoque grauitas illi impedimento est quo minus per rectam lineam feratur, vnde liberè axolutum excurrens, potius parabolicam lineam affectat.

Rota dum reuoluitur circa proprium axem, se habet instar penduli. Rota verò dum reuoluitur circa proprium axem, vt paulò antea dicebam, siue per planum horizontale, siue verticale, instar funependuli se habet, ita vt quicquid extruditur à rota in orbem acta per rectam lineam tangentem excurreret, nisi à grauitate impediretur, & quidem si rota foret in plano horizontali, quod extruderetur excurreret per planum tangens

gens

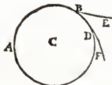
gens ambitum ipsius rotæ, in quo grauitate mobilis reluctante, parabolicam lineam designaret. Quod si rota fuerit disposita in plano verticali, graue illud extrusum in huiusmodi plano lineam parabolicam affectaret, cuius loco lineam rectam tangentem ambitum rotæ descripsisset, nisi grauitas ei obstitisset. Hoc idem in funependulo vsuuenire concipiendum; cùm primùm enim ab impellente vim motricem recepisset, per rectam lineam, fune disrupto, feretur, nisi à propria grauitate coactum, parabolicam lineam designaret; quininmò dum est graue funi alligatum, atque adeò hac ratione impeditum, recepto impulsu in gyrum dum in aliquod mobile impingit, cuius resistentia sit minor impulsu appensi grauis ipsius funependuli, mobile ipsum propallet, vt hoc rectam lineam describat per planum, vbi quidem existit; quod si illud mobile liberum in aere sustentatum foret fulcimento aliquo quantum de se est, vi impulsus sibi communicati à graui funependuli recta quidem incederet, seu grauitate propria impeditum, lineam parabolicam designaret.

Imò hinc huius veritatis sumitur argumentum; nam ad lineam parabolicam describendam, duplex requiritur impulsus, nempè vniformiter acceleratus, & æquabilis, ac vniformis; primum graue dum extruditur à graui ipsius funependuli, habet à propria grauitate; secundum certè non nisi à graui ipsius funependuli; ergo funependulum extrudit per lineam rectam; ergo etiam, & rota, se habens instar funependuli continuati; ergo, & si tellus in orbem ageretur diurna vertigine &c. Quod igitur funependulo contingit, illud idem rotæ in orbem actæ euenire necesse est; siquidem hanc funependulum quasi continuatum esse, non immeritò diximus.

His autem præhabitis de motu telluris in gyrum actæ ita sentiendum, quòd graue scilicet cùm primùm descenderet, non se per rectam tangentem moueret extrusum: quod quidem contingeret, nisi foret à grauitate propria impeditum, sed hac reluctante statim deflectit ad lineam mixtam, adeò vt valeat dicere, nunc vltimò non est motus descensus, sed immediatè post erit, nunc vltimò non est motus in orbem, sed immediatè post erit. Nec imaginandum est quod prius transeat non nihil lineæ rectæ tangentis, postea verò cadat per lineam mixtam; hoc enim ab omni ratione prorsus est alienum. *Quid sentiendum de motu telluris.*

Cæterum non prætenbo hìc aduertere, si rota moueretur, non solum circa proprium axem, sed etiam ad motum centri motum horizontalem subeuntis, illud idem futurum de extrusione, quod superius diximus.

Quòd si rota ipsa volueretur circa proprium axem tantummodo, vt se habet ea, quæ per circulum, cuius centrum C repræsentatur, & aliquid ex eius peripheria extruderetur aliquo contranitente, pro varietate impedimenti varia quoque linea foret, quam extrusum percurreret; Vnde si extrusio fieret in puncto D, fieri posset per lineam DF; in puncto B, per lineam BE, iuxta varietatem impedientis, vt obseruare licet in rotis cotarijs, in quibus videlicet cultri acuminantur; aqua enim, qua ipsæ perfunduntur vario modo extruditur, pro variatione obsistentiæ; quod plerosque decepit, non aduertentes hìc nobis sermonem esse de extrusione remotis omnibus impedimentis.



Non igitur extrusio officit motui grauis descendentis per lineam mixtam, ex hypothesi quod tellus in plano æquatoris reuolueretur.

Nec etiam officit quod secundo propositum loco fuit; obuium est enim impedimentum, nimirùm internum principium descensus; hoc enim impedit quo minus graue descendens possit in orbem cieri, extrinsecùs impulsu recepto, eodem semper velocitatis gradu.

Commentitia verò prorsus, ac inanis est ad subeundum motum, vel quietem indifferentia, vt si graue recipiat impulsum ab aliquo, omni licet impedimento remoto, debeat in æternum moueri, quasi graue per lineam horizontalem, vel in orbem circa centrum grauium nullatenus mouenti resistat; tametsi enim maximum sit momentum descensus per lineã perpendicularem, & quò maior fuerit inclinatio lineæ, eò minus sit momentum, vnde cùm ad horizontem peruenerit, momentum ipsum sit minimum, quatenus componitur ex grauitate, simpliciter, & vi, pro vt energiam habente ratione positionis; non tamen est nullum, vtpote retinens energiam grauitatis; nam momentum quidem est nullum, cum illud attendatur penes positionem, cuius ratione resistentia quoque est nulla, sed non est nulla resi- *Indifferentia grauis ad eternum motum commentitia.*

resistentia ratione grauitatis. Duobus enim modis graue adgrauat; vnde duplicem habet resistentiam respectu mouentis, vno modo ratione grauitatis, & alio modo ratione momenti: quando graue descendit per lineam perpendicularem, vel per lineam inclinatam, vtroq; modo adgrauat; vnde vtroq; modo mouenti resistit; at si peruenerit ad lineam horizontalem, mouenti per huiusmodi lineam, quamuis graue non resistat ratione positionis, secundùm quam attenditur propriè momentum, tamen resistit ratione grauitatis. Id autem hunc in modum confirmabitur.

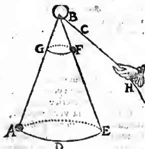
Supradicti confirmatio. Esto linea AB repræsentans Vectem, ita vt extremum A, manu detineatur, ac propterea habeat rationem hypomoclij, & potentiæ, quod passim contingit: vt cùm nos hastam aliquam ad extremum accipimus manu, eamq; horizontaliter sustinere contendimus; manus enim fungitur duplici munere, & hypomoclij, & potentiæ; digitus enim index cum medio habet rationem hypomoclij, dum interim pollex adhæsione montis sui exercet potentiam sustinentis, & mouentis; Concipiamus igitur graue aliquod ad extremum B, istud ratione momenti fieri poterit, vt superet potentiam sustinentem, & mouentem ipsius manus: Si verò illud fiat manui, atq; adeò hypomoclio propinquius, fieri poterit, vt à manu sustineatur, & quò magis propinquius factum fuerit, eò etiam faciliùs à manu sustinebitur, semper imminuto momento, quod graue illud habebat ratione distantiæ, & positionis: Si tandem graue manu fuerit susceptum, comparatinè summa facilitate sustinebitur, & mouebitur, quoniam omne momentum amisit penes distantiam ab hypomoclio; hoc tamen non facit, quin etiam retineat quandam resistentiam ad motum ratione grauitatis. Ita non dissimiliter in re, de qua agimus.

A ———————————— B

Quorundam deceptio. Neque admittendum quibusdam, in Natura corpus quiescens indifferens ad motum omnẽ; siquidem corpus natura constans, aliquam propensionem ad motum habeat necessè est, cùm naturæ nomine rectè principium motus vsurpetur. Sed hic considerandum in corpore naturam habente, verbi gratia in aliquo graui, tria, fortè non rectè ab alijs animaduersa; vnum est propensio ad motum, quam vbique retinet; aliud est nisus ad motum, eumq; habet, cùm fuerit graue detentum in loco naturæ eius dissentaneo, cùm alioquin in loco sibi consentaneo non habeat; tertium est motus actu, qui scilicet actu ab energia grauis exercetur, & hunc sibi vendicat in loco sibi dissentaneo, vt cum fuerit in medio minoris grauitatis in specie; tunc enim graue non impeditum descendit, impeditum adgrauat nitendo, sed non dum mouetur.

Perpenditur aliquorum sententia. Quòd si studeas alicuius imitatione gradum velocitatis eundem in mobili retineri, demonstratione firmare, ex eo quia si quid esset impedimento, quò minùs retineretur, videretur vtique directionis varietas; hoc tamen nihil esse funependuli experimento confirmares. Occurram ostendendo in hoc haud leuem fortasse contingere paralogysmum; si tamen experimentum fuerit huiusmodi.

Sit funependulum ABC, & funis quidem transeat per anulum B laqueareo infixum, deinde reuoluto pendulo, ita vt graue A, per impulsum sibi communicatum à manu describat circulum ADE, secundùm certum velocitatis gradum; tunc si funis trahatur à manu H, ita vt funependuli longitudo euadat BF subquadrupla ipsius BE, graue F, circumferentiam GF, describet in dimidio temporis illius, quo describebat circumferentiam ADE; vnde colligunt velocitatem in F eandem esse eum velocitate in A.



Hæc porrò nùm ritè sint dicta videamus. Supponendum autem vibrationes funependulorum æqualis longitudinis, esse ἰσόχρονους, hoc est æquitemporaneas: vnde vibrationes vnius funependuli æquitemporaneæ sunt, non tamen æquiueloces; funependulum enim describit primum arcum maximum, secundum minorem, & ita deinceps, donec languescat impulsus, atque graue tandem ad quietem se restituat; singularum autem vibrationum motus sumi possunt, tanquàm æquabiles, vt paulò post ostendemus, ac propterea eùm æquitemporaneæ sint, vt se habet

bet spatium ad spatium, ita velocitas ad velocitatem, quamobrem velocitates veluti spatia decrescunt.

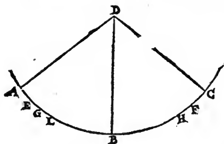
Supponendum secundò eandem esse rationem funependuli perficientis circumferentiam circuli ADE, circulique GF, ac est si in plano aliquo verticali moueretur describendo arcum ex A in E, et ex B in F.

Supponendum tertiò multitudinem vibrationum per arcum GF ad multitudinem vibrationum per arcum AE, esse in subduplicata ratione BE, ad BF, ita vt si BE fuerit quadrupla ipsius BF multitudo vibrationum per GF, sit dupla multitudinis vibrationum per AE, ac propterea si tempore quinquaginta pulsationum graue A facit per arcum AE quindecim vibrationes, graue F per arcum FG triginta perficiet, ac ob id tempore quo graue perficit vibrationem vnam per AE per FG perficiet duas.

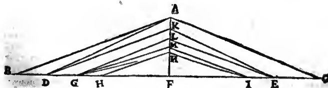
His præhabitis, cùm eadem sit ratio ex secundo supposito, siue funependulum describat circuli peripheriam ADE, & GF siue simplices arcus in plano; eò propterea tempore quo graue describit circuli peripheriam AE, hoc est vnam facit gyrationem, eodem bis describet circumferentiam GF, hoc est faciet duas gyrationes. Quoniam verò per primum suppositum huiusmodi motus sumi possunt tamquam æquabiles, quia saltem ad æquabilitatem reduci queunt, ratione quidem excessus, atque defectus à mediocritate. Si idem est gradus velocitatis in F ac est in A, sequitur spatium, nempè peripheriam AE ad duplam peripheriam GF debere esse vt tempus ad tempus; sed tempus quo graue percurrit peripheriam AE æquale est tempori, quo graue percurrit duplam peripheriam GF; [a] ergo peripheria AE æqualis erit duplo peripheriæ GF; sed peripheria AE ad peripheriam GF est [b], vt BE ad BF, & BE ad BF est quadrupla; ergo peripheria AE ad peripheriam GF erit [c] quadrupla; quare peripheria AE ad duplam peripheriam GF, erit dupla, non igitur peripheria AE æqualis est duplo peripheriæ GF, sed inferebatur dupla; foret igitur dupla, & non dupla, quod est inconueniens. Vides igitur non retineri eundem gradum velocitatis in F ac erat in A, alioquin hoc sequeretur incommodũ; re tamen vera gradus velocitatis in F subduplus in hoc casu est eius qui est in A. Generaliter autē est in subduplicata ratione radiorũ &c.

[a] ex tertio supposito.
[b] ex Pappo lib. 5. prop. 11.
[c] 11 quinti.

Prima Figura



Seconda Figura



Videbitur fortasse cuipiam non dum exploratum ipsius funependuli motum velut æquabilem vsurpari posse, re tamen diligenter introspectā haud erit operosum id ratione confirmare.

Intelligamus igitur funependulum DB, cuius funis sit affixus D puncto, & ad eius extremum alligatum sit graue B, quod eleuatum ad C, si demittatur describat arcum CBA,

 adeò

adeo vt remotis impedimentis puncta quidem A, & C in linea sint horizontali. Quoniam igitur graue ex C descendens tantum in via momentum acquisiuit, vt eius vi possit ascendere ad A, dum ex C descendit in ipso C nullum habebit gradum celeritatis, sed descendet ex quiete, ita vt descendendo moueatur motu naturaliter accelerato, ac propterea spatia transacta per arcum BC, sint in duplicata ratione temporum, & in puncto B maximum acquirit momētū. Intelligamus per bc, tēpus quod insumitur à graui ex C in A describente arcum CBA, & quidem arcum CB, motu vniformiter accelerato, & BA, vniformiter deficiente, & super bc, sit triangulum abc, & quidem æquicrure, cuius altitudo af, repræsentans maximum celeritatis momentum, quod graue ex C aquisiuit in B, quando itaque graue descendit ex C in B motu naturaliter accelerato, triangulum afc omnia eius momenta repræsentabit, & recta af, vt dicebam, repræsentabit maximum momentum, quod acquirit in B; dum autem hinc motu naturaliter deficiente fertur in A, si ad A perueniret triangulum AFB, omnia istius motus momenta repræsentaret, sed vndecunq; sit, perueniat tantùm ad E, atque huius motus momenta omnia erunt repræsentata per triangulum eiusdem altitudinis af, cum triangulo afc, triangulum autem esto afd, at verò ex E redeūdo non acquirit in B tantum momentum, puta af, quantum acquisierat descendendo ex C in B; acquirat autem momentum kf, ita vt huius motus momenta omnia repræsententur per triangulum kdf, ascendendo autem per arcum BC, non perueniet ad C, sed ad punctum e.g. F, quod magis distet à C, quàm E distabat ab A, huius autem motus naturaliter deficientis momenta omnia repræsentata erunt per triangulum eiusdem altitudinis kf, cum triangulo kdf, ex F in B, redeundo motu naturaliter accelerato, minùs acquiret momentum v.g. lf, ita vt huius motus naturaliter accelerati momenta omnia repræsententur per triangulum lfe, at verò ex B ascendendo non perueniet ad E, sed potius ad G punctum, quod magis distat ab A, quàm F distaret à C; huius autem motus naturaliter deficientis momenta omnia erunt repræsentata per triangulum eiusdem altitudinis lf, cum triangulo lfe, triangulum verò sit lgf; at verò ex G redeundo motu naturaliter accelerato in B, minus acquirit momentum v.g. mf, atque huius motus naturaliter accelerati momenta omnia erunt repræsentata per triangulum lgf; at verò ex B ascendendo non perueniet ad F, motu naturaliter deficiente, sed ad H punctum, quod magis distat à C, quàm G distaret ab A; huius autem motus momenta omnia repræsentata erunt per triangulum eiusdem altitudinis mf, cum triangulo mgf, huiusmodi triangulum esto mfi, redeundo autem motu naturaliter accelerato, in B acquirit minus momentum v.g. nf, atque huius motus momenta omnia erunt repræsentata per triangulum nfi; ex B verò ascendendo motu naturaliter deficiente, non perueniet ad G, sed ad L punctum, quod magis distat ab A, quàm H distaret à C, atque huius motus momenta omnia erunt repræsentata per triangulum eiusdem altitudinis nf, cum triangulo nfi; triangulum autem esto nfh, & sic deinceps, donec graue quiescat in B; atque hunc in modum cf maior est quàm fd, & fd maior quàm fe, & fe maior quàm fg, & fg maior quàm fi, & fi maior quàm fh, & ita deinceps, insuper fa maior quàm fk, & fk maior quàm, fl & fl quàm fm, & fm quàm fn, & ita deinceps. Manifestum est autem, motus funependuli per arcus CBA, FBE, HBG, & sic de reliquis, sua habere momenta repræsentata per triangula cad, dkc, elg, gmi, inh, & sic de reliquis. At verò singulorum horum triangulorum altitudinibus bissectis, & per puncta bissectionum ductis rectis, quæ sint parallelæ basi vniuscuiusque, & ex extremitatibus basium erectis perpendicularibus, constituentur rectangula repræsentantia momentum motus æquabilis singulatum vibrationum. Hinc itaque perspicuè constat, vibrationum motus accipi posse tanquàm æquabiles. Solum id est obseruandum, quòd graue describendo gyrationem GF, primá vice illam absolueret, at secundá vice, vtpotè minori momento circumactum, gyrationem paulò minorem efficeret, sed hoc nihil est, imò nobis maximè fauorabile; si namque verum est quod diximus, ex hypothesi quòd secundá vice eundem gradum velocitatis retineret, multò magis si minori velocitatis gradu, minorique momento cieretur.

Ad secundam figurā pertinent litteræ minusculæ. Vt pag. seq. l. 7. lege fk, fl, & l. 4. fa.

Si enim circuli ADE, circumferentia dupla est ad duplam circumferentiam GF, atque adeò velocitas per circumferentiam ADE, dupla est ad velocitatem per circumferentiam duplam GF, adhuc maiorem habebit excessum circumferentia ADE, supra aggregatū ex circumferentia GF, & altera, quam secunda vice describeret graue, atque adeò velocitas

per

per circumferentiam ADE; ad aggregatum velocitatum per duas illas circumferentias.

Cæterum si idem foret velocitatis gradus in A, & F, graue describeret circumferentiam GF, non in dimidio temporis, quo describeret circumferentiam ADE, sed in quarta parte, vt enim spatium ad spatium, ita tempus ad tempus, ex hypothesi, quod idem sit gradus velocitatis.

Hic autem illud consideratione dignum se offert, quod eâ ratione decrescunt arcus peracti EBF, GBH &c. ab arcu ABC, qua ratione decrescunt momenta Fk, FL &c. à momento FA; vt enim se habet arcus ad arcum, sic velocitas ad velocitatem, vel momentum ad momentum.

Non inficiandum tamen velocitatis gradum aliquando non variari variatâ directione motus, quando per hanc directionis variationem nullum affertur impedimentum, vt si manis aliqua secundùm vnum gradum velocitatis feratur versus vnam partem ob impulsum conceptum, variatione factâ ipsius directionis idem velocitatis gradus retinebitur, dummodò hæc variatio directionis fiat sine multiplicatione contactus, alioquin res non ita se habet; quoniam omnis contactus motum retardat, velocitatisque gradum imminuit, & quò maior fuerit contactus, eò minor etiam euadit gradus velocitatis. Sic de alijs impedimentis &c. *Velocitatis gradus aliquãdo nõ variatur variata directione &c.*

Hoc itaque non officit mobili, nè descendendo describat lineam illam mixtam &c. si tellus in orbem cieretur in plano æquatoris &c. quod est enunciandum, animaduersis ijs, quæ superiùs attulimus.

Ex hactenus dictis, generale illud infertur

THEOREMA.

Exemplum LXI.

Si fuerit funependulum AB, quod actum in gyrum describat circumferentiam ADE, tractum verò ad partes C, eousque, vt ipsius longitudo facta sit BG, graue verò interim describat circumferentiam GF.

Dico esse velocitatem per circumferentiam ADE, ad velocitatem per circumferentiam GF in subduplicata ratione longitudinis BA, ad longitudinem BF;

Patet autem ex supra demonstratis &c.

De his tamen, atque similibus quamplurima quidem in Physica. Interim ad aliud non iniucundum Theorema nobis propositum à Præclarissimo Viro considerandum, animus appellendus foret.

Illud etenim nec in postremis habendum, quod ab Aristotele in Mechanicis quæstionibus propositum fuit; ait enim. Dubitatur, quam ob causam maior circulus æqualem minori circulo conuoluitur lineam, quando circa idem centrum fuerint propositi, seorsum autem reuoluti &c. Hæc sanè quæstio inter cæteras præcipua, ac omnium non immeritò difficillima creditur, quæque ad mixti motus naturam explorandam, præcipuè conducit. Quærit igitur Philosophus, cur duo circuli, alter altero maior circa idem centrum simul annexi, & coaptati, si secundum absidem volutentur, ambo spatium æquale pertranseant; seorsum autem separati, si non dissimiliter circumuoluantur, non ita, sed potiùs maior circulus maiorem lineam, minor verò minorem percurrat iuxtà rationem circumferentiæ vnius ad circumferentiam alterius. *Quæstio 14. apud Aristotilem in Mechanicis.*



Vt sint circuli, quorum commune centrum A, & maioris semidiameter sit AB minoris autem AC, reuoluto maiori super rectam BF, ita vt eius expleta sit reuolutio in puncto F,

 atque

atque recta BF æqualis erit peripheriæ prædicti circuli, minoris autem, cuius semidiameter AC, expleta sit reuolutio in E; peruento centro A, ad punctum D, erit CE æqualis BF, cui etiam æqualis erit AD, quamuis circumferentia circuli, cuius semidiameter AC, sit longè minor, quàm CE: Vnde fit,

Exemplum LXII.

THEOREMA.

Dum circulus, cuius semidiameter AB, per rectam voluitur BF, omnes concentrici minores AC, si iunctim moueantur, vnâ volutione percurrunt spatium æquale circumferentiæ circuli, cuius semidiameter AB.

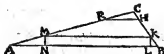
Imò & vniuersalius Theorema concipitur, si dicatur. *Omnes concentrici possibiles, quantumuis illo, cuius semidiameter AB, siue minores sint, siue maiores, si iunctim moueantur vnâ volutione percurrunt spatium æquale circumferentiæ illius, cuius semidiameter AB.*

Sed de hoc opportuniori loco disserendum; longam siquidem tractationem exposcit.

SCHOLION.

Si quis exoptaret demonstrationem eorum, quæ diximus constare ex Elementis, agentes de æqueponderantia grauium super planis inclinatis &c. ita procedat.

a ex constructione. b ex constructione. c 11. quinti. d 16. quinti. e ex constructione. f 17. quinti. g 2. sexti. h 16. quinti. i 22. quinti. k 17. quinti. l 2. sexti. m ex supra demonstratis. n ex constructione. o 22. quinti. p 17. quinti. q 2. sexti.



Quoniam igitur est, a vt BK, ad BH, ita BC ad AC; sed vt BK ad BH, ita est b AM ad AR, ergo vt BC ad AC, ita c AM ad AR, & permutando d vt BC ad AM, ita AC ad AR; sed BH, æqualis est e ipsi AM; ergo vt BC ad BH, ita AC ad AR, & diuidendo f erit, vt CH ad HB, ita CR, ad RA; ergo recta RH erit g parallela rectæ AB.

Quoniam verò est, vti AM, ad AR, ita BK, ad BH, seu AM, ergo permutando h erit vt AM ad BK, ita AR ad AM, erat autem vt BC ad AM, ita AC ad AR, ergo ex æquali erit i vt BC ad Bk, ita AC ad AM, & diuidendo erit k vt CK ad KB, ita CM ad MA, ergo recta MK, erit l parallela rectæ AB, quod oportebat &c.

Vel, vt longè, breuiùs hæc eadem nos demonstremus; Quoniam est m vt CB ad BH, ita CA ad AR, sed vt HB ad Bk, ita est n AR ad AM, ergo ex æquali erit o vt AC ad AM ita CB ad Bk; ergo diuidendo p vt CM ad MA, ita CK ad KB; ergo Mk, q erit parallela rectæ AB. Quod oportebat &c.

DE EXPERIMENTIS

Ad Veritates Physicas indagandas.

CAP. VI.

Ad rectè philosophandum nulla securior via, quàm per experimenta.

AD rectè philosophandum via nulla securior est, quam sternit experimentorum vsus, quamq; experimentis vndiq; suffulti, calcamus; cùm enim omnis philosophandi ratio in eo posita sit, vt mentis agitatione rerum causas, atq; primordia consequamur: vndè Philosophus primo Physicorum Veterum inexperientiam detestatur, & primo de Ortu, eorum vsum ad exploranda principia commendat; propterea expedit, vt cuiusmodi res ipsæ sint, diligenti quadam indagine perquirentes, tandem ad causarum explorationem gradum faciamus; idq; eò tibi magis agendum, nè eorum, quæ nunquam agnouit Natura, causas indagando, vt passim vsu venire solet, quis exprobret; Καθ' ὕδατος γράφεις, ἢ εἰς ὕδωρ γράφεις. Ità planè cōtigit illi, cui Problema, licet dolosè, propositū fuit: Vndè nā esset quod later nigrore affectus solaribus radijs expositus, citiùs quàm imbutus albore incalesceret. Statim interrogatus, gloriæ cupidus, quasi ad Naturæ sacratiora quidem admissus, causam attulit dicens mirum id profectò non esse; quoniam albedo plus lucis participat,

Philosophus delusus ob inaduertentiam propositi problematis.

ticipat, atq; adeò caloris indè proficiſcentis; Hinc autem interrogans venuſtè ſubridens ait, parcas mihi quæſo; nam haud benè Problema tibi propoſui; quod enim de nigredine dicendum, inſulsè quidem albedini adſcripſi. Philoſophus autem ille præ verecundia rubeſcentibus genis obticuit, atq; cogitabundus exoptatæ cauſæ perquiſitione neglecta, omnes ingenij neruos ad nimiam excuſandam audaciam, ac petulantiam contendit. Præſtat igitur ſummam adhibere curam ad inquirendum nùm quod proponitur veritati ſit conſentaneum; et ſi quidpiam eſt ſenſibus deprehenſum; num in hoc aliqua interceſſerit allucinatio; quamobrem ſedulitas in experiendo eſt adhibenda, & ingenij alacritati adiungenda cura.

Nam Polycrates ille Thebanus imitandus videtur in re haud prorſus abſimili. Xerxes Græcos bello quidem adortus, cùm apud Salaminem ſuperatus eſſet, indè conſultò ſe mouit, Mardonium relinquens, vt ſuo nomine bellum idem proſequeretur, qui cùm haud meliori fortuna pugnaſſet, immò fugatus eſſet, fama vulgò percrebuit, Mardonium intra ambitum tentorij ſui theſaurum ingentem humo defoſſum reliquiſſe: tùm Polycrates ille commemoratus, vbi iam multum, diuque pecuniæ theſaurum fruſtrà quæſijſſet, oleum nimirum, ac operam perdens, Delphicum Oraculum conſuluit, qua ratione videlicet pecunias adinuenire potuiſſet: cui, fertur, ab Apolline reſponſum fuiſſe; πάντα λίθον κίνει; ideſt vnumquenque moue lapidem; quòd cùm feciſſet, magnam auri copiam, diuitias ingentes reperiſſe, memoriæ, litteriſque proditum eſt. Vnde adagium; πάντα λίθον κίνει; hoc eſt vnumquenque moue lapidem, ſeu omnia experire, nihilque intentatum relinque. At nonnè iure, ac meritò ſapientiæ theſaurum inquirenti, credimus illud idem Apolline reſponſum fuiſſe? tantò profectò magis, quantò veritatem conſequi eſt difficilius, verique theſaurum recludere eſt operoſius. In hoc igitur omnes ingenij neruos contendat Philoſophus, dum Naturæ myſteria perſcrutanda ſuſcipit: Nihil propterea relinquendum intentatum, ac ob id illi mouendus eſt omnis lapis, vt aliquando demùm gloriari poſſit, ſe voti compotem improbo labore factum fuiſſe; Quamobrem ſi quiſpiam experiendo notauerit vnica vice, quinimmò duabus, vel pluribus, haud potuiſſe eò peruenire, vbi iactis veritatis fundamentis, ſyſtema contemplationis erigat; non debet proptereà deterritus ab opere deſiſtere, ſed potiùs longè pertinaciùs, ac impenſiùs in idem incumbere, vt in quo deſperauerat, eodem tandem exultet. *Experimenta ſunt repetenda.*

Experimentis verò nedum, quæ dicebamus, conſequimur, ſed etiam ſcaturiginem, vnde diſciplina omnis dimanat, nimirùm principia prima complexa, ex quibus, ratiocinatione ſcientiam deducimus; πᾶσα διδασκαλία, καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. Φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν: αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου περαίνονται, καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν. *Omnis doctrina, & omnis diſciplina diſcurſiua ex praexiſtenti fit cognitione; manifeſtum autem hoc ſpeculantibus in omnibus: Mathematica enim ſcientiarum per hunc modum fiunt, & aliarum vnaquaque artium.* Sic perbellè Ariſtoteles, nec immeritò; nam ſcientiam demonſtratione conſequimur, at in demonſtrando haud in infinitum eſt abeundum, ſed ad quædam principia prima, communeſque notiones deueniendum; huiuſmodi verò complexa ſunt; nam de incomplexis nullus hìc ſermo. Si prima ſimpliciter extiterint, terminorum percepta ſignificatione, ſtatim innoteſcunt; alia verò, vel aſſuetudine, quæ tantùm in Moralibus locum obtinent, vel experimentis comparantur; experiendo ſiquidem, rem hoc, vel illo eſſe modo cognoſcimus, ac proprietates ineſſe adnotamus: vnde vel inde concluſiones alias deducimus, eò iam comperto, velut ſtabili principio vtentes: vel eiuſdem cauſam aſſecuti, de eodem ſcientiam adipiſcimur. Magni proptereà fieri debet experimentorum vſus, quem non rarò Philoſophus rerum naturalium contemplationi operam nauantibus commendatum voluit. Inductione ſiquidem ad confirmanda ſcientiarum principia nullum opportunius inſtrumentum reperies: vnde per illam à poſterioribus ad priora proceditur; quoniam vniuerſale prius naturâ eſt particularibus, atque adeò cauſæ rationem obtinet: quamobrem à particularibus ad vniuerſale progredi eſt, à poſterioribus ad priora gradum facere. Ita quidem apud plurimos non obſcuri nominis viros, ea methodi reſolutiuæ rationem obtinuit. At à ſingularibus ad vniuerſale progreſſus experimenta ſupponit. Inde proptereà ipſorum principiorum cognitio, quæ inductione comparatur, vbi experimentum condimus; cùm alioquin Experimentum ſit habitus ex plurimis memorijs eorum, quæ ſub eadem

Experimentis Diſciplinarũ principia inueniuntur.

Initio Poſter.

In demõſtrãdo non licet in infinitũ abire.

Ex principijs, quędã habita terminorũ cognitione cognoſcũtur, quędã aſſuetudine, et quędã experimentis comparantur.

Inductio quã maximè opportuna ad cõfirmãda diſciplinarũ principia.

A particularibus ad vniuerſale progredi eſt à poſterioribus ad priora gradũ facere.

A singularibus ad universale progressus experimenta supponit.

eadem specie percepta fuerunt, quæq; singulatim experti sumus, quod dum agimus, cautè procedendum; nam alioquin decipimur. Ita sanè fit, vt præclarissimis laudibus efferri debeat, qui dum hoc munere fungitur, quàm diligentissimè curat, vt omnia paria sint prorsus, quorum deinde recordatione, non immeritò dici possit expertus; sic enim illæ plures memoriæ, cùm similium prorsus extiterint, experimentum parient.

Verumenimuerò hæc præsertim in Physicis adhibenda sunt, vt eorum opitulatione principijs adinuentis, celebris hæc disciplina plena maiestatis, tandem alicubi dignitatem consequatur suam; cùm alioquin puriores Matheseos partes, vt Arithmetica, & Geometria, ipsis non indigeant; Physico tamen Mathematicæ cum Physica conditionem ferè sortiuntur candem.

Author experimentis operã nauauit Florentiæ ad stabiliendã Naturalis Philosophiæ principia.

Hanc ob causam, vt Naturalem promoueremus disciplinam, oblatâ occasione, præcipuè Florentiæ per multos annos plurimum laboris pertulimus, plurimumque temporis insumpsimus, vt experiendo, quæ vera, quęue falsa ab alijs pronunciata de Naturæ arcanis, dignosceremus, & quæ tandem hucusque latitarunt in tenebris, lætabundi traheremus in lucem.

Ita profectò quæ apud vulgus magnam inuenerunt fidem, quæque iam in Scholis innaluerunt, experiendo denique, partim falsa, partim malè adhuc explicata, deprehendimus. Non ita tamen tantùm fidendum experimentis, vt inde protinus sententiam aliquam ab omni veritate prorsus alienã esse nos inferre debeamus. Sed vt hactenus dicta, aliquo illustremus exemplo, vnum è multis afferemus in medium.

Antiperistasis hactenus malè fuit explicata.

Ἀντιπερίστασις ergo, perperam hactenus explicata esto; Philosophantium enim vulgus credidit obsessam qualitatem ad contrarij præsentiam intendi, vocem hanc antiperistasis interpretantes, quasi circumsistentiam, & obsessionem contrarij.

Hi porrò frequentes, ac familiares experientias supponunt, quibus nimirùm qualitatem in aliquo subiecto intendi, dùm hoc obsidetur, ac oppugnatur ab agente contrario, confirment, videlicet ab alio corpore contrariam qualitatem possidente. Irrident autem quemcunque dicentem non id realiter contingere, sed potiùs ex nostri sensus quadam affectione semper id nobis apparere quod rectè Galenus aduerterat.

Quî id ratione detegendum foret, diù cogitantibus nobis, se obstulit experimentum, quod inter cætera .S. Principi Leopoldo nos exhibuimus.

Experimentũ ad reprobãdã antiperistasĩ, pro vt hactenus explicari consueuit.

Sumpsimus vas plumbeum, in quod calidam aquam infudimus; in hanc porrò Thermometrum demersimus, cuius tubulus per tabulæ foramẽ intrusus horizontaliter constitutæ; quo minus hinc, illinc caderet, detinebatur: impedimentoque erat, nè vaporum effluuium obseruationem perturbaret; Obseruato igitur gradu, ad quem vi caloris vini spiritus intus inclusus ascenderet, cùm paratum esset vas glacie plenum, statim hoc ad vas plumbeum admoui, ita vt plurimum huius mergeretur in glaciem, tunc autem oculorum acie diligenter adnotaui, nùm Thermometrum noui quicquam ostenderet: nil planè deprehendi, quod vtique contigisset, si calor aquæ à glaciei frigore obsessus maiorem intensionem suscepisset; Thermometrum enim calorem adauctum ostendisset, propterea quòd vini spiritus intus existens, ambientis adaucto calore ascendit; penitus tamen immotus remansit.

Responsionis præoccupatio.

At quia potuisset quispiam occurrere dicendo, contrarij quidem obsessione qualitatem intendi, quando hæc iuxtà rei naturam extiterit, calor autem aduersatur aquæ; quamobrem contrario modo experimento facto, nimirùm in vase plumbeo glacie quidem immissa, ac in alio vase aquâ feruenti, nec absimili modo, ac supra, omnibus perpetratis, eadem contigisse quæ priùs, scilicet nullam in Thermometro mutationem, quamuis frigus glacici foret obsessum, deprehendimus.

Hunc itaque in modum antiperistasim veteri sensu quidem explicatam profligauimus, simulque deprehendimus etiam minimè cum veritate consentire, quæ, tanquàm effectus illius, recenseri consueuerunt.

Experimenta, quibus nõ nulli probare nituntur antiperistasim veteri sensu explicatam.

Et quod aquæ puteales æstiuo tempore frigidiores, quàm tempore hyemali, percipiantur: sic & Cella vinaria. Præterea dum in calcem, quam viuam appellant, aquam infundimus, tantus calor excitatur, vt vehementer aquam ebullientem reddat, quamuis infusione olei nunquàm id contigisse compertum sit. Insuper ignem vehementiùs accendi per modicam aquæ infusionem; Fenum diù conclusum accendi; Fimum summoperè incalescere; Triticum in foueis inclusum, calorem itidem concipere; Atque tandem grandinem

dinem frigidiorem, ac propterea densiorem, & duriorem niue, vere, & autumno, atque hyeme, tepente aere; quoniam hisce temporibus frigus ab ambientis contrario calore obsessum, inualescit. Sic ventres Animalium hyeme, ac vere, naturâ calidissimos esse, scripsit Hippocrates. *Sect. prima Aph. 15.*

Duplicem ob causam reprehensionem incurrunt, & quòd falsa assumpserint, & quòd non causam pro causa quidem attulerint. Primum sanè falsum omninò, siquidem aquæ puteales collatæ cum ijs, quæ sunt expositæ aeri feruenti, vt sunt stagnantes in superficie telluris: sunt nanque frigidiores, non tamen se ipsis, prout sunt tempore hyemali, quod & de aere in specubus subterraneis, deque Cellauinarijs dicendum. Quod conuincitur facilè, cùm nec in aquis putealibus æstiuo tempore, nec in Cellauinarijs, siue specubus, oleum congelatur, quod tamen hyemali tempore passim euenit; quod etiam Thermometro non semel à nobis comprobatum fuit.

Occurritur experimentis allatis.

Ad calcem quod attinet viuam: non causam prò causa attulerunt; non enim id ideò euenit, quoniam calor ipsius ab ambiente frigore obsessus inualescat; Et certè subit animum admiratio, quòd hi tam oscitanter, crassaque Mineruæ philosophati sint; nam ad id aqua feruenti adhibita, vehementiorem calorem excitari, non semel nos docuit experientia. Et quidem ipsa circumdata glacie, vel niue, nisi fuerit humore perfusa, nullus excitatur calor, vt si vas, vbi illa concluditur, niue, vel glacie circumdatum fuerit; nunquam enim ignescet. Phænomenon igitur istud aliunde, iure dixeris, trahere originem suam.

Calx viua magis excandescit aqua feruenti, quàm aqua frigida.

Mirabile id videtur dictu, quòd calx commemorata, vini spiritu super infuso, non incalescat, nec dissoluatur, quamuis ille potentia calidus, frigidus tamen actu, sit. Non officit autem eum esse potentia calidum, quod ex dictis de aqua feruenti, cuique facillimum erit intelligere. Huiusmodi quidem spiritus humor admodum tenuis est, proptereaque facillimè quidem se insinuans; nec tamen accidit quod per aquam communem, vel etiam distillatione eductam ex herbis. Vides hinc, quàm prudenter, & scitè pronunciatum fuerit, decipi nimirùm illos, qui ad pauca respicientes, facilè pronunciant. Illud igitur attendendum in experimentis, nè circumstantiæ, vt plurimùm à sensibus remotæ, & velut ad experimentum ipsum non spectantes, negligantur; Passim namq; contingit, vt spreta, magno sint in pretio habenda. Si quis enim non aduerterit, aquâ calidâ superinfusa, calcem incalescere, dissoluique magis, quàm per aquam frigidam; facilè animum inducet, vt credat id à frigiditate, veluti contrario iuxta posito, & vt aiunt, per antiperistasim proficisci. Præterea si non fuerit expertus, quòd de vini spiritu dicebamus, facilè suadebitur, id ab humido ortum ducere. Quòd si experimento non innotuerit, id superiniectione olei lentorem quendam habentis non contingere; facilè id humoris tenuitati referet acceptum.

Spiritus vini superinfusus calci viuæ nullam facit mutationem in eius calore, nec illam dissoluit.

Hæc autem, & similia iuxtà principia è Naturæ visceribus deprompta, opportuniori loco explicabo.

Maximè vulgatum est ad glaciei confectionem, exhalationes terrestres, vnà cum aere requiri; quoniam non dum deprehensum fuerat experimento, aquam in loco, vbi nullus aer, vel saltem minimus, ac ferè imperceptibilis omni quidem industria, nec terrestris halitus reperitur, glacescere: cum hoc tamen discrimine, quòd glacies hæc sit albicans, opaca; quæ verò sub diù conficitur perspicua, luminique peruia: illa densior, maiorisque grauitatis in specie: hæc rarior, minusque grauis. Magni propterea interest operam iugiter experimentis nauare, ad veritatem in rebus Physicis explorandam.

Aquã glacescere absq; aeris permixtione cõprobatur.

Ac in experimentis conficiendis, negligendas non esse, nec minimas quidem differentias, hoc vnum suadere poterit. Obseruemus Artifices chalybem, ad cultros, vel instrumenta sculptoria conficienda, temperantes: comperiemus enim pro ratione moræ, quâ fuerit detentus in igne, fragilitatem, vel lentorem, duritiem, vel mollitiem contrahere. Temperatura siquidem ita perficitur.

In experimẽtis conficiẽdis nè minima quidẽ differẽtia est neglegenda.

Chalybs inijcitur in ignem, ita vt non candidus, sed ignitus tantùm euadat; nam candidus ob summam duritiem, nimis friabilis est; Mox verò exemptus ex igne, nigroque sapone illinitus, iterum in ignem immittitur, vt denuò ignitus factus, & ex igne quidem exemptus, illicò in aquam immersus frigescat; quod fieri solet, vt vi ignis, opitulante sapone, chalybs scotias ammittens, atque adeò expurgatus, ignique super impositus colores, scilicet aureum, seu vt aiunt, frumentinum, violaceum, & album ostentare possit: ex huiusmodi autem coloribus chalybis temperaturam conijciunt; propterea quòd aureus color

Quomodo chalybis tẽperatura perficiatur.

color nimiam duritiem, atque adeò frangibilitatem arguit: violaceus verò duritiem minorem; albedo tandem mollitiem declarat. Vnde sagaciores Artifices medium inter aureum, & violaceum colorem, seligunt, velut apertissimè testantem, tunc ipsum chalybem aptiori esse temperatura ad cultros, aliaque scissoria instrumenta conficienda; nam alioquin præ duritie significata à colore aureo, culter non seruat aciem, sed ob friabilitatem statim vsu ineptus euadit, quemadmodum præ mollitie significata à colore violaceo tendente ad albedinem, & multò magis ab ipsa albedine contritione rotæ cotariæ nullam aciem consequitur. Vides igitur exiguas differentias paruifaciendas non esse.

E coloribus ad temperaturã quis magis idoneus.

Natura vniformi difformi quadam actione operatur.

Neminem, etsi vix prima Philosophiæ limina salutauerit, vulgatum illud præterit effatum, Natura scilicet vniformi difformi quadam actione operari, quæ si fuerit mensurata lineis, augetur vel descrescit in Arithmetica medietate, nimirùm secundùm æquales excessus; nisi tamen quispiam notauerit duo quidem in actione concerni, nempè spatium, & tempus.

Si id in ordine ad spatium vsurpauerit, facilè decipietur; haud enim perpetuò rem sic se habere, deprehendet; graue siquidem descendens, non ita sibi velocitatis incrementa superaddit secundùm spatia peracta, sed potius iuxta temporum mensuram, spatia quandoquidem peracta sunt in duplicata ratione temporum, atque velocitatum, estque velocitas ad velocitatem, vt tempus ad tempus.

At nec aliquando siue tempus, siue spatium respicias, id à natura factum reperies. Magnes enim dum ferrum trahit; vel hoc ad illum properat attractum, non ita fertur eã lege, vt magnes actionem exerceret, quasi nimirum vniformi difformi quadam ratione, iuxta, vel spatij, vel temporis partes, quod experimento, me id aliquando fuisse consecutum, memoria teneo. Accepi siquidem vas oblongum vitreum longitudinis vnius bracchij, cum quarta parte, latitudinis, profunditatisque sextæ partis, illudque repleui aquâ: chalybeam acum prætenuem accepi, pronamque superimposui aquæ, tantã quidem industriã, vt aggere facto ex aere, chalybs cum aere, euaderet minùs grauis in specie quàm aqua, ac propterea huic innataret, cùmque hanc ad extremum vnum ipsius vasis constituissem, æquæ, vt dicebam, innatantem; ad extremum alterum locaui tabellam, cui superimposui magnetem, unde uiginti unciarum, quem uersus acum admouebam donec aduerterem, hanc actione affici, ac allici ad unius bracchij ferè distantiam; Cumque uas aquâ plenum perspicuum esset, facilè partitiones æquales in papyro subtus constituto se se dabant in conspectum: cæpi uerò tunc Cronometri, seu pensilis uibrationes numerari, cùm primùm acus ad magnetem properaret: spatijsque peractis diligenter annotatis, nullam seruari legem uniformis difformis actionis, aduerti; nam acus lento gradu incedebat, paulum accelerato usque ad spatij dimidium; mox tanta celeritate motum prosequebatur, ut nemini vibrationes ipsas numerare liceret. Præerat S. Princeps Leopoldus, cuius quidem iussu, meum experimentum centies à diuersis repetitum fuit, quod semper eodem contigisse modo testes esse possunt, quotquot ibi aderant.

Experimentum ad magnetis vires explendas.

Descensus grauium.

Grauia non descendunt Magnetica vi à terra attracta.

Hinc mihi secundo loco, conijcere licuit, insulsè admodum plerisque grauium descensum contingere magnetica quadam attractione, quasi nimirùm tellus magnetismo suo, corpora, ad se trahat grauia, non quod hæc suaptè naturâ descendant; Id enim si hunc in modum se haberet, non secùs contingeret attractionis progressus, ac accidisse in acu superiùs commemorata, dum videlicet magnetica vi, super aquam traheretur, nam ab hac spatia peracta non erant in duplicata ratione temporum, quo pacto se se grauia mouere, iam apud omnes in confesso est, nosque non semel experti sumus.

Aliunde circumspectio in experiẽdo probatur.

Circumspectionem in experiendo sæpè sepiùs inculcatam suadet etiam & illud, quod passim obseruare licet apud Artifices, quorum est auri, argentique perfectionem, puritatemque probare. Si enim argentum inuolutum cortice plumbea in cineritio, Italicè Copella constituas vehementer concitato igne vi follium, vt testa ipsa ignescat, liquatus fusum quidem, atque liquatum argentum, cum omnem impuritatem hunc in modum amiserit, statim è fuso non nihil congelatum, siue consistens euadit, eodem perseuerante caloris gradu. Quod si Philosophum prætererit interroganti vnde esset, quod metallum imminuto calore cuius exulterantia fusum, erat, illicò congeletur. Occurret dicens id mirum non esse cùm igneæ euolauerint particulæ, solutum quibus metallum reddebatur. Verùm si instet ille, idem ex parte, contingere nil penitus imminutò calore, vt paulò supra dice-

diceba̅tur, interrogatus aduertet, se adæquatam haud reddidisse rationem: vt in re proposita nil addendum superſit.

Nonnulli perſcrutantes naſcentium ſpontaneum ortum, ſatis leui quadam coniectura animum eĩ informarunt ſententiâ, vt arbitrarentur prædicta naſci, quatenus, vel ſemina ad ſubiectam materiam, locumque delata fuerunt: vel, ſi ſit ſermo de inſectis, parua, & exigua quædam animalcula aliunde fuerunt traducta. Ita quidẽ ex carnibus vermes oriri aiũt: vel quia Muſcæ exiguos illos, ac ſenſibus imperceptibiles, vel eorum ſemina eò tranſtulerint, vbi tandem poſt aliquod temporis ſpatium ſe ſe dant in conſpectum, vel excrementa alui, quaſi nimirum ſemina, vel fermentum iniecerint, & id genus alia, quòd obſeruauerint, ex eadem carne partibus excerptis, ex vna earum ſi fuerit benè tecta, vt in vaſe vitreo vndique clauſo conſtituta, vermes haudquaquam concipi; ſecus autem ex illa, quæ libero aeri expoſita fuerit. O quantum eſt in rebus inane! Sapit nè ille animus, qui hæc comminiſcitur? quis vnquam deſipiet? In eadem verſamur naui, nec ſpontaneus naſcentium ortus eſt ſatis explicatus, cùm eadem redeat difficultas de naſcentibus eo in loco, vnde traducta fuerunt. Ad ſemina quod attinet, tolerabile quidem illud foret, ſi experimentum, de quo gloriantur, aliquo ſaltem modo conuinceret. Concluſimus herbam in vaſe vitreo, aliò tamen ſpectantes, & ita concluſimus, vt nullus aditus pateret aeri ambienti, ad eum modum, quo Ars Spagirica præcipit: poſito autem illo ſub fimo macerationis gratia (id enim opus à nobis intentum requirebat) & quidem per ſpatium quadraginta dierum; mox inde extracto, eodemque recluſo, vermes adinuenimus non paucos. Audio dicentes illos, iam vel exiguiſſimos vermes, vel eorundem ſemina in herbas fuiſſe traducta: ſed, vt ſuperiùs dicebam, ſupereſt inquirendum, qua ratione vermes illi ſuum ortum agnouerint eo in loco, vnde, quicunque ſit hic Naturæ miniſter, illos tranſportauerit: quod ſi ſemen tibi illud videatur, non propterea te diluiſſe difficultatem exiſtimes, quæ generatim proponitur de ortu ſpontè naſcentium, vbicunque ille contingat. Et mirum eſſet, quòd in ſingulis quercus pſeudo-gallis vermes oriantur, vel quatenus in ſingulos flores eorum ſemina, vel exigui ipſimet vermes à Muſcis traducti fuerint. Vtinam hoc æuo Domitianus inter viuos ageret; ægrè enim ferret, ſe tandiù acriter Muſcas inſectatum fuiſſe, animaduertens tanto in honore habendas eſſe, vt vniuerſæ Naturæ præcipuum regimen, iuxtà quoſdam, ijs deferendum ſit. Æquè etiam & mirum foret tantam ijs ineſſe ſagacitatem, curamque tantam, vt in ſingulis Myrti folijs, vel exiguos vermes, vel eorundem ſemina deponant. Quæ profectò non minus de ipſis excrementis vrgent.

Gassendi opinio.

Leuis quorundam in expetendo coniectura.

Sed fortè nimia gloriæ cupiditas, plerumq; minùs expertem, minùſq; cautum in explorandis Naturæ ſolertis operibus experimentali via decipit, feſellit; nec mirum; experimentum enim periculoſum, & fallax, dicebat Hippocrates. Nos etenim vaſe concluſam carnem ſub fimo conſtituimus, debitoq; temporis interuallo, quos alioquin vermes ibi naſcentes videre non licuiſſet, apertè conſpeximus, ac exclamauimus: ô quam veritati conſentit effatum illud, ***Animarum quodammodò plena ſunt omnia.*** Diſperſa quandoquidẽ ſemina ſunt per vniuerſum Orbem, & prout in loco fuerint ſibi conſentaneo, non autem vbique, ſuas exerunt operationes.

Animarum plena sũt omnia 3. de gen. anim. cap. 11.

Non omnis fert omnia tellus.
India mittit Ebur, molles ſua thura Sabæi.

Nam rectè ille

Continuò has leges, æternaq; fœdera certis
Impoſuit Natura locis.

Nec frumenti grana vbicunque ſata, nè dicam in horreo ſeruata, germinare deprehendes: ſic in pleriſque ſunt rerum ſemina, quæ à ſuis muneribus feriantur diuerſimmodè præpedita; quæ cùm aliquando fuerint expedita, quod ſuaptè naturâ poſſunt, moliuntur; quod ſcitè admodum videtur ab Auctore Naturæ factum fuiſſe, cùm ad Vniuerſi pulcritudinem varietas conducat in primis, quæ ab hac iam dicta commixtione ſeminum quàm maximè pendet. Nec propterea id interturbat ipſius Naturæ opera, cùm hæc ea negligat in vno, quod in aliquo alio magnificit: ita planè in vegetatricis animæ operibus, exempli gratia in quercu, non officiunt ſemina vermium naſcentium, qui aliquandò dum alas aſſumunt, Muſcæ foras erumpunt, quod planè in pſeudo-gallis iam dictis perpetuò contingit.

Varietas magnoperè ad Vniuerſi pulchritudinem conducit.

Cc Rectè

Experienti lapis omnis mouendus.

Rectè superiùs adnotauimus, experienti lapidem omnem mouendum esse, non rarò siquidem vsuuenit, vt in postremis habendum non sit, quod alioquin paruifaciendum uideretur. Quis enim suspicari posset, magni interesse ad seminis germinationem aerem esse debere perflabilem, cùm alioquin nihil desit eorum, quæ ad id uidentur conducere, terræ nimirùm fæcunditas, uelut illius, quæ plurimo nitro quidem abundat; quantum sat est humor scatens, blandus calor, isque cælestis adest. Perflabilem autem aerem desiderari hinc planè intelliges; Cucurbitæ semina terræ commisi, terræ autem partem uase quodam uitreo tegi, ita ut intra ambitum terræ, cui superimpositum erat uas, sex, uel octo prædictorum seminum sata fuissent, reliqua erant defossa terræ, aperto aeri expositæ; tribus diebus transactis, aduerti unumquodque semen commissum terræ libero aeri expositæ germinare cæpisse; quæ autem latitabant sub terrà tectà iam dicto uase, nullum specimen germinationis exhibebant; iterum post quartam diem obseruatione repetità, idem aduerti, nec noui quicquam accidisse deprehendi; quod cùm spatio septem, uel octo dierum minimè notare licuisset, unde conijci posset nedum initium, sed nec etiam spes germinationis in seminibus terræ commissis, cui uas incumbebat, cùm alioquin cætera uberrimè crupissent, ac feraciter germinassent; non erat, cur hæsitarem de illa necessitate aeris perflabilis, quem fortè quispiam negligendum duxisset. Itaque quæ ferè sunt paria uidentur exhibere contraria: in superiori siquidem experimento conclusus erat aer in uase, & è uegetabili orta sunt infecta: in hoc itidem aer undique clausus erat, & semina tamen manifesta non germinant; ibi fimi calor præter eum, qui est aeris ambientis: hic ipsius terræ, & ambientis præstò erat; ibi calor semina fortè latitantia promouebat ad opus: hic iners conatum omnem experiebatur inanem. Vides igitur ad ritè experiendum oportere Philosophum Argum esse, & ad plurima respicere, cùm hinc inde suppetant plurima, vnde Natura longè lateq; diuersa molitur.

Experimenta.

Communis opinio de cõcoctione ventriculi per modũ elixationis.

Celebris opinio fuit eorum, quibus ventriculi concoctio per modum elixationis fieri videbatur, eaque calore perfici; quasi generatio ipsa eò citiùs, ac perfectiùs celebretur, quò validior extiterit calor, cùm tamen experimento comprobatum sit caloris gradum in animali feruidioris temperaturæ non excedere illum, quem Sol æstiuo tempore, Leonem signiferi partem, scandens, in hæc inferiora effundit, atque mortalibus impertitur.

Calor animalis feruidioris natura nõ excedit æstiuũ, Sole scandete Leonem.

Non immeritò propterea dixeris, ad id humore, veluti fermenti munere fungente, Naturam vti; cuius non leues sunt coniecturæ ex quorundam animalium musculosis ventriculis, vt Auium omnium, paucis exceptis, quibus cùm dentes desint, ob id Natura musculosum ventriculum ad cibaria conterenda largita est; sic enim huiusmodi præparatione, faciliora quidem coctu redduntur; at verò nisi humor accessisset, qui ad hanc concoctionem, fermenti instar, conduceret, caloris tantùm energia, quâ certè ventriculus ille ad cibaria duriora superanda, quamuis attrita, minimè pollet, concoctio ipsa nunquam perficietur.

Natura vtitur humore, tanquàm fermento, ad celebrandã concoctionem in animalium ventriculis.

Quamobrem ad hanc attritionem confirmandam, aliquando sphærulas quasdam vitreas Gallinis exhibuimus: erant tamen vacuæ, ita vt cortex tantæ foret crassitiei, quantæ Iulius, argenteus nummus. Cùm has Gallinæ, quibus per os illas ingessimus, decem, vel duodecim horarum spatio intra ventriculum detinuissent, gallinas ipsas dissecuimus, & adinuenimus prædictas sphærulas contritas, sine vlla ventriculi læsione. Curauimus in extractum ventriculum similes sphærulas intrudi: postmodum autem eundem super tabulam constituimus, valideque manibus pressimus, donec prædictarũ sphærularũ fractio contingeret; & dilaniatũ omninò ac laceratum illum aduertimus; vnde animum incessit admiratio, cur hoc idem viuo ventriculo non contingeret; ac propterea magis inualuit, atque percrebuit suscipio de quopiam humore, quo quidem ad cibaria facilè conterenda plus, vel minus vteretur Natura: eò vel maximè quòd in hunc finem inter edendum, obseruatio docuit, quàm frequenter ab huiusmodi animalibus exiguos lapillos assumi.

Experimentũ conducens ad cognoscendum qua ratione concoctio in ventriculo perficiatur.

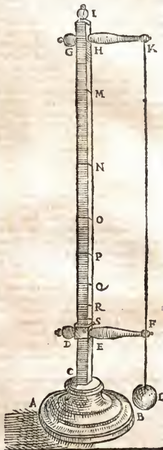
Vana credebatur suspicio, cùm nullus appareret humor tàm validus, vt vitrum corrodere posset; aquæ enim fortes metalla validissimè corrodentes in vasis vitreis citra læsionem seruantur; dum itaque animus fluctuaret varijs sententijs distractus, quid hac in re decernendum ignorans, ecce extemplò transmissum ad Serenissimum Principem Leopoldum à Medico quodam Politiano vitreum vas, œnophorum scilicet instar cribri perforatum, ita tamen vt foramina quædam cæpta solum, non dum absoluta forent, vbi quædam adhæ-

Historia mirabilis, unde colligitur dari humorem, à quo vitrum corroditur.

adhærens materia se se parui monticuli instar attollens cernebatur; cupientibus nobis huiusmodi phænomeni causam inquirere, fidelissimè relatum fuit, vas illud à prædicto Medico Omphacio, hoc est humore ex vua acerba expresso repletum, Solisque radijs expositum fuisse. Quis autem vnquam, alacri etsi donatus ingenio, id conijcere potuisset? quis nisi id oculis vsurpasset, animum induxisset, vt crederet contigisse? Quæ dixisse iuuat, vt cuique sit exploratum in Naturæ thesauris quædam præter omnium hominum opinionem latitare, ac proinde in experiendo magnâ esse opus solertiâ, diligenti perquisitione, pertinaci labore, nè miserrimè decipiamur.

Inter cætera, quæ quidem in Naturæ operibus perscrutandis magni refert attendere, tempus, existimo, quod est rerum naturâ constantium, vel saltem motus earum mensura, itemque pondus, seu grauitas. Ad tempus dimetiendum nullum opportunius videtur instrumentum, quàm Pensile, seu Pendulum, &c. atq; *Χρονόμετρον, Chronometron*, quod adiuncto diagrammate conspiciendum exhibemus, videlicet AIB, in quo cernitur regula ænea CI, cui infixum est GHK; ab huius autem extremo K, sphærula B itidem ænea filo alligata KF pendet; per ipsam autem regulam CH excurrit sursum, atq; deorsum regulator DEF; (sic enim ab eo, quo fungitur munere, lubet illum nũcupare) excurrit, inquam, beneficio capsulæ DE, per filum ipsum mediante foramine F: factæ verò sunt in regula diuisiones M,N,O, P,Q,R,S, vt spatia debitam rationem seruent pro vsu ipsius Penduli. Dum enim fuerit Pensile tantæ longitudinis, vt tres pedes Parysinos cum sextante æquet, Mersenni obseruatio docuit, vnius horæ spatio fieri uibrationes 3600, quarum propterea quælibet est unum minutum secundum: temporum autem rationes attenduntur penes diuisiones ipsius regulę; sunt enim longitudines in duplicata ratione temporum. Itaque si duo sint Pensilia, quorum unum longitudine quadruplum sit alterius, si maior chorda aliquo tempore uibratur semel, chorda minor in dimidio tempore semel uibrabitur, cùm ratio maioris ad minorem fuerit quadrupla; vnde si placet, ut tempus uibrationis alicuius Pensilis duplum sit temporis uibrationis alterius Pensilis, necesse est, longitudinem illius quadruplam esse longitudinis istius, hoc est oportet longitudinem funis ad funis longitudinem in quadrupla esse ratione; atque adeò, quando Pensile unum fuerit quadruplum alterius, tempore, quo maius unam perficit uibrationem, & minus perficiet duas: unde longitudines ipsorum sunt reciprocè in ratione, qua quadrata à numeris uibrationum; sed eædem longitudines sunt, ut quadrata temporum homologè. Vt sit Pensile quadruplum alterius, tempus unius uibrationis à Pensili maiori, est duplum temporis à Pensili minori; quare longitudo, ad longitudinem erit ut 4. ad 1. hoc est in ratione quadratorum abs 2. & 1; tunc insuper tempore uibrationis Pensilis unius, Pensile alterum tres uibrationes efficiet, quando funis illius nouies continuerit funem alterius; unde fit, quemadmodum dicebamus, ut eã funiũ longitudines reciprocè rationẽ inter se habeant, quę quidẽ est inter quadrata numerorũ uibrationũ, quæ in eodẽ tem-

Χρονόμετρον, Chronometrõ. Pensile, seu Pendulũ, seu Funependulũ.



pore perficiuntur. Itaque si fuerit pensile, cuius longitudo sit brachium vnum; tempore autem A, ab eo confectæ vibrationes numerentur 60. eodem verò tempore alterius pensilis vibrationes numerentur 10; erit vt 3600. quadratum ex 60, ad 100. quadratum ex 10, ita reciprocè longitudo pensilis cuius tempore A, decem vibrationes numerabantur ad longitudinem alteriùs, cuius eodem tempore A, numerabantur vibrationes 60; huius igitur longitudo, vt est vnius brachij, ita quidem, & illius est brachiorum 36. Ita fit, vt quemadmodum graue cadens acquirit in fine primi momenti spatium vnum, in fine secundi quatuor, in fine tertij nouem, in fine quarti sexdecim: atque adeo sint inter se, vt quadrata temporum; Ita si quatuor extiterint pensilia, vnum longitudinis vnius brachij, alterum quatuor, tertium nouem, quartum sexdecim, eodem tempore quo quartum vnam perficit vibrationem, primum absoluet quatuor, secundum duas, tertium, vnam cum tertia parte; sic enim longitudines pensilium, sunt in duplicata ratione quadratorum à numeris vibrationum reciprocè.

Præclara Chronometri phænomena. Præter vsum quem hoc præstat instrumentum ad ipsius temporis dimensionem, insignia sunt ab eo prodeuntia consideratu digna, eiusque singularia symptomata latissimum aperiunt campum ad philosophandum, è quibus, vt vnum vel alterum attingam. Primum illud occurrit, quòd si graue appensum filo, fuerit constitutum in linea horizontali, vbi, & clauus, cui filum est alligatum; filoque tenso, si graue demittatur, quantum temporis insumere deberet quoad perueniret ad lineam perpendicularem descendendo, tantundem hinc ad eandem horizontalem ascendendo, nisi aliqua ei forent impedimento, cuiusmodi sunt, & resistentia medij, & grauitas funis, eiusque crassities, atque tandem grauitas eiusdem mobilis. De duobus prioribus nemini dubitandum, nam aer resistens impetum sensim retundit, & grauitas ipsiusmet funis, seu chordæ, quæ, pendulo quidem abducto à perpendiculo, partes habet alicuius, etsi modicæ grauitatis, non nihil pendulum retrahentes ad perpendiculum. Quod inde cuique persuasum erit, si animaduertat tanto minus sensibiliùs, citiusque desinere vibrationes, quantò crassior, ac ponderosior ipsamet chorda extiterit: vnde fit, vt quò chorda gracilior, atque subtilior fuerit, eò altiùs vibrationes resurgant.

Tertium autem præcipuum, etsi quibusdam non probetur, est grauitas eiusdem mobilis, quæ semper contranititur motui præter naturam eius. *Quorundam error.* Nihil enim magis insulsum, nihilque magis inuerisimile, quam consilium deliramentum, existimantium, quodlibet corpus quiescens pensile indifferens ad motum, à qualibet virtute motiua, quantumuis diminuta, moueri posse.

Foret id quidem admittendum si corpus huiusmodi intra Naturæ cancellos extaret, cui nulla quidē esset ad motū insita propensio; at qui vnquam sanæ mentis id animo assequi poterit? quod enim natura constat, cuiusmodi sunt corpora, de quibus hìc habetur sermo, illud habent in primis, vt suoptè ingenio motum subire exigant, cum hac autem indole, naturáque, haud indifferentia cohæret. Natura siquidem ad vnum fertur, cui nihil magis quam indeterminatio aduersatur. Itaque si vibrationes decrescant, & ad extremum desinant, ne putes id tantummodo à resistentia medij, vel à grauitate chordæ, eiusuè crassitie, ortum ducere, nam & id quoque magnâ ex parte grauitati corporis chordæ appensi, debet acceptum referri.

Quorundam allucinatio. Hìc porrò non possum non mirari quorundam inscitiam; Et quia existimantes aquam, & multò magis aerem nullatenus diuisioni resistere, hìc apertè pronunciant, aeris resistentia retundi pensilis impetum; si namque diuisioni non resistit, qui fieri poterit, vt huic vibranti resistat? Et quia vibrationum desinentiam, ac imminutum impulsum, nullo modo à grauitate mobilis, ortum ducere arbitrantur, cùm tamen existiment chordam præ grauitate sua, in causa esse, vt pensilis impetus imminuatur.

Mirabile aliud Chronometri Symptoma. Aliud est quoque non minoris admirationis, quod si pro corpore vnius vnciæ appendas alterum mille librarum, ita tamen vt corpus, vnà cum chorda æqualis longitudinis sit, vibrationes vtriusque pensilis, æqualis sint durationis, ita vt quantum temporis insumitur in vibrationibus centum pensilis vnius vnciæ, tantundē insumatur in vibrationibus alterius mille librarum. Num referat quicquam si fuerint eiusdem, vel diuersæ grauitatis in specie; satis intelligitur ex grauibus cadentibus ad proprium centrum, quorum illud quidem est exploratum, nihil interesse inter durationem motus corporis grauioris, & minus grauis;

uis; non enim ingens lapis velociùs, quàm lapillus cadit; Si tamen fuerint eiusdem grauitatis in specie; nam alioquin, si fuerint diuersæ in specie grauitatis, quod maioris grauitate præditum est, illud celeriùs, quod minori, segniùs descendit, sed hoc etiam superiori capite adnotauimus.

Nec prætermittam aliud non minoris stuporis, videlicet haberi à maiori, vel minori longitudine chordæ, quod à maiori, minorique pondere non habetur; quo enim chorda breuior est, eo etiam vibrationes crebriores fiunt, quo prolixior eò rariores. *Mirabile aliud symptoma.*

Illud itidem accedit, quòd si grauia fuerint diuersa, quod maioris est grauitatis, longiores seruat vibrationes, atque adeò plures quàm minùs graue; leniora siquidem corpora ab aere magis retardantur: vnde si duo corpora pondere inæqualia chordis appensa fuerint, & pensilium instar dimidiam circumferentiam absoluant, quod grauiùs est altiùs ascendet, pluresque decursus perficiet, quod faciliùs profectò deprehendes, quò maior erit ponderum differentia.

Hinc facilè constat ipsius aeris resistentia: vnde pensilis ope, hæc magis quàm casibus in perpendiculo factis, innotescit. *Aeris resistentia*

Et illud quoque mirabile, nimirum vbi quiescens in perpendiculo graue abduxeris, tametsi illud non impellas, esse tamen idem ad perpendiculum recasurum, ac rediturum atque adeò hunc in modum itus, reditusque varios, peracturum. Placuit nonnullis id pro causa recognoscendum, quod graue illud in perpendiculo constitutum ita est, vt quasi inter duas oppositas vires, terræ attractricem, chordæque retentricem libretur: adeò videlicet, ut grauitatis axe coeunte cum chordæ ductu, attractio, atque retentio, graue ipsum ueluti partiantur, unde ibi quiescat. Veruntenimuerò extra perpendiculum, ut ipsi aiunt, axis fit attractionis liber; quamobrem deorsum, etsi non directè, sed obliquè fit motio ob cohibitionem scilicet, qua chorda axis commutationem facit, atque commotionem in arcum conformat, quousque denuo chorda ductam eundem assecuta cum axe, fuerit in eodem perpendiculo. Addunt præterea, & illud, quod ibi denuò graue quiesceret: quia tamen motus deorsum non deperdidit, sed eousque uires acquisiuit, propterea graue pergere deorsum impotens, non impotens tamen arcus continuatione in orbem pergere, perpendiculum ipsum prætergreditur, quousque iterum axe magis magisque libero attractioni facto, ille impetus sursum paulatim refractus euanescat, ac inchoetur reditus per eandem uiam deorsum, non dissimili ratione prætergressurum perpendiculum, & in ascensu tandem desiturum, ut alius itus incipiat, cui reditus alius iterum, ac iterum succedat. *Pensile cur tandem quiescat; opinio quorundam.*

Hæc tametsi industriosè sint dicta, puerilia tamen existimo, velut innixa falsissimo fundamento, quod videlicet in illa attractrice terræ virtute consistit, quam aliàs nos ablegandam veluti commentitiam, non immeritò duximus. *Reijcitur.*

Causa potius ea profectò credenda, quod à quiete recedens graue, temporibus æqualibus, suapte natura descendendo sibi superaddit æqualia celeritatis momenta; quod nedùm illi conuenit, dùm liberè descendit, sed etiam dùm fuerit chordæ appensum; atque adeò id cuique exploratum velim, ex eò quod dùm illum arcum describit, minorem ictum propè initium efficit, quàm remotiùs, vt maximus sit in perpendiculo, vbi tantum celeritatis consequitur, vt non impeditum, vndecunque id contingat ad horizontalem lineam, vnde discesserat perueniret, ab impedimentis autem retunditur conceptus impulsus, quem nemini sanæ mentis inficiari licet. Cessante igitur impulsu à quo itus, ac reditus proficiscitur, quiescat oportet, & quidem in linea perpendiculari, quoniam hac ratione seruat Naturæ leges, vt quantum fieri potest ad centrum grauium accedat, quod secundùm chordæ ductum assequitur; dùm in perpendiculari posita est. *Opinio probata.*

Vibrationes autem ipsæ itus, reditusque, quamuis initio prolixiores, & ad maiorem altitudinem assurgentes, sub finem autem sint breuiores, nihilominùs singuli, durationis eiusdem, seu æquitemporanei non immeritò crediti sunt; quamuis non desint, qui putent diligenti quadam obseruatione deprehensas esse celeriores vibrationes propè finem: quod nobis tamen, omni adhibitâ diligentia, nunquam innotuit. *Itus ac reditus initio prolixiores.*

Illud insuper est considerandum, quòd vnusquisque itus, vel reditus duplici parte constat, quarum una est per arcum descensus ad perpendiculum: altera autem per arcum ascensus à perpendiculo. In descensu per arcum, ipsum mobile mouetur motu naturaliter accelerato, in ascensu uerò naturaliter deficiente; ita fit ut tàm itus, quàm reditus ad æquabi- *Itus ac reditus duplici parte constat.*

æquabilem motum redigantur. Cùm itaque maximus celeritatis gradus sit, quem mobile acquirit in perpendiculo, si mobile describeret arcum motu æquabili, celeritatis gradu, qui dimidium foret maximi gradus iam dicti, tanto temporis spatio arcum illum percurreret graue, quanto, motu, cuius pars dimidia est descensus naturaliter acceleratus per arcum, altera autem ascensus naturaliter deficiens: sed hæc etiam superiùs innuimus. Tàm itus, quàm reditus dicitur vibratio simplex; at vibratio composita ex itu, & reditu constat.

Hìc autem non prætereibo quorundam industriam, qua sic pensile rotæ in orbem actæ aptatur, vt vibrationes perpetuò seruentur ad eandem eleuationem excurrentes, quo opere difficultas illa vitatur obseruandarum vibrationum præ nimia breuitate sensum effugientium: hunc autem in modum pensile quidem elaboratum, ad plurima diligenter obseruanda conducit; præsertim autem in Astronomia locum habet, nimirum in obseruationibus Eclypsium, aliorumque Cœlestium phænomenon, vt cuique perspicuum esse potest.

Hoc instrumentum maximè deseruit obseruationibus Astronomicis.

Animaduertendum est autem, meliùs hoc instrumentum ad propositum conducere, si duo adhibeantur fila, quorum vtrunque sit infixũ clauo HK in locis vnius digiti spatio ferè inter se distantibus, quando regula CH fuerit altitudinis dimidij brachij, & vtrique appensa sit sphærula BL ex vno, eodemque puncto, quod sit quodammodo vertex vnius triãguli, cuius crura sint prædicta fila, basis verò inter hæc, distantia in HK: Oportet autem tunc regulatorem DEF, rimula esse apertũ, per quã scilicet duo prædicta fila transeant, & ipse regulator liberè excurrat fila complectens.



Ad fluidorum grauitatem explorandam, tametsi plura sint idonea instrumenta humanã sagacitate excogitata, tamen vnũ alteri longè lateq; præstat. Breuiter commemorabimus, quæ hactenus adhiberi consueuerunt: mox quod cæteris præferendũ afferentes. Horum autem instrumentorum non immeritò quodlibet Ὑγροσαθμὸς, Ygrostathmos, quasi Bilanx humidorum, seu fluidorum dici posset.



Ὑγροσαθμὸς Primum. Ygrostathmos, hoc est fluidorum mensura.

Primum illud se se offert, quod Bilancis instar omninò est; ad extremum enim brachiorum ipsius Bilancis scutellæ loco alligatur crinis equinus, quem eiusdem grauitatis in specie cum aqua obseruarunt; huic autem sit appensum corpus in specie grauius aquã; vt exempli gratia, marmoreum, ferreum, æneum &c. immergatur illud in aquam: alio autem Bilancis extremo alligata sit scutella, in qua constituatur graue, quod in aere dum versatur, æquiponderet supradicto graui in aquam immerso: mox autem obseruetur facta ponderatione vtriusque corporis in aere, quantum ponderis addendum sit in scutella, ad æquilibrium grauis ibi existentis, comparatione illius, quod crini equino appensum erat immersũ &c. quãtum enim additũ fuerit, erit aquæ pondus mole æqualis ei, quod erat in aquam immersũ: cùm magnitudines in humido tanto sint leuiores, quanta est grauitas humidi molem habentis solidæ magnitudini æqualem.

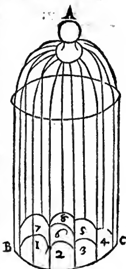
Quamuis autem hæc fluidorum explorandi quantitatem ratio exactissima credatur, re tamen vera iisdem est difficultatibus obnoxia, quibus & ponderatio, qua ad trutinã reuocantur pondera beneficio Bilancis in eodem medio, puta aere; ad minimas enim differentias internoscendas, Bilanx ingens non est idonea, si verò fuerit parua, cùm non nisi exigua pondera ad examen adhiberi possint, exiguæ differentiæ non prodeunt.

Secundum.

Aliud instrumentum ad idem consequendum excogitarunt, cuiusmodi est adiuncto schemate repræsentatum. Sit sphærula enim BCD, intra quam exiguissimi globuli plumbei inclusi sint, & è qua assurgat gracile collum DA, vel filum ferreum in æquas partes diuisum, vt in schemate cernis; si itaque instrumentum fuerit immersum in humidum, extabit pars colli DA; extabit autem quoniam in sphærulam BDC tantum fuit plumbi



intrusum, vt reddat instrumentum ita graue in specie, vt non omninò totum vsque ad A immergatur: quantò autem plus, vel minus immergitur de collo AD; idque ex internallis designatis innotescit, tantò magis, vel minus est graue humidum, in quod instrumentum ipsum immergitur. Si enim collum DA, e.g., diuisum fuerit in centum particulas æquales, initio facto à puncto D, & facta immersione in aliquo humido, descendat instrumentum vsque ad particulam decimam, factâ verò immersione in alio fluido, in quo descendat vsque ad particulam decimam tertiam, iam hoc fluidum minoris erit grauitatis in specie, quàm aliud. Sed hoc non adeò est exactum, vt ei animus ingenuus acquiescat.



Aliud propterea, vt in secũda figura, ABC instrumẽtũ excogitatũ fuit instar caueæ, vbi inclusæ sunt plurimæ sphærulæ vitreæ diuersæ grauitatis in specie, vt grauitate se se excedẽtes in Arithmetica medietate reperiri possint. Immergitur autem hæc machinula in humidum, quod si fuerit exiguæ grauitatis in specie, vna vel duæ, vel tres ex illis sphærulis ascendent: si verò immergatur in aliud humidum in specie grauius, aliæ emergent, plures, vel pauciores, pro ut fuerit grauitas humidi. Quoniã autem singularum sphærularũ grauitas perspecta est, singulisque grauitatis character impressus, obseruatis propterea sphærulis ipsis, earundemque collatione facta, grauitatisq; gradibus ad calculum redactis, facilè constabit, quodnam humidum fuerit grauius, quod minus graue. Instrumenti autem structura sic se habet, vt omnis labor positus sit in efformandis sphærulis se se excedentibus æquali grauitatis excessu. Accipiatur magnus numerus sphærularum, & immersis in aquam calidam, obseruare oportet medio Thermometro, secundùm æquales excessus caloris, quæ nam ex illis emergant, quibus à latere positis, adscribantur characteres designantes æquales excessus, nempè 1, 2, 3, 4, 5, &c. hoc enim pacto constructæ quidem erunt sphærulæ se excedentes, vt opus erat, &c. excessus autem caloris attendi possunt, vel ex incremento, vel ex decremento, primo modo, pro ut fuerit aqua igni admota, secundo modo, quatenus ab illo fuerit remota &c. Sed nec etiam istud omnium videtur habere complexionem numerorum.

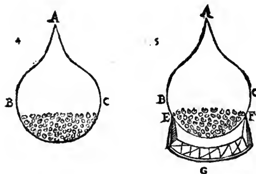


Aliud exhibetur in tertia figura, ABCD ad cuius collũ: nã in reliquis persimile est primo ex supra relatis: constructa est scutella, vbi pondera reponuntur; immergitur igitur instrumentum in humidum, & quanta sit immersio colli notatur: mox autem in aliud humidum cùm fuerit immersum, diligenter obseruatur quantum ponderis addendum, vel subtrahendum ab ipsa scutella; quoad fiat adamussim vsque ad signum iam notatum in collo, & pro ratione grauitatis adiunctæ, vel subtractæ cognoscitur ratio grauitatis fluidorum.

Aliud est, quod in quarta figura ABC exprimitur, quod ferè coincidit cum antecedenti, quãuis diuersum admodũ videatur; illud autem ab hoc secernitur, quoniam in illo additio ponderum, vel subtractio fiebat in scutella, & immersionis obseruatio fieri debebat in collo: in hoc autem additio, vel subtractio ponderum fit per quosdam exiguos anulos, quos ingreditur turbinatum collum, cuius vertex A; tantum enim ponderis addendum est, vt vertex A descendat præcisè ad humidi superficiem; anuli autem sunt exigui ponderis, adeò vt centum ex ipsis, vel plures etiam, si placet, æquent grauitatem vnius grani,

Cæte-

Cæterùm hoc artificio constructum est instrumentum, vt æqueponderet aquæ moli sibi æquali.



Statuma.

In quinta autē figura ABC exhibetur idem instrumentū addita reticula EGF, in qua ponuntur solida, quorum grauitatem in humido placet explorare; sed instrumentum eā ratione est elaborandum, vt determinata quantitas grauissimi corporis, cuiusmodi est aurum, non omninò demergatur, sed ad hoc requiratur additio anulorum; nam hunc in modum instituta collatione inter adiecta pondera; ipsorum facilè innotescit ratio ponderum, quæ in ipsa reticula fuerunt constituta.

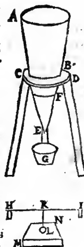
Hoc tamen instrumentum etiam vltimo loco exhibitum non est vndequaque perfectum, propterea quod aliquibus laborat imperfectionibus, de quibus suo loco, vbi rationem illud conficiendi numeris omnibus absolutum explicabimus.

Ad aeris humiditatem explorandam instrumentū idoneū Ygrometron.

Plurimùm etiam refert aliquando aeris humiditatem ad calculum redigere; hinc enim non nulla pendent phænomena, ita vt hoc ignorato, de his iudicium ferre minimè tutum sit.

1. AF, est instrumentum, cuius tripes BCD, conus vitreus EF, cyatus autem G &c.
2. Chorda HI, cui alligatur in k graue L, planum autem est MN &c.

Humiditatis gradus in primis cognoscitur ex humoris abundantiā, quo scilicet aer plus, minusue refertus est. Ad humoris copiam dignoscendam, maximè quidem idoneum est instrumentum Υγρόμετρον, *Ygrometron*, hunc in modum elaboratum. Sumatur enim vas quoddam cylindricum ex subere, vel alia simili materia, puta ligno, amicto lamellā ferreā, cuius inferiori orificio adnectatur vas vitreum conicā figurā constans, cuius vertex ad imum vergat, hoc autem tribus innitatur fulcimētis: repleatur glacie cōtritā, vel niue; nā si aer fuerit humore abundans, hic adhærens cono vitreo distillat, atque adeò guttatim descendit; quamobrem si cadentes guttas cyato, vel scutellā aliquā exceperimus, adnotatā quantitate temporis, ostendet humor in scutella receptus, pro ratione suæ quantitatis, quanta sit copia humoris, quo aer repletus est. Itaque si hoc fiat in locis diuersis, vel successiuè in eodem loco, habitā ratione ad tempus, innotescet quantò aer aliquis maiori, vel minori humidi copiā abundet, prout maior, vel minor copia humoris in cyato, vel scutella collecta fuerit.



Non est autem, cur quispiam ambigat, num id sit veritati consonum; siquidem satis est vulgata vaporis ista per adhæsionem rei frigidæ condensatio. Aliquando vnius minuti primi tempore, numerauimus quinquaginta, & amplius guttas cadentes: imò aliquando flantibus ventis humidioribus octoginta quatuor guttas numerare licuit.

Hoc

Hoc idem etiam assequimur per chordas, præsertim ex intestinis cōfectas, quibus in fidibus vtimur; nā hæ inde stabilibus fulcimentis infixæ sint, & in eius medio pendeat globulus grauis, puta plumbeus, qui superficiem aliquam optimè leuigatam, cuiusmodi est speculi tersi, vix tangat; nam humido vigente contrahitur, & globulum eleuat sic, vt amplius superficiem non tangat.

Alia ratio idem inquiritur.

De instrumento, quod Θερμόμετρον, *Thermometron* dicitur, ad explorandam quantitatem caloris, iam superiùs verba fecimus, simulque notauimus vulgatum illud adhiberi solitum inualidum esse, cuiusmodi est quod à latere hic cernitur, in quo facta est diuisio per æquales excessus, innuimus ibi excogitatum à nobis, quod in primis idoneum est ad obseruandum Naturæ progressum in alterando, &c.

Thermometrū hactenus adhiberi solitum omninò inutile.

Constructionis autem ratio, qua vsi sumus, ea est, quòd videlicet diuisio graduum fiat secundùm rationem aucti caloris humidi, in quod instrumentum ipsum immersum est; itaque facto initio ab humore feruenti, notetur in fistula quousque vini spiritus ascendit; mox autem, per admixtionem frigidi in tanta quantitate humoris, quanta in causa est cur calor decrescat secundùm datam rationem; idque facillimum est, nulloque negotio perficitur; vini spiritus descendet, eiusque statio notanda est, sicque procedendum deinceps: atque hunc in modum instrumentum erit constructum, ita vt immissum in humidum, deinde verò in aliud, statim declaret, quæ sit ratio caloris vnius ad calorem alterius.

Optimum ab Auctore adinuentum, & eius constructio qualis.

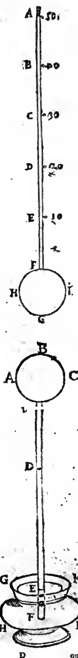
Hoc instrumento vsi deprehendimus vniformem difformem diffusionem actionis calefactricis à Scholasticis decantatam inanem, & commentitiam esse.

Actio vniformiter, difformiter diffusa, non ita deprehensa est ab Auctore, quemadmodum à Scholasticis describitur.

Aliud quoque Thermometrum satis vulgatum in vsu fuit minimas differentias ostendens: eius autem structura ex adiuncto diagrammate facilè intelligitur. Sit enim vas ad maiorem elegantiam sphæricā figurā constans, ABC, cui annexa est fistula, vt cernis FL, adeò vt totum vas sit ABCF; est autem vas alterum HGKI, aqua repletū, prædictæ verò fistulæ, quæ vasis ABCF, est collum, orificium F, in aquam immergitur, ita vt pars eius demersa sit EF; ante immersionem autem aer extruditur validiori calore, quàm ambientis, ex vase ABCF; ille siquidem rarefactus exit: post autem immersionem aqua per prædictum collum assurgit, frigefacto nimirum aere intus incluso, ambientis verò calor, quò maior extiterit, eò minùs aqua per collum ipsum ascendit; quò autem frigus magis viget, plùs aqua attollitur, eòque altiùs ascendit. Si itaque longitudo fistulæ, seu colli diuisa fuerit lege superiùs à nobis præscripta; nam in partes æquales vulgata diuisio est, minus tamen idonea, si inquam diuisa fuerit, ex diuisionum punctis innotescent gradus caloris, quo ambiens afficitur, vt si ascenderet, exempli gratiā, ad punctum D, inde constaret quænam sit ambientis affectio caloris.

Valdè quoque iuuat rerum texturas obseruare, vnde, vt aliquo vtar exemplo, cùm nihil magis apud Chymicos sit decantatum, quàm Mercurius dulcis, cuius beneficio, dummodo ritè dulcificatus fuerit, iactant propelli morbos, alioquin creditos incurabiles; eum autem arbitrantur artificiosè præparatum sic esse, vt nouam induat naturam, cùm tamen secus se habere aduerterim beneficio Μικροσκοπίου, *Microscopij* instrumenti, de quod

Ad obseruandam rerum texturam instrumentum idoneum Microscopion.



quo loquimur iam satis uulgato, propterea quòd hic dum agimus, periculum fecimus in Mercurio dulcificato à Præclarissimo Viro Domino Guilielmo Stocheam Anglo de re Chymica optimè merito; is autem cùm arbitraretur ad curandam luem gallicam, nihil esse opportunius Mercurio à se parato, mihique diceret, sibi persuasum esse, Mercurij naturam, suo artificio immutari, ita vt nouam formam acquirat, operæ pretium duxi explorare, num aliquid crudi mercurij ibi reperiretur, quod sanè argumento nobis esse posset haud huiusmodi mutationem factam fuisse; adhibito propterea Microscopio Florentiæ fabrefacto, reperij Mercurium illum, Arte Chymica tantùm in minutissimas particulas Menstrui partibus intermixtas distractum fuisse, quæ, vtpotè exiguæ, sensum omnem effugiebant, qua ratione detegi errorem existimantium artificiosè Mercurij naturam transmutatam fuisse, cum tamen in eam optimè quadret Horatianum illud,

Naturam expellas furca tamen vsque recurret.

Tubi Optici inuentio.

Sic etiam in alijs innumeris rebus expedict, gratiâ veritatis assequendæ, ad hoc instrumentum confugere.

Præstat se se in experimentis exercere, animo esse ad verum indagandum procliui, curâque supramodum ad illius indagationem vti; sæpè sæpiùs adscribendum tamen casui, quod alioquin singularis industria, summaque diligentia vix vnquam peperisset; Ita quidem Optici Tubi præstantissimum, penèque Diuinum inuentum, olim accidisse casu monumenta testantur; dum enim in Belgio vitra, lenticulare vnum, planum alterum, illetractaret, vno quidem ad aliud admoto decenti quadam intercapedine, id adinuenit, quod vniuersum Orbem in sui traxit admirationem. Sic fortasse continget aliquando, si Deo placuerit, vt auditus quoque promoueatur, & sic adiuuetur, vt alicuius machinamenti beneficio mortalibus longinquas voces audire liceat; idque inditio esse videtur, quod propè Syragusas ad distantiam videlicet duorum milliariorum crypta loquens, (vt vtar ibi degentium phrasi) in Latomijs olim iussu Dionysij Tyranni excauata reperitur, ita vt eius culmen gracilescat in erectum canalem helicum, laxis tamen spiris efformatum altitudinis triginta circiter brachiorum, referentibus Eglaur, & Valter Adolescentibus Teutonibus nobili loco natis, cuius apex auricularium figuram referens, desinebat in supradicti Tyranni diuersoriolum, vbi verba quantumuis prolata summissâ voce ab ijs, qui in prædicta crypta, velut carcere coniecti præ summa tyrannide Viri scelesti detinebantur, facilè distinctèq; admodum is ad libitum audiebat.

Sperandum aliquando futurum vt reperiatur aliquod instrumentum, quo auditus adiuuetur.

A quibus cauendum Analystæ, nè delusus quodammodo videatur.

CAP. VII.

Frequenter admodum vsuvenire solet, Theorema aliquod resoluendum proponi, quod specie tenus ab alio differt, cùm tamen vix introspecto, statim appareat luculenter tantummodò formam induisse extrinsecam, eandem penitus naturam ret inens: vnde nouam non exposcit resolutionem; quòd si Artifex, su, qui pollet perspicacitate, notauerit, tantum inde profectò laudis consequetur, quantum dedecoris proponenti continget. Si quid igitur insulsum, si quid superfluum, multoque magis si quid repugnans propositū fuerit, illud exprobret percontanti; quod vt aliquo nos illustremus exemplo, sit.

Exemplum LXIII.

THEOREMA.

Si recta linea AB secta sit in punctis C, D, E, F, vt existentibus æqualibus partibus AC, CE, reliqua EB, sic sit in F diuisa, vt EB possit rectangulum ACF, vnà cum quadrato EF, existentibus æqualibus DE, EF.

Dico, differentiam quadrati compositæ ex DB, & CE, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, esse, vt CE ad EF.

Reso-

Resolutio.

A C D E F B

QVoniam igitur excessus quadrati compositæ ex DB, & CE, supra quadratum DB, ad excessum, quo quadratum DB, superat quadratum CE, est in ratione vt CE ad EF; sed quadratum compositæ ex CE, & DB, est æqualem quadrato CE plus quadrato DB vna cum duplo rectangulo sub CE & DB, atq; adeò quadratum compositæ ex CE, & DB, superat quadratum DB, excessu, qui est rectangulum sub CE, & sub composita ex CE, & dupla DB: seu quod idem est, quadratum CE, plùs duplo rectangulo sub CE, & DB; ergo alter excessus, quo scilicet quadratum DB, superat quadratum CE, erit rectangulum sub EF, seu DE, & sub composita ex CE, & dupla DB. Sed duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF, ob eandem altitudinem DE, vel EF, idem est quod rectangulum contentum sub EF, & sub aggregato ex CE, & dupla DB; ergo excessus quadrati DB supra quadratum CE, est duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF, seu rectangulum BDF, plùs rectangulo CEF; ergo quadratum BD æquabitur rectangulo BDF, plùs quadrato CE, vnà cum rectangulo CEF; Sed quadratum DB, æquale est rectangulis DBF, BDF; ergo rectangulum DBF, æquabitur quadrato CE, plùs rectangulo CEF. Sed rectangulum ACF, æquale est quadrato CE, plùs rectangulo CEF; ergo rectangulum ACF, æquabitur rectangulo DBF; ergo vtrinque addito quadrato EF, quadratum EB æquale erit rectangulo ACF, plùs quadrato EF; (est enim quadratum EB æquale rectangulo DBF, plùs quadrato EF.) Quod ita se habet ex hypothesi.

Compositio.

QVoniam quadratum EB, ex hypothesi est æquale rectangulo ACF, plùs quadrato EF; ergo vtrinque sublato quadrato EF, rectangulum ACF æquabitur rectangulo DBF (est enim quadratum EB, æquale rectangulo DBF, plùs quadrato EF) sed rectangulum ACF est æquale quadrato CE, plùs rectangulo CEF; ergo rectangulum DBF, æquabitur quadrato CE, plùs rectangulo CEF. Sed quadratum DB, æquale est rectangulis DBF, & BDF; ergo quadratum DB, æquabitur rectangulo BDF, plùs quadrato CE, vnà cùm rectangulo CEF; ergo excessus quadrati DB, supra quadratum CE, est rectangulum BDF, plùs rectangulo CEF, seu duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF. Sed duplum rectangulum BDE, plùs rectangulo CEF, ob eandem altitudinem DE, vel EF, idem est, quòd rectangulum contentum sub EF, & sub aggregato ex CE, & dupla DB; ergo huiusmodi rectangulum erit differentia inter quadratum CE, & quadratum DB. Sed quadratum compositæ ex CE, & DB, est æquale quadrato CE plùs quadrato ex DB, vnà cum duplo rectangulo sub CE, & DB; atq; adeo quadratū compositæ ex CE, & DB, superat quadratum DB, excessu, qui est quadratum CE, plùs duplo rectangulo sub CE, & DB, seu quod idem est rectangulum sub CE, & sub composita ex CE, & dupla DB; sed alter superior excessus erat rectangulum sub EF, & sub CE, plùs dupla DB; ergo horum rectangulorum communis erit altitudo CE, plus dupla DB, & bases sunt CE, & EF; ergo huiusmodi excessus quadrati compositæ ex DB, & CE supra quadratum DB, ad excessum, quo quadratum DB, superat quadratum CE, erit in ratione basium, vt CE ad EF. Quod oportebat &c.

Ad resolutionem quod attinet, nihil refert adiecisse quadratum EF, propterea quod quadratum DB, per sextam Secundi, æquale est rectangulo DBF, plùs quadrato EF, cùm DF, diuisa sit bifariam in E, si itaque rectangulo ACF, plùs quadrato EF, fuerit æquale quadratum EB, ablato communi quadrato EF, rectangulum ACF, æquabitur rectangulo DBF; hoc itaque adiecisse sufficeret, adhuc enim id sequeretur symptoma, quod ostendendum assumitur, quamuis nulla fieret EF quadrati mentio, vt mox constabit; ideoque fit,

THEOREMA.

Exemplum LXIV.

Si recta linea AB, diuisa sit in punctis C,D,E,F, ita vt existentibus æqualibus partibus AC, CE, reliqua pars EB, sic in F, diuisa sit, vt rectangulum ACF, existente DE æquali ipsi EF, sit æquale rectangulo DBF.

Dico, differentiam quadrati compositæ ex DB, & CE, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, esse vt CE, ad EF.

Resolutio.

A C D E F B

QVoniam itaque differentia quadrati compositæ ex CE, & DB, à quadrato DB ad differentiam quadratorũ DB,& CE, est vt CE ad EF;sed rectangulũ sub CE in compositam ex CE, plùs dupla DB, ad rectangulum sub EF, in compositam ex CE, & dupla DB, ob eandem altitudinem CE, & dupla DB, est vt CE, ad EF; & differentia quadrati compositæ ex CE, & DB, à quadrato DB, est rectangulum sub CE in compositam ex CE, & dupla DB, seu est quadratum CE, vnà cum rectangulo ex CE, in duplam DB (quadratum enim compositæ ex CE, & DB, æquale est quadratis CE, & DB, vnà cum duplo rectangulo sub ijsdem CE, & DB) ;ergo differentia quadratorum CE, & DB æquabitur rectangulo ex EF in CE, plùs dupla BD. Sed rectangulum CEF, & duplum rectangulum BDE, ob æquales DE, EF, æqualia sunt rectangulo ex DE, vel EF, in CE, plùs dupla DB; ergo differentia quadratorum CE, DB, erit rectangulum CEF, vnà cum duplo rectangulo BDE; sed rectangulum BDF, æquale est duplo rectangulo BDE; ergo quadratum DB, æquabitur rectangulo BDF, vnà cum rectangulo CEF, plùs quadrato CE. Sed quadratum DB æquale est rectangulis DBF, & BDF; ergo rectangulum DBF, æquabitur quadrato CE, vnà cum rectangulo CEF. Sed rectangulum ACF est æquale quadrato CE, plùs rectangulo CEF, cùm CE, sit æqualis AC; ergo rectangulum ACF æquale erit rectangulo DBF. Quod ita se habet &c.

Compositio.

QVoniam ex hypothesi rectangulum ACF æquale est rectangulo DBF; sed rectangulum ACF æquale est quadrato CE, plùs rectangulo CEF, cùm CE sit æqualis AC; ergo rectangulum DBF æquabitur quadrato CE, vnà cum rectangulo CEF, sed quadratum DB, æquale est rectangulis DBF, & BDF, ergo per substitutionem æqualium quadratum DB, æquabitur rectangulo BDF, vnà cum rectangulo CEF, plùs quadrato CE; sed rectangulum BDF æquale est duplo rectangulo BDE; ergo differentia quadratorum CE, DB, erit rectangulum CEF, vnà cum duplo rectangulo BDE, sed rectangula CEF, & duplum rectangulum BDE, cùm sint æquales DE, EF, vt diximus æqualia sunt rectangulo ex DE, vel EF, in CE plùs dupla DB; ergo differentia quadratorum ex CE, & DB, æquatur rectangulo ex EF, in CE, plùs dupla DB; sed differentia quadrati compositæ ex CE, DB, à quadrato DB, est quadratum CE, vnà cum rectangulo ex CE, in duplam DB (quadratum enim compositæ ex CE, & DB, æquale est quadratis CE, & DB, vnà cum duplo rectangulo sub ijsdem CE, DB) ; seu hæc ipsa differentia est rectangulum sub CE, in compositam ex CE, & dupla DB; sed rectangulum sub CE, in compositam ex CE, plùs dupla DB, ad rectangulum sub EF, in compositam ex CE, & dupla DB, ob eandem altitudinem CE, plus dupla DB, est vt CE, ad EF; ergo differentia quadrati compositæ ex CE, & DB, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, est vt CE ad EF. Quod oportebat ostendere.

Nec dissimiliter superuacaneum fuisset, particulam illam adiungere quòd, exempli gratia, segmentum FB, sit maius; vel æquale; vel minus. Nihil enim refert, quòd FB, sit æqualis ipsi DF, vel maior, vel minor; nam vtcunque se res habeat, semper illud eueniet, quod differentia quadrati compositæ ex DB, & CE, à quadrato DB, ad differentiam quadratorum DB, & CE, sit vt CE, ad EF, ex hypothesi quòd AC, CE, sint partes æquales, & reliqua pars EB, sic in F diuisa sit, vt rectangulum ACF, existente DE æquali ipsi EF, sit æquale rectangulo DBF.

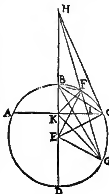
Esset & superfluum, ac insulsum adiectum illud, Existentibus æqualibus AC, CE, pars EB, eà sit lege diuisa in F, vt existentibus æqualibus DE, EF, quadratum EB, æquale sit

le sit rectangulo DBF, vnà cum quadrato EF. Hoc enim proponentis testatur inscitiam; conditio siquidem debet contradictionis partem admittere; illud porrò ex necessitate euenit.

Multò autem onerosius, ac intollerabilius est, pugnantia adijcere, vt si quispiam apponeret, existentibus æqualibus, AC, CE, reliqua pars EB, ita diuisa sit in F, vt æqualibus existentibus DE, EF, recta EB, possit duplum rectangulum DBF; huic enim propositæ diuisionis aduersatur natura, & in hæc atque similia passim Tyrones, vtpote minus in Mathematico puluere versati, solent incurrere. *A pugnantibus cauendum.*

Sic etiam à superflua præparatione cauendum. Vt si quispiam ad huiusmodi theorematis demonstrationem, præcepisset inter AC, CF, mediam reperiri proportionalem, adhibendam deinceps veluti potentem rectangulum ACF, ita vt eius quadrato, in rectanguli locum substituto, demonstratio procederet. *Item à superfluo &c.*

Magnoperè igitur curandum, ne in demonstrationibus aliquid intrudatur superfluum, veluti præparationis loco, quod ipsi demonstrationi nullo modo deseruiat. Rarò siquidem Theorema aliquod demonstrandum occurrit, quod aliqua præparatione non indigeat, quæ quidem eâ est perficienda lege, vt nil superfluum contineat. Vt igitur hoc pacto quis per excessum peccaret, ita quidem ommittens per defectum: vtrunque detestabile est. Per excessum, præter allatum exemplum, extat etiam & illud Orontij contendentis quadratum æquale circulo exhibere, nam vt Petrus Nonius aduertit, multa miscuit in illo tetragonismo, quæ quidem ad ipsius demonstrationem nullo modo conducunt.



Nec dissimili modo foret quispiam incusandus, quòd superflua vsus esset præparatione; si in Theoremate exempli XXII. adiunxisset præparationis loco rectas esse ducendas CB, GB, FK, FE: deinde prosequeretur demonstrando vt ibi; culp siquidem non vacaret, quoniam in illa demonstratione nulla fit prædictarum linearum commemoratio.

Nihil autem refert, quod in schemate, ob alium finem aliquæ ductæ sint lineæ, dummodò vbi ijs non est opus, non commemorentur, vt in supradicto exemplo contigit; Schema siquidem ibi nos adhibuimus, in quo lineæ prædictæ ob eum, de quo loquimur finem, ad schematum multiplicitatem vitandam, descriptæ fuerunt; ibi tamen prædictas lineas, præparationis loco non adhibentes, silentio præteriuimus. *Nihil refert quod in schemate lineæ sint superfluæ, dummodo non commemorentur.*

QVOD ARTIFICI MAGNOPERE CVRANDVM

In oblati Theorematis resolutione instituenda.

CAP. VIII.

Hvic expedit Artifici præ oculis facilitatem, claritatemque demonstrationis habere; quantum enim inde laudis consequitur, tantundem ex implicata demonstrandi ratione, obscuraque methodo in suo obeundo munere, ammittit. Caueat igitur ne incautè procedens viam absconditam, ac salebrosam ineat in resoluendo, cùm alioquin expedita facilisque sit obuia; quod vsu venire deprehendet, cùm statim quæsito tamquam vero quidem assumpto in planorum comparationem ad pauca respiciens, atque adeò inconsideratè mentem adegerit, vt inde verum aliquod concessum, exploratum, ac notum offendat, proptereaq; retrogrado quodam ordine compositionem instituat; à quo illi præsertim abstinendum, cùm solertis Artificis partes ne dum sint oblato cuidam Theoremati demonstratione satisfacere, sed etiam demonstrandi rationem seligere, quæ propositionum candore, consecutionum paucitate, progressusque facilitate, cæteris antecellit; Ita fit vt eum in primis dedeceat ad veritatem aliquam consequendam per obscura, ac implicata resolutionem *Claritas in Demonstrationibus commendabilis.*

tionem

tionem instituere, demonstrationemque contexere, quasi relictâ vii satis obuiæ,ac expeditæ, quod inexpertis est, salebrosam, ac arduam ad Mineruæ templum inuisendum, selegerit. Vtq; dicta perspicuè constent, exemplum operæ pretium duximus in medium afferre, vnde cuique facillimum sit addiscere, id à quo illi magnopere declinandum; ne quamuis in assequenda veritate præstantioris Artificis partes expleuerit;in modo tamen insulsè peccasse videatur.

Exemplum LXV.

THEOREMA.

Sit recta quæpiam AB duplata quidem in D, & ex punctis A, & B perpendicularibus erectis AH, BI, & in BI sumpto quouis puncto F, ducta sit AF, supra quam descriptus sit semicirculus AEF, secans AH in puncto E, ductaque sit EF, sit vt AD ad EF, ita EF ad AC, ex C ductæ sint CE, CF.

Dico CE, CF esse inter se æquales.

Nisi quis cautè se gerat, facilè in hanc incidet resolutionem.

Resolutio.

QVoniam igitur EC, CF sunt æquales, ergo quadrata ex EC, & ex CF erunt æqualia. Est autem quadratum AB, minus rectangulo DAC plus quadrato AC, plus quadrato BF, idem quòd quadratum CF; & præterea quadratum AC, plus quadrato AE idem quòd quadratum EC; ergo quadratum AC plus quadrato AE æquale erit quadrato AB, minus rectangulo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF; & per antithesin quadratum AC plus quadrato AE, plus rectangulo DAC, æquale erit quadrato AB, plus quadrato AC plus quadrato BF, vtrinque subtracto quadrato AC; quadratum AE, plus rectangulo DAC æquabitur quadrato AB plus quadrato BF; & per antithesin rectangulum DAC æquale erit quadrato AB plus quadrato BF, minus quadrato AE; Quamobrem quadratum EF, vtpote æqualis AB, plus quadrato BF, minus quadrato AE æquabitur rectangulo DAC; quamobrē EF media erit inter AC, & AD. Quod ita se habet.

ex Elementis AEFB est parallelogram.

Compositio.

QVoniam enim EF media est inter AC, AD, & quidem EF potest quadratum AB, plus quadrato BF minus quadrato AE; proinde rectangulum DAC erit æquale quadrato AB plus quadrato BF minus quadrato AE, & per antithesin quadratum AE plus rectangulo DAC, æquale erit quadrato AB plus quadrato BF, vtrinque addito quadrato AC, erit quadratum AC plus quadrato AE plus rectangulo DAC, æquale quadrato AB, plus quadrato AC, plus quadrato BF; & rursus per antithesim quadratum AC, plus quadrato AE erit æquale quadrato AB minus rectangulo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF; est autem quadratum AC plus quadrato AE idem, quod quadratum EC; præterea quadratum AB minus rectangulo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF, idem est,quod quadratum CF; ergo hæc duo quadrata EC, CF erunt æqualia; quare & ipsæ EC, CF erunt æquales.

seu EF esse æqualis AB.

Illud autem superest ostendendum; nimirum quadratum CF æquale esse quadrato AB minus rectangulo DAC plus quadrato AC, plus quadrato BF; quod sic ostenditur.

Rectangulum DAC idem est quod rectangulum duplum BAC, quare quadratum CF erit æquale quadrato AB minus duplo rectangulo BAC plus quadrato AC plus quadrato BF, & ita est; quandoquidem quadratum CF æquale est quadrato CB plus quadrato BF. At verò quadratum CB idem est quod quadratum AB minus duplo rectangulo BAC, plus quadrato AC, per septimam Secundi; si enim quadrato AB additum fuerit quadratum AC,

certè

certè quadratum CB, plus duplo rectangulo BAC, æquale erit quadratis AB, AC; proinde quadratum BC plus quadrato BF æquale cùm sit quadrato CF, etiam quadratum CF æquale erit quadrato AB minus duplo rectangulo BAC, seu simplo DAC, plus quadrato AC, plus quadrato BF &c.

Conspectus Resolutionis, atq; Compositionis.

Quoniam itaque EC, CF sunt æquales; ergo
Quadratum EC æquabitur quadrato CF; sed
Quadratum AB, minùs rectangulo DAC; vnà cum quadrato AC, plùs quadrato BF, æquatur quadrato CF; & quadratum AC, plùs quadrato AE, æquale est quadrato EC, ergo (Initium Resolutionis, & finis Compositionis.)
Quadratum AC, vnà cum quadrato AE æquabitur quadrato AB minus rectangulo DAC, vnà cum quadrato AC, plùs quadrato BF; vtrinque addito rectangulo DAC; ergo
Quadratum AC, vnà cum quadrato AE, plus rectangulo DAC æquabitur quadrato AB plus quadrato AC, vnà cum quadrato BF; vtrinque subtracto quadrato AC; ergo
Quadratum AE, vnà cum rectangulo DAC æquabitur quadrato AB, vnà cum quadrato BF; vtrinque subtracto quadrato AE; ergo
Rectangulum DAC æquabitur quadrato AB, vnà cum quadrato BF minus quadrato AE, ergo
Quadratum EF, vtpotè æqualis ipsi AB plus quadrato BF, minus quadrato AE, æquabitur rectangulo DAC; ergo (Finis Resolutionis, & initium Compositionis.)
EF media proportionalis erit inter AC, AD. Quod ita se habet.

Implicata est admodum demonstratio; atque adeò subobscura, eiusdem ordinis cum ijs, quas speciosa suppeditat Analysis; longè tamen clariùs, & elegantiùs, hunc qui sequitur in modum, poterit ipsa Resolutio institui, ac per regressum compositio perfici.

Resolutio.

QVoniam igitur EC est æqualis CF, ergo quadratum CE æquabitur quadrato CF, sed quadratum CF est æquale quadratis CB, BF ob angulum rectum ad B, ergo quadratum CE æquabitur quadratis CB, BF, sed quadratum CE est æquale quadratis AC, AE ob angulum rectum ad A, ergo quadratum AC, plus quadrato AE æquabitur quadrato CB, plus quadrato BF, sed AE æquatur BF, vt infra constabit; ergo AC æquabitur CB, ergo AB erit dupla ipsius AC; Quod ita se habet; siquidem vt AD ad EF, ita EF ad AC; sed vt AD ad EF, ita AD ad AB, cùm sint æquales AB, EF; ergo vt AD ad AB, ita AB ad AC, sed AD est dupla ipsius AB, ergo AB; erit dupla ipsius AC.

Quod autem AE sit æqualis BF, & AB sit æqualis EF, sic ostenditur. Est enim AEFB parallelogrammum, quoniam angulus EAB rectus est ex hypothesi, & angulus AEF est rectus, vtpotè in semicirculo; ergo EF erit parallela ipsi AB, & quia angulus ABF est rectus, propterea AE erit parallela ipsi BF, angulo existente etiam recto EAB; quare AEFB erit parallelogrammum; vnde aduersa latera, videlicet AE, BF; item AB, EF, erunt inter se æqualia. (Si quis prosequeretur quousq; offenderet æqualitatem inter EF & AB peccaret.)

Compositio.

QVoniam igitur est vt AD ad EF, ita EF ad AC, sed vt AD ad EF, ita AD ad AB, cùm sint æquales AB, EF; ergo vt AD ad AB, ita AB ad AC, sed AD est dupla ipsius AB; ergo AB erit dupla ipsius AC, ergo AC æquabitur CB, sed AE æquatur BF, ergo quadratum AC, plus quadrato AE æquabitur quadrato CB, plus quadrato BF, sed quadratum CE est æquale quadratis AC, AE ob angulum rectum ad A, ergo quadratum CE æquabitur quadratis CB, BF, sed quadratum CF est æquale quadratis CB, BF ob angulum rectum ad B, ergo quadratum CE æquabitur quadrato CF, ergo CE æquabitur CF.

Si quis autem in componendo sistat ibi, sed AE æquatur BF, perget eleganter hunc in modum, nulla adhibita comparatione planorum. Et quia in triangulis EAC, FBC duo latera AC, AE æqualia sunt duobus lateribus BC, BF, vtrunq; vtriq;, & anguli ad A, & B

æqua-

æquales, vt potè recti, ergo basis CE æquabitur basi CF.

Aliter autem longè clariùs, ac breuiùs tùm resolutio, tùm compositio instituetur.

Resolutio.

QVoniam CE æqualis est CF, ergo angulus CEF æquabitur angulo CFE; sunt autem AEF, BFE anguli inter se æquales, vtpotè recti, ergo angulus reliquus CEA æquabitur reliquo CFB, sed anguli ad A, & B sunt æquales, vt potè recti, ergo AC æquabitur CB,& AE æquabitur BF. Quod ita se habet,nam AE,& BF sunt latera opposita parallelogrammi AEFB; vnde sunt inter se æqualia; Et quoniam AB ob eandem rationem est æqualis EF, erit vt AD ad EF, ita AD ad AB, sed AD est dupla ipsius AB, ergo AD est dupla ipsius EF, sed vt AD ad EF, ita EF ad AC; ergo EF est dupla ipsius AC; sed AB, & EF sunt inter se æquales, ergo AB erit dupla ipsius AC; quare AC æquabitur CB.

Compositio.

QVoniam AE est æqualis BF, & AC est æqualis CB, vt vidimus, suntque anguli ad A, & B æquales, vtpotè recti, ergo angulus CEA æquabitur angulo CFB; sunt autem anguli AEF, BFE inter se æquales, vtpotè recti, ergo angulus CEF æquabitur angulo CFE; quare CE æquabitur CF.

Non dissimili obscuritatis, ac implicationis vitio sequentis Theorematis Resolutio, Compositioq; laborat, vnde placuit hęc subijcere, vt quisque addiscat, à quibus operæ sit pretium abstinere.

THEOREMA.

Exemplum LXVI.

Sit recta AF diuisa in partes AB, BD, DF inæquales continuò crescentes, vel decrescentes; sitque CD differentia inter AB, BD, & EF differentia inter BD, DF.

Dico rectangulum abs BD in CD,plus EF,seu rectangulum BDG æquale esse aggregato rectangulorum, quorum vnum est abs AB in EF, alterum verò abs CD in DF, seu CDF, rectangulo.

Præparatio.

Subtrahatur AB ex BD, & remaneat CD, ex DF subtrahatur eadem AB, & remaneat DG, & ex eadem DF subtrahatur BD, & remaneat EF.

Resolutio.

A B C D G E F

QVoniam rectangulum factum ex EF in AB, vnà cum rectangulo facto ex CD in DF æquale est rectangulo BDG, nimirùm sub BD, & segmento quidem DG; rectangulum autem ex DF minus BD in AB, idem est quod rectangulum factum ex EF in AB, & rectangulum factum ex BD minus AB in DF,idem est quod rectangulum sub CD, & DF; ergo rectangulum ex DF minus BD in AB, vnà cum rectangulo ex BD minus AB, in DF, æquatur rectangulo BDG, hoc est facto sub BD in supradictum segmentum DG, Rectangulum autem sub DF minus BD in AB, additum rectangulo sub BD minus AB in DF, facit rectangulum BDF minus rectangulo ABD; ergo rectangulum BDF minus rectangulo ABD est factum ex BD in prædictum segmentum DG. Sed rectangulum factum ex DF minus AB, in BD, æquale est rectangulo BDF minus rectangulo ABD, ergo rectangulum sub DF, minus AB, in BD, æquabitur rectangulo BDG; ergo rectangulum BDG erit factum ex BD in aggregatum differentiarum CD, EF; quare GD erit æqualis aggregato differentiarum CD, EF. Quod ita se habet &c.

Compo-

Compositio.

Subtrahatur AB ex DB, & remaneat DC &c.

QVoniam igitur DG æqualis est aggregato differentiarum CD, EF; ergo rectangulum BDG erit factum ex BD in aggregatum differentiarum CD, EF, ergo rectangulum sub DF minus AB in BD æquabitur rectangulo BDG sed rectangulum factum ex DF minus AB in BD, æquale est rectangulo BDF minus rectangulo ABD, ergo rectangulum BDF minus rectangulo ABD, est factum ex BD in prædictum segmentum DG. At verò rectangulum sub DF minus BD in AB additum rectangulo sub BD minus AB, in DF, facit rectangulum BDF minus rectangulo ABD; ergo rectangulum ex DF minus BD in AB, vnà cum rectangulo ex BD minus AB in DF æquabitur rectangulo BDG, hoc est facto sub BD in supradictum segmentum DG, sed rectangulum ex DF minus BD in AB, idem est quòd rectangulum factum ex EF in AB, & rectangulum ex BD minus AB in DF idem est quod rectangulum sub CD, & DF; ergo rectangulum factum ex EF in AB, vnà cum rectangulo facto ex CD in DF æquabitur rectangulo BDG, nimirum abs BD in CD plus EF seu sub BD, & segmento quidem DG,

Conspectus Resolutionis, & Compositionis.

Quoniam igitur rectangulum factum ex EF, in AB, vna cum rectangulo facto ex CD in DF æquale est rectangulo BDG, seu sub BD, & DG. Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Rectangulum autem ex DF, minus BD in AB, idem est quod rectangulum factum ex EF in AB, &

Rectangulum factum ex BD, minus AB in DF, idem est quod rectangulum sub CD & DF; ergo

Rectangulum ex DF, minus BD, in AB, vna cum rectangulo ex BD, minus AB in DF, æquabitur rectangulo BDG, hoc est facto ex BD in supradictum segmentum DG.

Rectangulum autem sub DF, minus BD, in AB, additum rectangulo sub BD, minus AB, in DF, facit rectangulum BDF, minus rectangulo ABD, ergo

Rectangulum BDF, minus rectangulo ABD, est factum ex BD, in prædictum segmentum DG, sed

Rectangulum factum ex DF, minus AB, in BD, æquale est rectangulo BDF, minus rectangulo ABD ergo Finis Resolutionis, & Initium Compositionis.

Rectangulum sub DF, minus AB in BD, æquabitur rectangulo BDG, ergo

Rectangulum BDG erit factum ex BD, in aggregatum differentiarum CD, EF, ergo

GD, erit æqualis aggregato differentiarum CD, EF. Quod ita &c.

In suprapolita, vt vidisti resolutione, compositioneq; Geometricus ille candor Europæus desideratur, cum affluat potius Arabica barbarie, vnde magis tenebras intellectui offundat, quam euidentiam pariat.

Longè tamen faciliùs, ac breuiùs, id absoluemus hunc, qui sequitur, in modum. Exemplum LXVII.

Lemma.

Sint tres magnitudines AB, AC, AD. Dico aggregatum differentiarum esse differentiam inter maximam, & minimam.

Differentia inter AB, minimam, & mediam AC est BC, differentia inter mediam AC, & maximam AD, est CD, quarum differentiarum aggregatum est BD, sed BD, est differentia inter minimam AB, & maximam AD, ergo patet propositum.

A B C D

Vnde constat si ex maxima auferatur aggregatum differentiarum, quod remanet, æquari minimæ.

Resolutio.

A B C D G E F

QVoniam rectangulum BDG æquale est rectangulo sub AB, EF, vna cum rectangulo CDF, est autem rectangulum CDG plus rectangulo sub CD, GF, æquale rectangulo CDF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo sub AB, EF, vnà cum rectangulo CDG plus rectangulo sub CD, GF; sed BC est æqualis AB, item & GF ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo sub BC, EF, vnà cum rectangulo CDG plus rectangulo BCD; ergo DG est * æqualis CD, plus EF, & BD æqualis est BC plus CD. Quod ita se habet.

** ex eo quod præmissum est lemmate.*

Compositio.

QVoniam BD est æqualis BC plus CD, at verò DG est æqualis CD plus EF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo sub BC EF, vnà cum rectangulo CDG * plus rectangulo BCD, sed BC est æqualis AB, item & GF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo sub AB, EF, vnà cum rectangulo CDG plus rectangulo sub GF, & CD, sed rectangulum CDG plus rectangulo sub CD, & GF est æquale rectangulo CDF; ergo rectangulum BDG æquabitur rectangulo sub AB, EF, vnà cum rectangulo CDF.

** Rectangulū CDG æquale est quadrato CD, plus rectāgulo CD, EF; nam CD plus EF æquatur DG.*

Vide igitur magni quidem interesse potiorem resolutionem seligere: vnde id præ oculis semper habere præstat; quod animaduertisse non fuit alienum ab instituto.

Ne dum à supradictis, sed etiam ab omni alia demonstrandi ratione obscuriori, ac implicatiori abstinere præstat, vnde non admodum est commendabilis ille transitus qui fit in demonstrando à planis ad solida, vt inde ad plana ipsa reditus fiat. Ita si e.g. foret illud propositum.

THEOREMA.

Exemplum LXVIII.

Si recta AB, ita diuisa sit in C, D, & E, vt quemadmodum est AD ad DC, ita sit BD ad DE. Dico rectangulum DEB ad quadratum DE rationem habere, vt AC ad CD.

Resolutio.

A C D E B

QVoniam igitur est vt AC ad CD, ita rectangulum DEB ad quadratum DE; ergo solidum sub AC in quadratum DE æquabitur solido sub CD, DE, EB omnibus applicatis ad DE; ergo rectangulum sub AC, DE æquabitur rectangulo sub CD, & EB, seu rectangulo CDB, minus rectangulo CDE, vtrinque addito rectangulo CDE; ergo rectangulum sub AC, DE, plus rectangulo CDE, hoc est rectangulum ADE, æquabitur rectangulo CDB; quare vt AD ad DC, ita BD ad DE. Quòd ita se habet, ex hypothesi enim hunc in modum supponimus lineam esse diuisam.

Compositio.

QVoniam igitur vt AD ad DC, ita BD ad DE; ergo rectangulum ADE hoc est rectangulum sub AC, DE plus rectangulo CDE æquabitur rectangulo CDB; vtrinque sublato rectangulo CDE; ergo rectangulum sub AC, DE æquabitur rectangulo CDB, minus rectangulo CD, seu æquabitur rectangulo sub CD, EB; omnibus ductis in DE; ergo solidum sub AC in quadratum DE æquabitur solido sub CD, in rectangulum DEB; quamobrem, vt AC ad CD, ita rectangulum DEB ad quadratum DE. Quod oportebat ostendere.

Hæc resolutionis ratio non ideò detestabilis, quia in se aliquid falsi contineat, vel malè deducat, nam vera quidem assumit, & inde benè quoq; ac ritè verum ipsum infert; nec præterea quia per impropria procedat, vt videbatur Ghetaldo, non aliam ob causam illam respuenti, ac detestati; propterea quod nihil est magis proprium Geometræ, quàm solidorum

gorum consideratio, de quibus etiam Geometrarum Princeps Euclides edisserit: Et certè si duas superficies planas æquales inferamus, v. g. duos circulos, eò quia sint bases duorum Cylindrorum æqualium eiusdem altitudinis, non vtiq; per Geometriæ impropria id demonstrantes procedere diceremur, sed ex eo potius est minus commendabile, quoniam demonstrationes fiunt rudes, ac subobscuræ, cùm alioquin in ipsis claritas, & perspicuitas sit magnoperè laudabilis; euidentia siquidem, quæ scientiæ est propria; scientia enim semper comitem habet euidentiam; magni fieri debet.

Nihilominus non omninò, ac penitùs hic demonstrandi modus arcendus ex Geometriæ finibus, ac expungendus est è Geometrico Albo; cum eius vsu, & Veteres, & Recentiores præclarissima figurarum symptomata demonstrauerint: Cũ deest ascẽsus à planis ad solida, licet; Testis sit Pappus Alexandrinus, qui quarto Libro Collectionum Mathematicarum propositione vigesima prima demonstrat, figuram contentam linea spirali, & recta, quæ est in principio circulationis, tertiam partem esse circuli ipsam comprehendentis, transitu facto à planis ad solida, nimirùm conum, atq; cylindrum, colligens rationem illam spatij iam dicti ad circulum eandem esse cum ea, quam habet conus ad Cylindrum eiusdem baseos, ac altitudinis, nempè subtriplam; atq; adeò vt cylindrus est triplus coni eandem basim, & eandem altitudinem habentis, ita circulum triplum esse spatij prædicti. *Superior resolutionis modus non omninò spernendus.*

Multoties igitur lineam ad lineam, vel superficiem ad superficiem ostendimus esse, vt solidum ad solidum; tunc autem nullus est locus superiori difficultati, cùm hìc desit ascensus à planis ad solida, & hinc ad eadem reditus, idq; est etiam primariò intentum, nec est demonstrandi ratio, sed potius demonstrationis scopus. Ita planè factum ab Antiquis omnibus compertum est; vnde Pappus libro quarto Propositione XXII, ostendit partem spatij spiralis ad partem rationem habere, vt lineæ cubus ad cubum alterius lineæ; perinde enim est, ac si demonstraremus ita esse spatium ad spatium spirale, vt cubus lineæ ad lineæ cubum: quamobrem, sicuti licet ostendere ita esse conum ad conum eiusdem altitudinis, vel parallelepipedum ad parallelepipedum, vel cylindrum ad cylindrum, vt basis ad basim, ita quoque esse vnius lineæ cubum ad alterius lineæ cubum, vt est pars spatij spiralis ad partem, nempè vt superficies plana ad planam superficiem; loquimur enim de spirali descripta in plana superficie; & quidem ad hoc nil aliud requiritur, nisi vt seruetur homogeneorum lex in analogismo quatuor terminorum proportionalium, ita videlicet, vt bini eiusdem omninò naturæ sint, primus cum secundo, & tertius cum quarto. Sed de his satis; nihil enim difficultatis habent. *Comprobatio.*

Cæterùm superius illud Theorema longè faciliùs resoluetur, & componetur hunc in modum.

Resolutio.

Quoniam igitur est, vt AC ad CD, ita rectangulum BED ad quadratum DE; sed vt rectangulum BED ad quadratum DE, cùm eiusdem sint altitudinis, ita [a] BE ad ED; ergo vt AC ad CD, ita BE ad ED; quare componendo [b] erit vt AD ad DC, ita BD ad DE. Quod ita se habet; hunc enim in modum supponimus lineam esse diuisam.

a prim sex.
b 18 quinti.

Compositio.

Quoniam igitur est, vt AD ad DC, ita BD ad DE; ergo diuidendo [α] erit, vt AC ad CD, ita BE ad ED, sed vt BE ad ED, ita [β] rectangulum BED ad quadratum DE, cùm eiusdem sint altitudinis DE; ergo vt AC ad CD, ita rectangulum BED ad quadratum DE.

α 17. quinti.
β 1. sexti.

Nec dissimiliter est obseruandum plerumque resolutionem institui posse per simplicem rationem; vnde laudabilius est hoc resolutionis genere vti, quàm illo, quod per compositionem rationis perficitur: quamobrem non possum non mirari, quòd Apollonius Geometrarum præstantissimus, per compositionem rationis processerit in Theorematibus 11, 12, & 13, etsi longè elegantiùs eadem citrà quamcunque rationis compositionem ostendi possint ad eum, qui sequitur, modum.

THEOREMA.

Exemplum LXIX.

Sit conus, cuius vertex punctum A, basis autem circulus, cuius diameter BC, seceturque plano per axem, quod sectionem faciat triangulum ABC, & seetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam DE, qua ad BC sit perpendicularis: faciat autem sectionem in superficie coni DFE lineam; diameter vero sectionis FG, sit aquidistans vni laterum trianguli per axem, nimirum ipsi AC: à puncto autem F linea FG ad rectos angulos ducatur FR, & fiat vt quadratum BC ad rectangulum BAC, ita linea RF ad FA: deinde sumatur in sectione quoduis punctum k, & per K ducatur kL ipsi DE aquidistans. Dico quadratum KL rectangulo RFL aquale esse.

a 31. primi.
b 15. vndecimi.
c 4 pri. Apoll.
d 10. vndecimi.
e coroll. 8. sexti & 17. eiusdem.

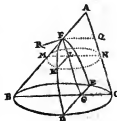
Ducatur a per L ipsi BC æquidistans MN; est autem KL æquidistans ipsi DE; ergo planum transiens per KLMN plano transeunti per BCDE, coni basi æquidistabit b; ac propterea planum per kLMN circulus erit c, cuius diameter MN. Est d porrò kL ad MN perpendicularis, cùm DE sit perpendicularis ad BC; ergo rectangulum MLN æquabitur e quadrato KL: agatur FQ parallela ipsi MN.

Resolutio.

f coroll. 8. sexti, & 17. eiusdem.
g 1. ax. primi.
h 1. sexti.

QVoniam rectangulum RFL, æquale est quadrato KL; sed rectangulum MLN, æquale est f quadrato KL; ergo rectãgulum RFL æquabitur g rectangulo MLN; sed ex cõstructione sumpta h communi altitudine FL, vt rectangulum BAC ad quadratum BC, ita rectangulum AFL, ad rectangulum RFL; ergo rectangulum BAC, ad quadratum BC, erit, i vt rectangulum AFL, ad rectangulum MLN; sed vt AB ad BC, ita k AF ad LN, seu FQ, ob similitudinem triangulorum ABC, & FAQ; ergo; vt AC ad BC, ita FL ad LM * Quod ita se habet ob similitudinem triãgulorum ABC, & MFL.

i 7. quinti.
k 4. sexti.
* Proportionalia enim si ad proportionalia applicentur, proportionalia emergūt.



Compositio.

QVoniam triangula ABC, MFL, sunt similia; ergo erit vt AC ad BC, ita FL ad LM; sed vt AB ad BC, ita AF ad FQ, seu LN, ob similitudinem triangulorum ABC, FAQ; ergo rectangulum BAC, ad quadratum BC erit, * vt rectangulum AFL, ad rectangulum MLN. Sed ex constructione sumpta communi altitudine FL, vt rectangulum BAC ad quadratum BC, ita rectangulum AFL ad rectangulum RFL; ergo rectangulum RFL æquabitur rectangulo MLN; sed rectangulum MLN æquale est quadrato kL; ergo rectangulum RFL æquabitur quadrato kL.

* si aliqui proportionalia, in proportionalia ducantur, facta erunt proportionalia.

Hinc intelliges quanti referat idoneam adinuenisse præparationem, cuiusmodi est duxisse rectam FQ parallelam ipsi MN, seu BC; inde siquidem facilitas resolutionis innixæ principio satis obuio, quòd scilicet proportionalia si ad proportionalia applicentur, proportionalia procreentur, quod nos initio primi Tomi explicuimus; vnde manifestum redditur sciolos illos toto Cælo aberrare, qui putant non esse operæ pretium in huiusmodi principiorum contemplatione immorari; id enim si ab Apollonio fuisset animaduersum, decenti, qua vsi sumus, præparatione, certè Theorema istud longè faciliùs ostendisset, non adactus ad rationis compositionem confugere, quæ quoniam est magis implicata, ideò minus laudabilis; & eo quoque nomine demonstratio superior commendabilior est, quoniam minus à primis principijs recedit, vnde magis ad illius accedit naturam, quæ per immediata procedit; tantòque maiorem ingerit admirationem, quantò ex tenuissimo principio abstrusæ propositionis veritas orta conspicitur: Non secùs ac quisque cogitur admirari, aduer-

aduertens quercum ingentem ex exigua glande nascentem. Hic tamen non prætereibo hoc idem Theorema à nobis ostensum fuisse in Comm., quos super Apollonium conscripsimus sine rationis compositione, si tamen superior præparatio fuerit adhibita, & ita se habet.

Quoniam ex constructione est, vt quadratum BC ad rectangulum BAC, ita RF ad FA: est autem rectangulum BAC, ad rectangulum ACB, sumpta AC communi altitudine, vt AB ad BC, seu AM, ad MN, seu AF, ad FQ, seu ad LN; ergo ex æquo erit quadratum BC ad rectangulum ACB, vt RF ad LN; vt autem quadratum BC ad rectangulum ACB, ita BC ad CA, seu MN ad NA, seu ML ad LF; ergo erit vt RF ad LN, ita ML ad LF; quare rectangulum sub extremis, puta RF, FL æquabitur rectangulo sub medijs NL, ML; huic autem est æquale quadratum kL; quare rectangulum RFL, æquabitur quadrato KL.

THEOREMA.

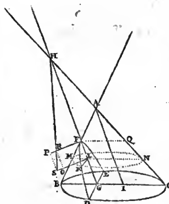
Exemplum LXX.

Sit Conus, cuius vertex A punctum, basis verò circulus, cuius diameter BC: secetur autem plano per axem, quod sectionem faciat triangulum ABC: secetur autem & altero plano secante basim coni secundùm rectam lineam DE ad BC basim trianguli ABC, perpendicularem; faciat verò sectionem in superficie coni lineam DFE, & sectionis diameter FG, producta, cum ipso AC latere trianguli ABC, extra coni verticem conueniat in puncto H: deinde per A, recta ducatur AI, diametro quidem æquidistans, quæ secet BC, & ab F ducatur FR ad rectos angulos ipsi FG: fiat autem, vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita HF linea ad lineam FR; sumatur autem in sectione quodcunque punctum K, & per k ducatur kL æquidistans DE, & per L ipsi FR ducatur æquidistans LS: tandem iuncta HR, & ad S producta, per R, S ipsi FL, æquidistantes agantur RO, PS.

Dico lineam KL posse spatium FS, quod quidem adiacet lineæ FR, latitudinem habens FL, exceditque figura RS simili ei, quæ HFR, continetur.

Ducatur [a] per L, linea MN æquidistans BC: est autem & KL ipsi DE æquidistans; ob id planum, quod trāsit per KL, MN æquidistabit [b] plano per BC, DE, nimirum ipsius coni basi; producto autem plano per KL, MN, fiet [c] sectio circulus, cuius diameter MN, ad quam perpendicularis [d] est KL, quòd DE, sit itidem ad BC; vnde rectangulum MLN, æquabitur [e] KL quadrato.

a 31. primi.
b 15. undecimi.
c 4. pri. Apoll.
d 10. undecimi.
e corol. 8. sexti & 17. eiusdē.



Resolutio.

Quoniam igitur rectangulum SLF, æquale est quadrato kL; sed rectangulum MLN, æquale est [f] quadrato kL; ergo rectāgulum SLF, æquabitur [g] rectāgulo MLN; est [h] autem ex cōstructione sumpta FL communi altitudine, vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum FLS; ergo vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF ad rectangulum MLN, sed [i] vt AI ad IB, ita FL, ad LM, cùm triangula similia sint ABI, FML; ergo erit, * vt AI ad IC, ita HL ad LN, seu HF ad FQ. Quod ita se habet; [k] triangula enim AIC, & HLN, seu HFQ, similia sunt,

f corol. 8 sexti & 17 eiusdē.
g 1. ax. primi.
h 1. sexti.
i 4. sexti.
* Proportionalia enim, si ad proportionalia applicētur orta sunt proportionalia.
k 4. sexti.

Compositio.

Quoniam itaque triangula AIC, HFQ, seu HLN, similia sunt; ergo erit [α] vt AI, ad IC, ita HF ad FQ, seu HL ad LN; est [β] autē vt AI ad IB, ita FL ad LM, cùm triāgula ABI, FML similia sint; ergo [γ] vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum MLN; * est autem ex [δ] constructione sumpta FL communi altitudine, vt qua-

α 4. sexti.
β ibidem.
γ ex Elemētis
δ 1. sexti.
* Proportionalia enim si in proportionalia ducantur, orta sunt proportionalia.

THEOREMA.

Exemplum LXIX.

Sit conus, cuius vertex punctum A, basis autem circulus, cuius diameter BC, secetúrque plano per axem, quod sectionem faciat triangulum ABC, & secetur altero plano secante basim coni secundùm rectam lineam DE, quæ ad BC sit perpendicularis: faciat autem sectionem in superficie coni DFE lineam; diameter vero sectionis FG, sit æquidistans vni laterum trianguli per axem, nimirum ipsi AC: à puncto autem F linea FG ad rectos angulos ducatur FR, & fiat vt quadratum BC ad rectangulum BAC, ita linea RF ad FA: deinde sumatur in sectione quodvis punctum k, & per K ducatur kL ipsi DE æquidistans. Dico quadratum KL rectangulo RFL æquale esse.

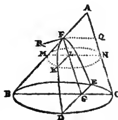
a 31. primi. b 15. vndecim. c 4 pri. Apoll. d 10. vndecimi. e coroll. 8. sexti & 17. eiusdē.

Ducatur, per L ipsi BC æquidistans MN; est autem KL æquidistans ipsi DE; ergo planum transiens per KLMN plano transeunti per BCDE, coni basi æquidistabit b; ac propterea planum per kLMN circulus erit c, cuius diameter MN. Est d porrò kL ad MN perpendicularis, cùm DE sit perpendicularis ad BC; ergo rectangulum MLN æquabitur e quadrato KL: agatur FQ parallela ipsi MN.

Resolutio.

f coroll. 8. sexti, & 17. eiusdē. g 1. ax. primi. h 1. sexti. i 7. quinti. k 4. sexti. * Proportio nalia enim si ad proportionalia applicentur, proportionalia emergūt.

QVoniam rectangulum RFL, æquale est quadrato KL; sed rectangulum MLN, æquale est f quadrato KL; ergo rectãgulum RFL æquabitur g rectangulo MLN; sed ex cõstructione sumpta h communi altitudine FL, vt rectangulum BAC ad quadratum BC, ita rectangulum AFL, ad rectangulum RFL; ergo rectangulum BAC, ad quadratum BC, erit, i vt rectangulum AFL, ad rectangulum MLN; sed vt AB ad BC, ita k AF ad LN, seu FQ, ob similitudinem triangulorum ABC, & FAQ; ergo; vt AC ad BC, ita FL ad LM * Quod ita se habet ob similitudinem triãgulorum ABC, & MFL.



Compositio.

* si enim proportionalia in proportionalia ducantur, facta erunt proportionalia.

QVoniam triangula ABC, MFL, sunt similia; ergo erit vt AC ad BC, ita FL ad LM; sed vt AB ad BC, ita AF ad FQ, seu LN, ob similitudinem triangulorum ABC, FAQ; ergo rectangulum BAC, ad quadratum BC erit, * vt rectangulum AFL, ad rectangulum MLN. Sed ex constructione sumpta communi altitudine FL, vt rectangulum BAC ad quadratum BC, ita rectangulum AFL ad rectangulum RFL; ergo rectangulum RFL æquabitur rectangulo MLN; sed rectangulum MLN æquale est quadrato kL; ergo rectangulum RFL æquabitur quadrato kL.

Hinc intelliges quanti referat idoneam adinuenisse præparationem, cuiusmodi est duxisse rectam FQ parallelam ipsi MN, seu BC; inde siquidem facilitas resolutionis innixæ principio satis obuio, quòd scilicet proportionalia si ad proportionalia applicentur, proportionalia procreentur, quod nos initio primi Tomi explicuimus; vnde manifestum redditur sciolos illos toto Cælo aberrare, qui putant non esse operæ pretium in huiusmodi principiorum contemplatione immorari; id enim si ab Apollonio fuisset animaduersum, decenti, qua vsi sumus, præparatione, certè Theorema istud longè faciliùs ostendisset, non adactus ad rationis compositionem confugere, quæ quoniam est magis implicata, ideò minus laudabilis; & eo quoque nomine demonstratio superior commendabilior est, quoniam minus à primis principijs recedit, vnde magis ad illius accedit naturam, quæ per immediata procedit; tantòque maiorem ingerit admirationem, quantò ex tenuissimo principio abstrusæ propositionis veritas orta conspicitur: Non secùs ac quisque cogitur admirari,

aduer-

aduertens quercum ingentem ex exigua glande nascentem. Hic tamen non prætereo hoc idem Theorema à nobis ostensum fuisse in Comm., quos super Apollonium conscripsimus sine rationis compositione, si tamen superior præparatio fuerit adhibita, & ita se habet.

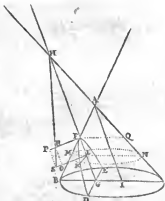
Quoniam ex constructione est, vt quadratum BC ad rectangulum BAC, ita RF ad FA: est autem rectangulum BAC, ad rectangulum ACB, sumpta AC communi altitudine, vt AB ad BC, seu AM, ad MN, seu AF, ad FQ, seu ad LN; ergo ex æquo erit quadratum BC ad rectangulum ACB, vt RF ad LN; vt autem quadratum BC ad rectangulum ACB, ita BC ad CA, seu MN ad NA, seu ML ad LF; ergo erit vt RF ad LN, ita ML ad LF; quare rectangulum sub extremis, puta RF, FL æquabitur rectangulo sub medijs NL, ML; huic autem est æquale quadratum kL; quare rectangulum RFL, æquabitur quadrato KL.

THEOREMA.

Exemplum LXX.

Sit Conus, cuius vertex A punctum, basis verò circulus, cuius diameter BC: secetur autem plano per axem, quod sectionem faciat triangulum ABC: secetur autem & altero plano secante basim coni secundùm rectam lineam DE ad BC basim trianguli ABC, perpendicularem; faciat verò sectionem in superficie coni lineam DFE, & sectionis diameter FG, producta, cum ipso AC latere trianguli ABC, extra coni verticem conueniat in puncto H: deinde per A, recta ducatur AI, diametro quidem æquidistans, quæ secet BC, & ab F ducatur FR ad rectos angulos ipsi FG: fiat autem, vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita HF linea ad lineam FR; sumatur autem in sectione quodcunque punctum K, & per k ducatur kL æquidistans DE, & per L ipsi FR ducatur æquidistans LS: tandem iuncta HR, & ad S producta, per R, S ipsi FL, æquidistantes agantur RO, PS.

Dico lineam KL posse spatium FS, quod quidem adiacet lineæ FR, latitudinem habens FL, exceditque figura RS simili ei, quæ HFR, continetur,



Ducatur [a] per L, linea MN æquidistans BC: est autem & KL ipsi DE æquidistans; ob id planum, quod trãsit per KL, MN æquidistabit [b] plano per BC, DE, nimirum ipsius coni basi; producto autem plano per KL, MN, fiet [c] sectio circulus, cuius diameter MN, ad quam perpendicularis [d] est KL, quòd DE, sit itidem ad BC; vnde rectangulum MLN, æquabitur [e] KL quadrato.

a 31. primi.
b 15. vndecimi.
c 4 pri Apoll.
d 10. vndecimi.
e corol. 8 sexti & 17. eiusdé.

Resolutio.

Quoniam igitur rectangulum SLF, æquale est quadrato kL; sed rectangulum MLN, æquale est [f] quadrato kL; ergo rectãgulum SLF, æquabitur [g] rectãgulo MLN; est [h] autem ex cõstructione sumpta FL communi altitudine, vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum FLS; ergo vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF ad rectangulum MLN, sed [i] vt AI ad IB, ita FL, ad LM, cùm triangula similia sint ABI, FML; ergo erit, * vt AI ad IC, ita HL ad LN, seu HF ad FQ. Quod ita se habet; [k] triangula enim AIC, & HLN, seu HFQ, similia sunt,

f corol. 8 sexti & 17 eiusdé.
g 1. ax primi.
h 1. sexti.
i 4. sexti.
* Proportionalia enim, si ad proportionalia applicẽtur, orta sunt proportionalia.
k 4. sexti.

Compositio.

Quoniam itaque triangula AIC, HFQ, seu HLN, similia sunt; ergo erit [α] vt AI, ad IC, ita HF ad FQ, seu HL ad LN; est [β] autẽ vt AI ad IB, ita FL ad LM, cùm triãgula ABI, FML similia sint; ergo [γ] vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum MLN; * est autem ex [δ] constructione sumpta FL communi altitudine, vt qua-

α 4. sexti.
β ibidem.
γ ex Elemẽtis
δ 1. sexti.
* Proportionalia enim si in proportionalia ducantur, orta sunt proportionalia.

vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF ad rectangulum SLF; ergo rectangulum SLF æquabitur e rectãgulo MLN, ſed rectangulum MLN æquale eſt ζ quadrato KL; ergo rectangulum SLF æquabitur quadrato KL. Quod oportebat oſtendere.

e 9. quinti. ζ corol. 8 ſexti & 17. eiuſdẽ.

Et etiam vt AI ad IB, ita FQ ad FR; vnde constructio aliter, atq; adeò reſolutio fieri potuiſſet.

Sed ex noſtris Commentarijs in Apollonium hoc excerpſimus ſine præparatione parallelæ FQ.

Quoniam igitur rectangulum BIC ad quadratum AI, eſt ex conſtructione vt FR, ad FH, ſeu SL, ad LH; vt autem quadratum AI, ad rectangulum AIC, ita eſt AI ad IC, ſeu HG ad GC, ſeu HL, ad LN; ergo ex æquali rectangulum BIC, ad rectangulum AIC, erit, vt SL ad LN; vt autem rectangulum BIC, ad rectangulum AIC, ita BI ad IA, ſeu BG ad GF, ſeu ML ad LF; ergo vt SL ad LN, ita ML ad LF; quare rectangulum SLF æquabitur rectangulo MLN, ſed rectangulum MLN eſt æquale quadrato KL; ergo rectãgulũ SLF æquabitur quadrato KL.

THEOREMA.

Exemplum LXXI.

Sit Conus, cuius vertex A punctum; baſis circulus, cuius diameter BC, ſecetur autem plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum ABC; ſecetur autem, & altero plano conueniente cum vtroque latere trianguli per axem, neque baſi coni æquidiſtante, neque ſubcontrariè poſito, quod faciat ſectionem in ſuperficie coni lineam HF, & communis ſectio plani ſecantis, atque eius, in quo eſt baſis coni, ſit DGE perpendicularis ad BC; diameter autem ſectionis FH, & ab F ducatur FR, ad FH perpendicularis, perque A ducta AI, ipſi FH æquidiſtante, fiat vt quadratum AI, ad rectangulum BIC, ita FH, ad FR. Sumatur præterea in ſectione punctum K, & per K ipſi DG æquidiſtans ducatur KL. Dico KL poſſe ſpatium SF, quod lineæ FR adiacet, latitudinem habens FL, deficiens figura ſimili ei, quæ HFR continetur.

Iũgatur a HR, perque L ducatur LSO æquidiſtans FR; & per R, S pũcta ipſi FL æquidiſtantes b ducantur RO, SP. Poſtremò per L, agatur MLN æquidiſtans c ipſi BC. Itaque quoniam MN æquidiſtat BC, & KL ipſi DG, erit d planum ductum per KL, MN æquidiſtans plano per DG, BC, ducto, hoc eſt baſi coni. Si igitur planũ per KL, MN producatur, fiet e ſectio circulus, cuius diameter MN, & eſt KL ad ipſam perpendicularis; f ergo rectangulum LMN æquale eſt g quadrato KL.

a 31. primi. b ibidem. c ibidem. d 15. vndecimi. e 4. pri. Apoll. f 20. vndec. g corol. 8 ſexti & 17. eiuſdẽ.

Reſolutio.

QVoniam igitur rectangulum FLS æquale eſt quadrato KL, ſed rectangulum MLN æquale eſt h quadrato KL; ergo rectangulum FLS æquabitur i rectangulo MLN; ſed vt quadratum AI, ad rectangulum BIC, ita ex conſtructione eſt rectangulum HLF, ad rectangulum FLS, ſeu HL ad LS, ſeu HF, ad FR; quamobrem vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF ad rectangulum MLN; vt autem AI ad IB, ita eſt FL, ad LM, cùm triangula BAI, & MFL ſint ſimilia; ergo vt AI ad IC, ita HL ad LN; * Quod ita ſe habet; triangula enim ACI, & HNL ſimilia ſunt.

h cor. 8. ſexti, & 17. eiuſdẽ. i 3. ax. primi. * Proportionalia enim ſi ad proportionalia applicetur, proportionalia emergunt.

Compo-

Compositio.

QVoniam itaque triangula ACI, & HNL similia sunt; ergo erit α vt AI ad IC, ita HL ad LN; vt autem AI ad IB, ita β est FL ad LM, cùm triangula BAI, & MFL, sint similia: quamobrem vt quadratum AI, ad rectangulum BIC, ita rectangulum HLF, ad rectangulum MLN; * sed vt quadratum AI ad rectangulum BIC, ita ex constructione est HF ad FR, seu HL ad LS, seu sumpta FL communi altitudine, ita rectangulum HLF ad rectangulum FLS; ergo rectangulum FLS æquabitur γ rectangulo MLN, sed rectangulum MLN æquale est δ quadrato kL; ergo rectangulum FLS æquabitur quadrato kL. Quod oportebat &c.

α 4. sexti.

β ibidem.

* Proportionalia enim, si in proportionalia ducantur, proportionalia fiũt.

γ 9 quinti.

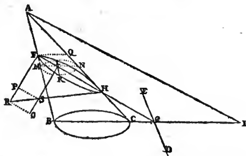
δ corol. 4. sexti, & 17. eiusdem.

Est etiam vt AI ad BI, ita FQ ad FR, vnde aliter constructio, atque adeò resolutio instituí potuisset.

Sed hæc in nostris Commentarijs super Apollonium scripta adinuenimus.

Quoniam est rectangulum BIC ad quadratum AI, ex constructione vt RF ad FH, seu SL ad LH, & est quadratum AI ad rectãgulum AIC, vt AI ad IC, seu HG ad GC, seu HL ad LN; erit a igitur ex æquo SL ad LN, vt rectangulum BIC ad rectangulum AIC; sed vt rectangulum BIC ad rectãgulum AIC, ita est rectangulum BGC ad rectangulum FGC, propterea quod rectangulum BIC, ad rectangulum AIC est vt BI, ad AI, hoc est BG ad GF, hoc est rectangulum BGC ad rectãngulum FGC; at verò rectangulum BGC ad rectangulum FGC, est vt BG ad GF, hoc est ML ad LF; ergo vt SL ad LN, ita ML ad LF; ergo rectangulum SLF æquabitur rectangulo MLN, atque adeo quadrato ex kL, quandoquidem quadratum KL æquale est rectangulo MLN.

a 22. quinti.



DE RECTA DEMONSTRANDI RATIONE

Ab Analysta seruanda.

CAP. IX.

SI quem vtique decet omni curã, diligentiaque prorsùs in ipsam demonstrandi rationem ac Artem incumbere, is profectò Mathematicus est; Mathematicæ siquidem disciplinæ, vel eo nomine dignitate, cæteris antecellunt, quòd huiusmodi demonstrationibus vtantur, quæ certitudine, firmitateque, cæterarum omnium præstantissimæ sunt; Quamobrem genus docendi limatum, firmum, exquisitum, ac numerorum omnium complexionem habens, Mathematicum est. Harum etenim disciplinarum probationes, claræ sunt adeò, ac euidentes; adeò sunt firmis innixæ principijs Naturæ lumine perspectis, vt quamcunque dubitationem eximant, nullumque dissentiendi locum, relinquant; propterea disciplinas hasce tractanti, maximè contexendi demonstrationes, iuxta vulgatas leges, onus ingens incumbit, ita, vt ab his, nec latum vnguem discedat. Laudabile proinde cuique videbitur, pauca quædam in memoriam redigere ex demonstrandi Arte depromptá, quibus Analysta nimirum in suo obeundo munere edoctus, harum disciplinarum

Maxime decet Mathematicum omnem adhibere curam in demõstrando.

Demõstrationes Mathematica omnium præstãtissimæ.

plinarum dignitatem tueatur, ac seruet. Tametsi namque magni referat in demonstrando Veterum inhærere vestigijs, eorumdemq; sedulò monumenta versare cùm apud ipsos excelsi quidē ordinis hæ magno in honore fuerint disciplinæ, in primis floruerint, ac satis extiterint pro dignitate tractatæ; tamen nisi præceptis instructus, nemo declinabit ab ijs, in quos facillimum est erroribus, labi; neq; præceptis, ac legibus Artis demonstratricis destituto pristinum, ac antiquum illum candorem, in tanta disciplinarum celebritate, solâ quadam imitatione, retinere vnquam licebit.

Ad rectè demonstrandum requiruntur præcepta.

Non vulgaris propterea videtur adhibenda sedulitas in struendis probationibus, ad veritatem in his consequendam, cùm eò tendat huius Artificis industria, vt per ἀνάλυσιν, καὶ σύνθεσιν, atque adeò per exquisitam probationis rationem Theorema propositum demonstret; ac huiusmodi ratiocinio confirmet, quod iam initio demonstrationis explicatæ, naturam omninò sapit, ac redolet. Nec aliò quidem ipsius labor collineat, nisi ad seriem consecutionum ordinandam, vt verum assequatur; vnde repetitis vestigijs, quibus firmiter inhæret, contrario gressu incedens, quod initio propositum erat, necessariâ demonstratione, confirmet. Eruditioris tamen sunt partes probandi genus illud assumere, quod numeris omnibus absolutum, suisq; partibus elaboratum, ac perpolitum communi sapientum calculo, iudicetur.

Antequam tamen decernatur, quæ nam sit è pluribus seligenda demonstratio; iuuat iterum huius naturam superiùs insinuatam non nihil perpendere, qua de re cumulatè quidem in Posterioribus Analyticis disseritur; quod, vt breuiter assequamur, prætermissis iam supratraditis de præcognitionibus, atque præcognitis, de ipsius demonstrationis definitione, eiusque bipartita diuisione; videndum superest, cuiusmodi esse debeant præmissæ, è quibus fit potissima demonstratio, ad quas pertinet etiam medium cuius consideratio, principiorum complexorum meditatio est, de quo propterea non nulla paucis comprehensa, dicenda.

Hoc autem ex necessaria, & euidenti connexione sui cum extremis in ipsis præmissis, ob oculos mutuam eorundem extremorum coniunctionem industriosè deducens in conclusione constituit. Quoniam verò duplex est demonstrandi genus, ab effectu scilicet ad causam, & contra; seu vt Scholastici loquuntur, quia, & propter quid; in priori medium, vel est effectus conuertibilis, siue non conuertibilis cum causa, vel est causa remota &c. quo prætermisso, vtpotè minus ad rem in Mathematicis puris, quamuis in Physicis locum, dignitatemq; retineat, ob id aliud superest perpendendum.

Genus demonstrandi ab effectu ad causam.

In alio autem demonstrationis genere, medium causæ rationem, & quidem in omni genere obtinet, quod luculenter expressum apud Philosophum legimus. Ἐπεὶ δὲ ἐπίστασθαι οἰόμεθα, ὅταν εἰδῶμεν τὴν αἰτίαν. αἰτίαι δὲ τέσσαρες, μία μὲν τὸ τί ἦν εἶναι, μία δὲ τὸ τίνων ὄντων, ἀνάγκη τοῦτ' εἶναι, ἑτέρα δὲ, ἡ τί πρῶτον ἐκίνησε, τετάρτη δὲ τὸ τίνος ἕνεκα πᾶσαι αὗται διὰ τοῦ μέσου δείκνυνται.

Aliud genus demonstrandi à causa ad effectum.

1. Poster. tex. 48. *Quoniam autem scire opinamur, quando sciamus causam; causæ verò quatuor, vna quidem quod quid erat esse, vna verò quibusdam existentibus, necessè hoc esse; altera autem quæ aliquid primo mouit, quarta vero, cuius causa, omnes istæ per medium monstrantur.* Physicus

2. Phys. tex. 79. quidem omnibus hisce causarum generibus vtitur, Aristotelis testimonio; quoniam, vt res ipsæ, quas quidem sua contemplatione persequitur ab omni causarum genere, proprium esse recognoscunt: ita pariter ad sui cognitionem quodcunque causæ genus exposcunt. Quæ tamen potissima dicitur demonstratio, per causæ formalis genus, non immeritò procedere perhibetur; quo nomine subiecti natura, ac definitio, quin etiam, & affectionis saltem quæ causalis dicitur definitio, intelligitur. At in Mathematicis disciplinis etiam ad aures Aristotelis, cùm nec finis, nec efficiens locum obtineat, causæ tantummodò materialis, formalisque supersunt, integrantibus partibus materiæ nomine intellectis, quæ nimirùm totius comparatione, materiei munere funguntur; vnde rectè Philosophus.

Demonstratio potissima per quod causæ genus procedat.

3. Diuinorum tex. 23.

2. Phy. tex. 91. δῆλον δὲ καὶ ὧδε, διατί ὀρθὴ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ, τίνος ὄντος, ὀρθή, ἔστω δὴ ὀρθὴ, ἐφ' ἧς α,

2. Post. tex. 49. ἡμίσεια δυοῖν ὀρθαῖν, ἐφ' ἧς β, ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ, ἐφ' ἧς γ, τοῦ δὴ τὸ α, τὴν ὀρθὴν ὑπάρχειν τῷ γ, τῇ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ. αἴτιον τὸ β αὕτη μὲν γὰρ τῇ α, ἴση, ἡ δὲ τὸ γ, τῇ β. δύο γὰρ ὀρθῶν ἡμίσεια, τοῦ β, ὄντος ἡμίσεος δύο ὀρθῶν τὸ α, τῷ γ, ὑπάρχει, τοῦτο δ' ἦν τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν εἶναι, τοῦτο δὲ ταυτὸν ἐστι τῷ τί ἦν εἶναι, τῷ τοῦτο σημαίνειν τὸν λόγον, ἀλλὰ μὴν καὶ τοῦτο ἦν εἶναι αἴτιον δέδεικται τὸ μέσον.

Manife-

Manifestum autem & sic propter quid rectus, qui in semicirculo quo existente rectus, sit profecto rectus in quo A, dimidium duorum rectorum, in quo B, qui in semicirculo, in quo C: huius igitur quod est A, rectum inesse ipsi C, qui in semicirculo, causa ipsum B: hoc enim ipsi A, aequale, qui verò C, ipsi B, duorum enim rectorum dimidium B; igitur existente dimidio duorum rectorum A, ipsi C, inest: hoc autem erat in semicirculo rectum esse; hoc autem idem est ipsi quid erat esse, eo quod significat ratio, verùm & ipsius quid erat esse causa demonstrata est media.

Materiali propterea causa Geometria vtitur, eo tamen sensu, quo in Mathematicis materiæ locus admittitur. Philosophus autem illam appellat id, quo existente necesse est hoc esse; seu quibusdam existentibus necesse est hoc esse. De quorum verborum sensu nobis agendum alibi; solùm id exploratum hìc esse cuique velim in huiusmodi disciplinis, materiam, quatenus tamen earum patitur natura, non rarò tanquam medium in ipsis demonstrationibus assumi, nam integrantes partes, vt dicebamus, comparatione totius, materiæ rationem obtinent, quo pacto ipsæ solent adhiberi.

Geometria vtitur materiali causa, tanquàm demonstrationis medio.

Formæ verò nomine, subiecti natura, vel affectionis quoque, sensu iam explicato, frequenter intelligitur. Sæpè ac sæpiùs per concomitans aliquod in huiusmodi disciplinis contexuntur demonstrationes, quæ adhuc per causam procedere dicuntur; propterea quòd huiusmodi demonstrandi genus ad illud, quod est per causam, non immeritò reduci consueuit.

Causa itidem formali vtitur.

Demonstratio per concomitantia ad genus demonstrationis per causã reuocatur. & in Mathematicis frequenter adhibetur.

Verumenimuerò, vt medium essentia potest esse subiecti, seu definitio, quemadmodum paulò supra tetigimus, sic in Mathematicis non rarò medium est affectionis, saltem causalis definitio. Hìc porrò prætereundum non est, quod Aristoteles docuit, asserens, Mathematicas definitiones nominales esse; nam causam propter quid inquirimus; ait enim, exempli gratiâ, triangulum est in rerum natura; Geometra in definitione causam ommittit, propterea quòd accidentia omnia à substantia, velut à causa pendent; si quis igitur, vt Geometra ab ipsa abstrahit, ipsâ neglecta demonstrationem instituit. Φανερὸν ὅτι ὁ μὲν τίς ἐστι λόγος τοῦ τί σημαίνει τὸ ὄνομα, ἢ λόγος ἕτερος ὀνοματώδης, οἷον τί σημαίνει τί ἐστιν ἢ τρίγωνον, ὅπερ ἔχοντες τί ἐστι, ζητοῦμεν διὰ τί ἐστι.

In Mathematicis demonstrationibus plerunq; mediũ est subiecti, aliquando affectionis definitio.

Manifestum quod quadam quidem erit oratio ipsius, quid significat nomen, vel oratio alia nominalis, vt quid significet quid est, quatenus triangulum, quod quidem habentes quid est, quærimus propter quid est. Definitio nominalis est igitur apud Geometram definientem, exempli gratia, triangulum; per eam siquidem quid nomen significet intelligit; at cùm triangulum abstractum à substantia consideret, causam ob id, per quam illud sit, ignorat, tantummodò quod sit cognoscens, quod intelligendum comparatiuè ad Physicum, cùm alioquin huiuscemodi nominis explicatione iuxtà Geometricam contemplationem, cognoscat; quamobrem intra cancellos abstractionis propriæ instituta tractatione, definit illud, ita vt affectiones de eodem in posterum demonstrare queat; quod verò de subiecto, de affectione suo itidem modo intelligendum, quæque de triangulo enunciata fuerunt, alijs non dissimiliter, quæ in his disciplinis considerantur, accommodari possunt.

Mathematicæ definitiones nominales dicuntur.

Aristoteles 2. Post. tex. 44.

Ad præmissas quod attinet, demonstrationis complexa principia, vt in cæteris, sic & in his ad has disciplinas attinentibus demonstrationibus, esse debent veræ, primæ, & immediatæ, priores, notiores, & causæ conclusionis; de quibus conditionibus iam supra nonnulla diximus: hìc solùm quædam adijcienda videntur; nam aliquibus prætermissis, vtpote iam ibi sufficienter insinuatis, aduertendum occurrit, quòd primæ, immediatæ, & per se notæ iure censentur; duplici tamen nomine vna videtur explicata conditio, quæ per illas voces; *primæ, immediatæ, & per se nota*, exprimitur.

Quales esse debent demonstrationis præmissæ.

Præmissarum conditiones.

Per se nota verò propositio, quatenus eâ nulla est prior, quæque medio, & causâ caret eiusdem generis, per quam demonstretur; causâ, inquam, caret eiusdem generis. Harum propositionum vsurpatio quadruplex.

Ad per se notam propositionem pertinent eæ, quæ Dignitates dicuntur, quippè quæ dignæ sunt, quibus credatur; sic in Geometria se habet illa; Omne totum est maius sua parte; si tamen aptetur continuæ quantitati: quòd si discretæ fuerit accommodata, locum obtinet in Arithmetica. Secundò ad idem genus immediatarum propositionum illæ spectant, in quibus definitio, aut prædicatum aliquod essentiale de re quapiam enunciatur; immediatæ siquidem hæ dicuntur, medium cùm desit, prius prædicato essentiali, in eodem causæ genere, per quod propositio illa demonstretur.

Primũ genus propositionum immediatarũ sunt Dignitates.

Secundum genus propositionũ immediatarum.

Tertiũ genus.

Tertiò ad idem genus pertinent illæ, in quibus causa primaria de subiecto, aut effectu proprio prædicatur; hæ enim immediatæ sunt; causa enim, quæ est in suo genere principalis, non habet priorem vllam, per quam demonstrari queat.

Quartum genus.

Quartò, & illę sunt, in quibus effectus de suis causis proximis prædicatur; hæ siquidem immediatæ sunt: cùm enim detur causa, cur passio insit subiecto, eaque sit immediata, non poterit alia dari causa, per quam eadem passio illi causæ conueniat; nihil obstat tamen, quin idem effectus de causa remota per causam proximam demonstretur. Cæteræ autem propositiones, de quibus superiùs non nulla diximus, Positionis nomine intelliguntur.

Positiones quales.

Aduertendum est autem propositionem, in qua prima passio de subiecto prædicatur, esse immediatam, quatenus caret medio ex rei natura distincto; mediatam verò esse, quatenus ostendi potest medio ratione distincto, alioquin potissima demonstratio nulla foret.

Notada quædam.

Et quidem confusè concipiendo subiectum, & passionem, haud per se notum est passionem inesse illi, sed per se notum erit, si essentia, vel differentia ipsius expresè concipiatur; in quo quàm plurimi sunt allucinati detestantes aliquas Mathematicas demonstrationes, cùm in ijs non aduerterent medium ex rei natura distinctum.

Error quorundam detestãtium Mathematicas demõstrationes.

Sed multò magis inuehuntur in illas, quòd aliquando demonstrationes non sint ex immediatis præmissis contextæ. Eos autem decepit ignoratio partitionis ipsius propositionis immediatæ: hæc enim in duplici discrimine est. Nam vna in se ipsa, medio carens, immediata dicitur, quæque immediata formaliter à Scholasticis appellatur. Alia quæ habet quidem medium, quo demonstretur, sed in ipsa demonstratione assumitur, quatenus iam demonstrata per superiores demonstrationes subalternantes, vsque dum deueniatur ad principia formaliter indemonstrabilia immediatè; & hæc virtualiter immediata dici consueuit, nempe manifesta virtute immediatarum.

Quo pacto demonstratio debeat ex immediatis constare.

Necessarium est igitur omninò, vt demonstratio aliquo ex his modis ex immediatis constet, quo pacto se habere innumeras Mathematicas demonstrationes perspicuum est. Debet autem demonstratio aliquo ex his modis, ex immediatis constare, scilicet vel formaliter, vel virtualiter; quoniam demonstrationis præmissæ euidentes esse debent, vel per se, vel per alias, quoad vsque ad per se euidentes deueniatur, nè detur processus in infinitum; quæ adeò vera sunt, vt locum quoque habeant in demonstrationibus à posteriori, in quibus videlicet præmissæ immediatæ esse debent, vel scilicet per se euidentes, vel per alias, quæ sint tales; vt enim sursum abire non licet in infinitum per causas, nec etiam deorsum per effectus: quæ autem ineuidentes sunt, euidentes fiunt per inductionem, ac sensum; docente Philosopho tex. 26. Primi Posteriorum.

Præmissæ demonstrationis euidentes esse debent vel per se, vel per alias.

Ineuidentes euidentes fiũt inductione.

Principia qualiter dicantur prima.

Debent igitur principia esse prima, nimirùm indemonstrabilia; nàm ex primis, & indemonstrabilibus scimus, alioquin non sciet non habens ipsorũ demonstrationẽ: scire namque, quorum datur demonstratio, non per accidens est, demonstrationem habere; si enim immediata non sunt principia, mediam causam habebunt, proinde & alia principia, per quæ demonstrari possint; non scientur igitur, nisi per illam causam demonstrentur, cùm scire sit rem per causam cognoscere, atque adeò de re demonstrabili demonstrationem habere. At si forent demonstranda principia per alia priora principia, de illis quoque quærendum, an immediata sint, vel mediata; si primum, id est, quod intendimus; sin autem, abeundum foret in infinitum. Indemonstrabilia esse debent per aliud medium, veluti per causam, & in eodem genere: & quidem per causam, quia non obstat per effectum demonstrari; insuper in eodem genere, cum nihil obstet, quò minus causa vnius generis, per alterius generis causam ostendatur; & tamen propositio illa dicatur prima, & immediata in proprio genere. Huiusmodi porrò esse possunt propositiones tàm affirmatiuæ, quàm negatiuæ.

Quo pacto præmissæ causæ dicantur conclusionis.

Debent autem esse causæ, quoniam ex definitione scientiæ constat; tunc scimus aliquid, quando id per suam causam cognoscimus; at per principia conclusionem scimus; ergo principia debent esse conclusionis causæ. Vbi illud aduertendum præmissas, siue principia complexa, causas dici conclusionis, ratione medij contenti, quod est causa, cur passio subiecto insit. Hìc porrò est animaduertendum, quàm plurimos deceptos fuisse malè sentientes de Mathematicis disciplinis, veluti non comparatis per demonstrationes ex præmissis deductas, in quibus inuoluta sit causa; vnde passio habet, vt insit subiecto. Eos autem

Quorundam error.

Duplex causa, alia in cognoscendo tantùm, alia in essendo, & cognoscendo simul.

tem decepit ignoratio partitionis causæ; nam alia est in cognoscendo tantùm, cùm sit id, vnde aliquid cognoscimus, etsi tamen hoc ab illo in essendo non pendeat; alia verò in essendo, vnde habet passio vt insit subiecto, diciturque etiam in cognoscendo, quatenus per ipsam subiecto passionem inesse cognoscimus; quæ in duplici discrimine est, formalis, seu propria, quæ nimirum verè est causa, siue physica, siue metaphysica; alia autem virtualis, quæ propriè causa non est, sed in ordine ad aliud sic se habet, vt si causari deberet, non nisi ab hoc, velut à causa, suum esse recognosceret. Itaque tametsi in Mathematicis vti non liceat demonstrationibus per physicam causam procedentibus, quod profectò haud exigit demonstratio, in ijs saltem demonstrationes contexuntur per causam, aut metaphysicam, aut virtualem; & huiusmodi causę in principijs complexis inuoluuntur, in principijs inquam complexis, quibus demonstrationes constant.

Præmissæ quare priores conclusione.

Hinc autem præmissæ priores sunt, vtpotè continentes causam, quæ prior est ordine, & naturà ipsa conclusione, cùm omnis causa sit effectu prior; quamuis ex alio capite etiam priores dicantur, quatenus scilicet naturæ ordine conclusionem antecedunt, se tenentes ex parte causæ, conclusionis notitiam producentis, cuiusmodi est intellectus.

Notiores.

Notiores porrò esse debent; conclusio siquidem ex vtraque dependet præmissa. Nequeūt esse minus notæ quàm ipsa conclusio; quicquid enim conclusio habet certitudinis, ac euidentiæ, ab ipsis præmissis mutuatur; & quoniam in ijs continetur causa, causa autem notior effectu est naturà. Contingit enim bifariam, vnum prius, & notius altero dici, vel scilicet naturâ, aut quoad nos; illud quidem principium, & causa est; hoc autem principiatum, & effectus. Notiora igitur principia sunt conclusione, ne dum præcognita, cùm per ipsa conclusionem assequamur; propter quod autem vnumquodque tale, & illud est magis tale. Maior autem, & minor cognitio, bipartitò contingit, vel secundùm intensionem graduum, vel secundùm essentialem perfectionem; nec certè primum necessariò requiritur; æquè enim intellectus, & conclusionem cognoscet, sequelam, & illationem simul inspiciens, æquè, inquam, ac principia, è quibus conclusio deducta est: adhuc tamen eorum notitia perfectior dicenda perfectione essentiali; nam vel principia ipsa sunt formaliter indemonstrabilia, quorum cognitio intellectus dicitur, quemadmodum conclusionis notitia per discursum comparata, scientia nuncupatur; vel sunt virtualiter immediata.

Certiores, ac euidentiores.

Demonstrationis autem principia, siue præmissæ, vt priores, ac notiores conclusione dicuntur, ita certiores, & euidentiores; suntque necessaria principia, vt superiùs explicuimus, simul plures necessitatis gradus afferentes; necessaria enim est conclusio, quamobrem & principia, è quibus illa deducitur ad ipsius demonstrationis habita ratione finē.

Demonstratio per propria principia procedit.

Quod si principia fuerint per se & quatenus ipsum, non possunt non esse propria. Vbi hìc aduertendum demonstrantem debere vti principijs proprijs rei demonstratæ, quod in duobus consistit. Primum, nè vtamur principijs alienis, vt, si ad aliquid in Geometria demonstrandum, proprijs quidem scientiæ Naturalis, vel Arithmeticæ, &c. principijs, vteremur. Secundum, nè vtamur principijs communibus, in quibus videlicet scientiæ plures conueniunt. Non propria verò principia sunt, vel quia aliena sunt, & extranea à scientia, in qua adhibentur, quorum vsus, transitus de genere in genus, dici consueuit; vel quia communia sunt, & ad scientiam illam spectant, sed simul quoque ad alias.

Supradictorū probatio instituitur.

Primum inde perspicuum redditur, quoniam omnis demonstratio, imò & scientia vniuersa solum habet subiectum vnum, cuius principia considerat, passiones demonstrat, ciusque non transgreditur fines; quamobrem scientia nulla poterit ad subiectum, principia, vel passiones alterius scientiæ gradum facere; & quidem si scientia omnis debet procedere ex causis, propter quas subiectum suum, proprietatesque sunt, vtique ipsa vti non poterit principijs, atque causis alienis. Hoc enim iacto fundamento, tanquam per se noto, quòd subiectum de scientia in scientiam transferri nequeat, necessariò consequitur de scientia in scientiam, nec medium, nec quod de subiecto dicitur transferri posse; hæc enim ipsi subiecto inhærent, & quatenus ipsum, quamobrem si subiectum de scientia in scientiam transferri non potest, nec etiam hæc transferri posse necesse est: siue igitur spectemus subiectum alicuius particularis Geometricæ demonstrationis, siue Vniuersæ Geometriæ, in Arithmeticam transferri non potest; ita nec media, quibus Geometra vtitur, nec attributa, quæ de subiecto idem ostendit, in Arithmeticam transferre licebit, nec contra; præsertim hoc est primariò de medio intelligendum, secundariò verò de attributo, cùm effe-

ctus, suam causam necessariò consequatur. Rectè propterea Philosophus duos translationis modos interdixit, neglecto tertio, qui necessariò consequitur, nempè solius affectionis translatio; vnum solius medij ad demonstrandam integram alterius scientiæ conclusionem, quo pacto non tota propositio maior, sed medium tantummodo transfertur; alterum totius maioris, nimirum medij cum quæsito simul, ad ostendendum de subiecto attributum. Prior traslatio foret, si de triangulo demonstraremus æqualitatem trium angulorum duobus rectis, per medium sumptum ex Arithmetica; hinc enim in Geometriam medij translatio fieret. Alter verò modus foret, si de triangulo demonstraremus affectionem aliquam Arithmeticam, per medium Arithmeticum; tunc enim hinc ad Geometriam fieret translatio medij cum quæsito; præsertim autem improbat medij translationem, ob eam quam attulimus causam; ait verò non licere Arithmeticam demonstrationem aptare ijs, quæ magnitudinibus accidunt; si namque proposita fuerit integra Geometrica conclusio, quatenus magnitudo est Geometriæ subiectum habens accidentia sibi consentanea; si quid ex Arithmetica suppetit transferendum in Geometriam, medium erit, quod per demonstrationem significauit, cùm hæc à medio denominetur; vnde ait, non licere Arithmeticam demonstrationem aptare ijs, quæ magnitudinibus accidunt.

Posset quispiam autem suspicari, hæc haud esse veritati consona; nam, vt cætera ommittam, Propositiones secundi Libri Elementorum ad decimam vsque, ne dum, vt ibi Geometricè demonstrantur, sed etiam Arithmeticè; quæ igitur Geometra attributa de magnitudinibus, atque adeò de proprio subiecto, eadem Arithmeticus demonstrat.

Sed hæc foret subiectum transferre, quo nihil absurdius, cùm huic adeò sit quælibet scientia addicta, vt nullum aliud admittat. Arithmeticus igitur non contemplatur magnitudines, nisi quatenus hæ numeri naturam induunt; vnde rectè Philosophus dicebat, *nisi magnitudines numeri sint*; linea siquidem, exempli gratiâ, cùm in partes concipitur diuisa æquales, numeri rationem obtinet, & quælibet illarum partium vnitatis munere fungitur. Arithmeticus igitur quæ attributa demonstrat de illa multitudine partium, vt multitudo quædam est, non sunt existimanda demonstrata de linea; non fit igitur subiecti translatio de scientia in scientiam, nec propterea translatio medij, atque adeò neque attributi; hæc siquidem non propriè, sed per similitudinem cum ijs, quæ in Geometria, intelligenda sunt.

Nullius scientia subiectum ad aliã scientiam trãsferri potest.

Eo autem iacto fundamento, quòd subiectum cuiuscunque scientiæ sit adeò proprium, vt ad aliam transferri minimè possit, quæ dicta sunt necessariò consequuntur; at de vna demonstratione ad aliam posse medium transferri, testatur Philosophus, si vtraque de eodem subiecto, siue simpliciter, siue modo aliquo sit; nullus enim tunc fit transitus de genere in genus, hoc est de subiecto in subiectum, cùm vtraque generis, hoc est subiecti, sit eiusdem. Non erit igitur vitiosum transferre medium ab vna ad aliam demonstrationem Geometricam, vel ab vna ad aliam Geometriæ partem, quoniam eiusdem sunt generis, siue subiecti; vitiosum tamen à Geometria in Arithmeticam, & contrà. Tolerabile itidem, si non simpliciter, aliquo tamen saltem modo, generis fuerint eiusdem, vt ex Arithmetica in Musicam; illa siquidem numerum, hæc numerum itidem, sed in sonis, vel potius sonum, quatenus affectiones habet à numeris cõtẽplatur. Ita quidem non licet ex Geometria transferre medium ad Diuinam Philosophiam, ad probandum in ea contrariorum vnam esse scientiam; neque ex Geometria licet facere transitum in Arithmeticam translatione medij, ad ostendendum, exempli gratia, mutuo ductu cuborum, fieri cubum, quoniam hæ duæ scientiæ vnius generis non sunt. Nec licet quæsitum simul cum medio de scientia in scientiam transferre; vt si quid lineis non quatenus huiusmodi, & quatenus ex proprijs principijs inest, an videlicet recta sit linearum omnium pulcherrima, & an sit contraria circulari, non licet in Geometriam transferre; hæc enim lineæ conueniunt, non ex proprijs principijs, sed ratione generis amplissimi, atque supremi, Geometriæ limites transcendentis; si hæc enim competerent lineæ rectæ quatenus est linea, vel saltem quatenus est magnitudo, hìc non diceretur transitus de genere in genus, quoniam accidentia Geometrica forent, sed ei competunt quatenus rationem entis participant; pulcritudo siquidem, & contrarietas accidentia sunt entis, quatenus huiusmodi, quamobrem id ad primum attinet Philosophum. Liceret autem Geometræ ad eum modum transferre medium, vna cum quæsito, dummodo in demonstrando propositiones efficeret de omni, per se, & secundum

quod

quod ipsum, quod in omni desideratur demonstratione.

Sed vt abstinendum demonstranti à principijs extraneis, ita etiam à communibus; non enim sat est ex vniuscuiusque principijs, etiamsi veris, indemonstrabilibus, & immediatis, demonstrationes contexere, sed propria oportet esse principia, quoniam id quod demonstratur inest quatenus ipsum: vnde Philosophus reprehendit Brysonem in Tetragonismi demonstratione, principijs communibus vtentem; nam si affectio demonstretur de subiecto, cui inest, quatenus ipsum, hoc est si conclusio est quatenus ipsum, quemadmodum esse debet, necessariò consequitur vnumquodque demonstrandum esse ex principijs proprijs, hoc est ex causa proxima eius, quod demonstratur; non itaque sufficit, vt principia vera sint, & immediata; nisi enim propria extiterint, scientia quidem nulla comparatur. Reprehendit porrò Brysonis demonstrationem veluti procedentem ex principijs communibus. Erat autem huiusmodi: ad exhibendum quadratum æquale circulo, sic Bryso præcipiebat. Inscribatur quadratum circulo proposito, ac aliud eidem circumscribatur, inter quæ medium reperiatur; hoc enim circulo æquale esse contendebat, sic ratiocinando. Illa, quæ sunt eiusdem maiora, & eiusdem minora, inter se sunt æqualia; at circulus, & quadratum medium sunt simul maiora quadrato inscripto, simulque minora quadrato circumscripto; ergo circulus, & quadratum medium inter se sunt æqualia; exhibitum est igitur quadratum æquale circulo. Peccat autem Bryso, quoniam propositionem maiorem assumit falsam, si vniuersaliter fuerit intellecta, nempè illa, quæ respectu aliquorum sunt simul maiora, & respectu aliquorum sunt simul minora inter se sunt æqualia; si namque sumpserimus duas quantitates, puta 4, & 6, easque contulerimus cum 8, & 3, vtique 4, & 6 comperiemus simul maiores, quàm 3; & minores, quàm 8; non proptereà tamen 4, & 6, sunt inter se æquales. At si propositio illa intelligatur, facta comparatione cum quibuslibet, hoc sensu; ea quæ sic se habent, vt vnum si fuerit maius aliquo, etiam & aliud debeat esse maius illo, semper in infinitum procedendo; & si vnum fuerit minus aliquo, etiam & aliud debeat esse minus illo, semper itidem in infinitum procedendo, erunt inter se æqualia; Vera est propositio. At minor illa propositio, quod circulus, & quadratum medium sic se habeant in ordine ad quamcunque quantitatem, non constat; ac proptereà Brysonis argumentatio pseudo-demonstratio est, quippe quæ non procedit ex proprijs principijs, sed vel ex vtroque communi, vel ex vno saltem.

Primo Post. part. 66.

Brysonis demonstratio peccabat ob communia principia.

Quomodo se haberet Brysonis demonstratio.

Debere autem huiusmodi esse demonstrationem, nempè procedentem ex proprijs, ea est potissima ratio, quoniam demonstrationis conclusio est de omni, per se, & de prædicato secundùm quod ipsum; debet autem esse huiusmodi, quia nequit ostendi passio per propriam causam, nisi ad eum modum conclusio se habeat, ergo necesse est eam demonstrari ex suis proprijs principijs. Si enim in conclusione, in qua prædicetur passio de subiecto, fiat enunciatio de prædicato secundùm quod ipsum, atque affectio prædicetur de subiecto primo, etiam medium, per quod demonstratio procedit, sit eiusdem generis, eiusdemque naturæ necesse est, hoc est quòd insit quatenus ipsum, & ei non dissimiliter attributum, ac proptereà sit proprium: & quidem ad scientiam comparandam, oportet causam proximam adipisci, ac proinde medium proprium, quod est causa; id autem non consequimur, nisi factis propositionibus de prædicato secundùm quod ipsum, tàm de præmissis, quàm de conclusione loquendo.

Cæterum communia principia in scientijs adhibentur; non tamen vt communia, sed vt propria sunt facta per contractionem, & quidem ad materiam vniuersam illius disciplinæ, vel ad materiam singularum conclusionum; sed hoc etiam superiùs explicuimus, aduertentes à nemine hac in re Philosophi consilium perceptum fuisse.

Patet autem ex hactenus dictis, quo nam pacto circa principia possit quispiam peccare, nunc pauca circa conclusionem subijciam.

Primò, quando detur vnicum indiuiduum in aliqua specie, & de ipso passionem ostendamus; contingit autem error si existimemus demonstrationem vniuersalem non esse. Errandi causa foret, quoniam de vnico indiuiduo nostram demonstrationem videmus extructam, cùm tamen re vera non de ipso indiuiduo, quatenus huiusmodi, sed de natura in eo adinuenta demonstratio procedat.

Circa conclusionem errores qui nam contingant.

Primus error.

Secundò, error quoque contingit, si propriam affectionem generis de speciebus demonstrare velimus, arbitrantes vniuersalem esse demonstrationem, cùm re verà tamen

Secundus error.

non

non sit. Errandi autem causa ea est, quoniam genus, in quo species illæ conueniunt, nomine caret; tunc enim credere possumus, quod eius loco sumere liceat species omnes collectiuè, quasi generi æquipollentes, ac de illis omnibus affectionem generis propriam demonstrare, esseque demonstrationem vniuersalem. At deciperemur, quoniam, etsi species omnes generi æquipolleant ratione ambitus, non tamen ratione naturæ: vnde fit vt accidens à generis natura dimanans, nullum habeat necessarium nexum cum eius speciebus, siue sigillatim, siue collectim acceptis.

Tertius error. Tertiò contingit error, quando de specie generis affectionem ostendimus. At errandi ansam præbet huius vocis *vniuersale* quidem ambiguitas; Prædicatio siquidem vniuersalis idem significare potest, quod prædicatio de omni, quoniam illa dictio *omnis* reddit vniuersale subiectum, ob id propositionem vniuersalem facit, quatenus de omni est. Alio autem modo, vt hìc accipitur, illud est, quod de omni, per se, & quatenus ipsum est. Error igitur hìc in ipsa conclusione accidit, quoniam affectio, quæ de toto subiecto suo demonstranda foret, non de toto, sed de eius parte, hoc est de specie, demonstrat.

Primo Post. 40. & seq. Hæc porrò legimus apud Philosophum, exemplis etiam illustrata. Et ad primum errorem quod attinet, si statuamus trianguli speciem, puta æquicrure, non tanquam speciem, sed tanquam indiuiduum, quod in specie trianguli vnicum sit, nec dari triangulum aliud, *Errorum exempla ex Aristotile.* ac de eo propriam aliquam affectionem ostendamus, vt æqualitatem trium angulorum duobus rectis; aliquis forte suspicabitur demonstrationem particularem esse; quoniam proprietas illa non competat nisi huic singulari, quod vnicum dari decernitur; videbitur siquidem æquicruri, quatenus huiusmodi competere, quod à veritate prorsus alienum est; quamuis enim de solo æquicrure demonstretur, quoniam aliud triangulum non datur; tamen de eo non demonstratur quatenus est æquicrure, hoc est quatenus singulare est, sed de natura communi, quæ in eo est, nimirum de ipso quatenus triangulum est.

Secundi erroris exempla. At secundi erroris exemplum affert Philosophus de proportione commutata; est autem commutata ratio sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem; quæ quidem affectio quatuor subiectis conuenit, numeris, lineis, temporibus, ac solidis; quamobrem necesse est, vt nulli istorum tanquam primo subiecto insit, sed alicui communi, veluti generi hæc omnia complectenti; itaque hæc affectio, cùm demonstratur de singulis his quatuor subiectis seorsum per plures demonstrationes, posset quidem vnica demonstratione de communi illorum genere demonstrari, si tamen id nominatum foret, & ea esset demonstratio vniuersalis; quoniam tamen id nomine caret, quod velut commune genus se habet, cùm plures de ijs singulis demonstrationes fiunt, suspicari quispiam posset, eas vniuersales esse, cùm tamen non ita sint, quoniam nec de singulis, nec de omnibus coniunctim vniuersalis sit demonstratio, sed de communi illo genere, cuius nomen ignoratur. Nec ita demonstrantes dici possunt vniuersaliter de speciebus demonstare, quoniam ex naturis ipsarum specierum ea non pendet affectio, sed à natura generis, cui conuenit quatenus ipsum.

Exemplum alterũ, quãdo genus nomen habet &c. Hoc idem illustrat exemplo, in quo genus nomen habet. Sumatur igitur triangulum, inquit, cuius tres sunt species, æquilaterum, æquicrure, & scalenum; & ait, si de omnibus his speciebus, nulla earum prætermissa trium angulorum æqualitatem duobus rectis demonstremus, non ob id vniuersaliter demonstramus, neque scientiam habemus, siue id vnicâ demonstratione, siue pluribus à nobis fiat; nam de omnibus illis demonstratio bifariam institui potest; aut enim de omnibus simul sumptis, ac ob id vnica demonstratione, aut de singulis separatim, atque adeò demonstrationibus pluribus; neutro tamen modo vniuersalis demonstratio contingit, quæ veram ipsius affectionis scientiam pariat. Duo enim sunt, quæ hìc occurrunt: primum, quod si quis ita demonstret, non scit triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis, nisi modo sophistico: secundum, quod id vniuersaliter non scitur de triangulo, quamuis nullum ommittatur triangulum, de quo non sciatur. Reddit autem rationem, cur non sciatur triangulum, nisi sophisticè tres habere angulos æquales duobus rectis, cùm ad eum modum contexitur demonstratio; Sophista *Sophista qui dicatur.* namque dicitur ille, qui rerum scientiam venatur, non ex rei natura, & ex essentialibus, sed ex accidentibus, & extraneis; hoc autem accidit quando prædicatio non est secundùm quod ipsum, vt cùm affectionem scimus, non de subiecto eius primo, sed de specie, cui non inest quatenùs ipsum; tunc enim accidentalem, & sophisticam scientiam comparamus,

rius; vbi namque prædicatio non est quatenus ipsum, ibi quidem aliquid accidentarium inesse, Logici docuerunt. Erat autem dictum alterum, quod vniuersaliter de triangulo id non scimus, eam ob causam videlicet, quoniam de omni triangulo scimus secundum numerum, non tamen de omni triangulo secundùm formam. Vbi hìc aduertendum, omne triangulum intelligi posse bifariam, videlicet & secundùm numerum, & secundùm formam; numerantes igitur species ipsius trianguli, nouimus omne triangulum secundùm numerum, at secundùm formam non ita, nisi quoad cognoucrimus genericam naturam: itaque demonstrando affectionem trianguli, quod est genus, demonstrando, inquam, de speciebus eius omnibus, nouimus quidem de omni triangulo secundùm specierum numerum, atque adeò secundùm materiam, cuiusmodi sunt species apud Logicos respectu generis, non tamen de omni secundùm formalem vnitatem genericæ naturæ, quam affectio illa consequitur; quare tunc dici non possumus vniuersaliter scire.

Cognitio trianguli, vel secundum numerum, vel secundùm formam.

Tertij autem erroris exemplum desumitur ex vigesima octaua Primi Elementorum, nam dum dicitur.

Si in duas rectas lineas recta incidens externum angulum interno, & opposito ad easdem partes, aequalem fecerit, aut internos ad easdem partes duobus rectis aequales; parallelae erunt illae rectae lineae. Vbi duæ rectæ lineæ ab alia recta linea incisæ sic, vt fiant duo interni ad easdem partes anguli duobus rectis æquales, se habent tanquam subiectum primum, de quo demonstratur æquidistantia. Ait igitur Philosophus bifariam contingere, quòd illi duo anguli interni sint æquales duobus rectis, vel quatenus vterque rectus est, vel quoniam vno existente acuto, alter obtusus sit; vterque tamen simul duobus rectis æquipolleat. Priori modo internis angulis acceptis, affectio illa, scilicet æquidistantia linearum, demonstraretur, veluti de subiecto non primo; non enim illa æquidistantia conuenit illis lineis, vt habentibus angulos internos duos, quorum vterque sit rectus, sed vt habentibus angulos internos æquales duobus rectis; siue id eueniat, quoniam vterque sit rectus, siue quoniam vnus sit minor, alter autem maior recto; ita tamen vt vterque simul duobus rectis æquipolleat.

Modus autem vitandi huiusmodi errores traditus est à Philosopho duobus præceptis, quorum primum est illud. Quando superioris, & inferioris eadem est essentia, tunc si affectio demonstratur de vno vniuersaliter, tunc de altero demonstrabitur: quod contingit, quando inferius consideratur non secundùm propriam naturam, idest quatenus est tale inferius, sed secundùm naturam superioris, hoc est quatenus est illud superius; vt si triangulum æquilaterum, non quatenus huiusmodi, sed pro vt triangulum spectetur, tunc erit eadem essentia triangulo, & æquilatero; atque adeò affectio, quæ de vno, veluti de subiecto primo ostenditur, de alio quoque demonstratur: secùs de triangulo secundùm propriam naturam spectato. Secundum præceptum in eo consistit, vt inde scire liceat, cui è pluribus affectio conueniat, veluti subiecto primo, ad quod videndum, quo plurium illorum posito, ponatur affectio, & quo ablato, hæc eadem auferatur; illud siquidem erit subiectum primum.

Primo Post. tex. 42.

Cæterùm demonstratio non vna est; nam alia quidem vniuersalis, alia verò particularis; rursus affirmatiua vna, negatiua altera; præterea vna ostensiua, alia ducens ad impossibile.

Multiplex demonstratio, eiusque species assignantur.

Vniuersalem demonstrationem prætulit Aristoteles particulari, quo nomine hìc indiuiduum non intelligit; nec vniuersalis appellatione, quod est commune pluribus, illud est, de quo loquitur ibi, sed eo sensu illud vsurpat, quo eodem libro superiùs accipiendum voluit, ita nimirum, vt vniuersalis demonstratio dicatur, quæ affectionem, vel attributum vniuersale de re quapiam ostendit. Vniuersale autem intelligo, quod dicitur de omni, per se, & secundùm quod ipsum; ita sit vt species hoc in loco nomine particularis intelligi possit, quando scilicet affectio, quæ demonstratur toti generi conuenit; & hac etiam ratione potest indiuiduum intelligi comparatione speciei; quamobrem quotiescunque generis attributum de specie demonstramus, vt habere tres angulos æquales duobus rectis de triangulo Isoscele, demonstrationem singularem conficimus; quoniam non ostendimus per illam attributum de subiecto, cui conueniat secundùm quod ipsum, & cum quo reciprocetur. Nec dissimiliter cùm attributum speciei, de indiuiduo demonstramus, vt habere angulos, qui sunt ad basim inter se æquales, de hoc Isoscele.

Demonstratio vniuersalis præfertur particulari. Primo Post. Textu 36.

Vniuersale quid.

Demonstratio singularis quando conficiatur.

In hoc

Mathematicorum, tum Veterum, tum Recentiorum error. In hoc autem, tum Veteres, tum Recentiores Mathematici peccarunt, minus accuratè perpendentes demonstrationis naturam. Attributum enim, siue symptoma illud appelles, huiusmodi esse debet, vt dixi, ita vt æquè latè pateat ac subiectum, de quo demonstrandum suscipitur; quamobrem peccatum foret in Arte, vel saltem minus benè præceptis eius accomodatum, de triangulo æquilatero, vel isoscele &c. tres angulos habere æquales duobus rectis, ostendere; siquidem hoc vniuersam trianguli naturam consequitur, cumque reciprocatur, quod ad attributum de re aliqua demonstrandum requiritur. His porrò neglectis, minus accuratè plerique Theoremata condiderunt, ad generalem illam rationem, vti decebat, redigere ommittentes.

Redarguitur Auctor Prop. 47. primi Euclides. Quapropter Propositio 47. primi libri Elementorum haud benè concepta fuit; ne dum enim quadratorum, quorum vnum supra latus subtendens angulum rectum trianguli orthogonij, alia super latera eundem angulum ambientia affectio, est æqualitatis ratio, videlicet inter quadratum lateris angulum rectum subtendentis, & ea, quæ à lateribus rectum angulum continentibus, describuntur quadrata; nam id non minus etiam figuris alijs similibus, similiterque positis est accommodatum; vt Propositio 31. Libri sexti, nos admonet; vbi quadragesimam septimam ad generaliorem formam intueri licet redactam; non dum tamen ea omnibus est absoluta numeris, cùm hucusque non dum fuerit animaduersum, symptoma illud conuenire, non tantum planis superficiebus, sed etiam alijs à planis; Nam si, exempli gratiâ, latus angulum rectum subtendens, intelligeretur sphæræ diameter, vt & latera rectum angulum ambientia; illius sphæræ superficies æqualis est superficiebus aliarum duarum sphærarum, quod operosum non est ostendere.

Redargutionis ratio. Quoniam vt quadratum lateris subtendentis angulum rectum æquale est quadratis laterum eundem ambientium, ita circulus, cuius diameter est illud latus, æqualis est circulis, quorum diametri sunt reliqua latera; vt autem simplum ad simplum, sic multiplex ad æquè multiplex; atque adeò quadruplum ad quadruplum; ergo quadruplum circuli, cuius diameter est latus angulum rectum subtendens, æquabitur quadruplo circulorum, quorum diametri sunt latera circa rectum; sed quadruplum circuli, cuius diameter est latus subtendens angulum rectum, est sphærica superficies illius sphæræ, cuius diameter est idem latus; & quadruplum circulorum, quorum diametri sunt eadem latera angulum rectum ambientia est aggregatum superficiem sphæricarum; &c; ergo sphærica superficies illius sphæræ, cuius diameter est latus angulum rectum subtendens, æqualis erit superficiebus duarum sphærarum, quarum diametri circumstant angulum rectum.

Omnis igitur ratio, quæ est inter quadratum lateris angulum rectum subtendentis, & ea, quæ à duobus alijs lateribus describuntur, est ratio quidem æqualitatis; non tamen omnis æqualitatis ratio inter figuras descriptas super prædicta latera, modo iam explicato, est ratio æqualitatis inter quadrata; perinde enim est ac demonstrare de triangulo æquilatero, vel isoscele, habere tres angulos æquales duobus rectis.

Prima Elementa tractantibus in hoc aliquid condonandum. Condonandum est tamen aliquid suscipientibus vniuersæ disciplinæ prima Elementa tractanda, ac in eadem incumbentibus; at non generosa quadam aggressione meditantibus, quæ ad locum pertinent resolutum. Illud autem porrò concinnatum à nobis Elementare non est. Quamobrem non foret excusatione dignus, qui de circulo symptoma demonstraret, quod ne dum illi, sed etiam cuilibet conicæ sectioni conuenit; tunc enim iure sibi arrogabit, solertis artificis se expleuisse partes, & eruditionem in Arte præcipuam ostentasse, cùm animaduerterit, idem de sectionibus conicis ostendi posse. Vt si quispiam ostenderet de circulo.

Exemplum. *Si à circuli extremo diametri recta ducatur, ordinatim ad diametrum applicatis æquidistans, ipsa circulum in eodem diametri extremo continget.* Id enim nedum circulo, sed cuilibet conicæ sectioni conuenire, perspicuum est, per extremum diametri sectionis, verticem intelligendo. Ita etiam, si quis de circulo ostenderet.

Exemplum. *Si circuli circumferentiam recta contingat linea, cum diametro producta conueniens, & à tactu ad diametrum, recta ordinatim sit applicata, erit quadrato dimidiæ diametri æquale rectangulum sub interceptis, ordinatim ducta, & contingente diametri portionibus à centro sumptis.*

Id enim non est proprium circuli, sed conuenit quoque hyperbolæ, & ellipsi; & quod recta contingat linea cum diametro, vbi opus fuerit, protracta, conueniens, intelligendo

per

per dimidiam diametrum, dimidiam transuersam diametrum. Ita pariter si quispiam de Cylindro illud ostenderet.

Superficies æqualium Cylindrorum, detractis basibus, sunt inter se in subduplicata ratione suarum longitudinum. Hoc nedum conuenit superficiebus Cylindrorum æqualium, sed etiam superficiebus æqualium parallelepipedorum, æqualium prismatum, quorum bases sint similes. Vt si, exempli gratia, sit rectangulum constans lateribus 4, & 6, sitque basis alicuius parallelepipedi, cuius altitudo 5, huius soliditas erit 120; at verò superficies, detractis basibus, erit 100. Sit aliud rectangulum constans lateribus 2, & 3, hoc enim erit simile illi, quod constat lateribus 4, & 6: sitque basis alterius parallelepipedi, cuius altitudo 20; manifestum est huius soliditatem esse 120, superficies autem, detractis basibus, erit 200. At verò 200, ad 100, subduplicatam habet rationem eius, quam habet altitudo 20, ad altitudinem 5. Itaque Theorema illud, ad generaliorem formam redigere oportet, vt dictum est. *Exemplum.*

Sic etiam illud. *Cylindri recti, quorum superficies, detractis basibus, sunt æquales, sunt inter se in ratione altitudinum contrariè sumptarum.* Hoc non solum conuenit Cylindris, sed etiam parallelepipedis prismatibus, dummodo bases fuerint similes. Nam si fuerit, exempli gratia, rectangulum constans lateribus 4, & 6, fueritque basis parallelepipedi, cuius altitudo 5, huius soliditas est 120, superficies autem 100; fuerit autem aliud parallelepipedum, cuius basis sit rectangulum constans lateribus 2, & 3, altitudo verò 10; manifestum est, eius superficiem, detractis basibus esse 100, soliditatem autem esse 60; soliditas verò alterius erat 120. Sed vt 120, ad 60, soliditas, ad soliditatem, ita est altitudo 10, ad altitudinem 5. Ad generaliorem igitur formam, Theorema illud reuocandum foret, nè perperam illud à nobis conceptum fuisse videretur, vt de alijs quoque supra diximus, alijsque ferè innumeris, quæ sparsim apud auctores, non sine dedecore Artis, licet aduenire. *Exemplum.*

In hoc igitur insudet Analysta quantum fieri potest, vt eâ, quæ decet, generali ratione, Theorema concipiat, ac propterea vniuersalem demonstrationem adhibeat, nec immeritò, cùm hæc sit longè præstantior, vtpotè magis per causam, quàm particularis; attributum siquidem primò, ac per se vniuersali inest, de quo ipsa est vniuersalis demonstratio, at in eo est attributi causa, propterea, magis hæc per causam dici debet, ac ob id longè præstantior. Hæc etiam scientiam magis parit, vtpotè primam exhibens causam, qua non prior altera: vnde eius dignitas. Est itidem de vniuersalibus, ac propterea magis demonstrabilibus, quorum melior est demonstratio, quamobrem & sublimior. Per hanc plura cognoscimus, siquidem vniuersalia, & particularia attingimus, vnde melior. Potissima quidem ea est, quæ per prima principia conficitur; ad hanc autem maximè vniuersalis accedit; ergo præstantior. Ea cognitio, quæ alterius rei notitiam potestate continet, præstantior est illâ, quæ secus se habet. Per demonstrationem autem vniuersalem, ne dum conclusionem vniuersalem attingimus, sed potestate quoque demonstrationis particularis conclusionem; siquidem demonstrationis vniuersalis conclusio, veluti maior propositio demonstrationis particularis assumitur, in qua actu cognita, potestate, virtuteque conclusionis notitia continetur; propterea nobilior est vniuersalis demonstratio. Tandem vniuersalis intellectu comprehenditur, particularis ad sensum desinit, illa videlicet circa remotiora à sensibus, hæc circa propinquiora est occupata: proptereaque longè præstantior. Itaque cum Aristotele locis supracitatis, partim analyticè, partim verò dialecticè disputantes, vniuersalem demonstrationem, ipsi particulari præferendam ostendimus. *In quo debeat Analysta insudare plurimumque curare adhibere.* *Probationes quibus ostenditur demonstratio præstantior illa, quæ vniuersalis dicitur.*

Quòd si ad vniuersalem demonstrationem animum appulerit, affirmatiuam, velut idoneam magis ad scientiam consequendam, negatiuæ præferat, hæc siquidem illâ præstantior; quæ enim per pauciora est, alijs, ijsdem existentibus, seu cæteris paribus, potior est, huiusmodi porrò rectè dixeris affirmatiuam, negatiuæ comparatione, cùm illa aliquid esse accipiat, hæc autem & esse, & non esse; ergo paucioribus indiget; at quod paucioribus eget, maioris perfectionis esse particeps, facilè tibi suadebis; per illam enim, quæ paucioribus eget, celeriùs, & clariùs scimus, siquidem citiùs per pauca, quàm per multa discurrimus; paucioribus igitur indiget, vt ad prima principia reducatur, atque etiam præmissæ secundæ demonstrationis in ordine resolutiuo, certiores erunt principij primæ. Et quod non eget alijs, sed alia indigent illo, nobilius est, affirmatiua autem negatiuâ non eget, sed *Demonstratio affirmatiua præferenda negatiuæ.*

contrà potius negatiua indiget affirmatiuâ, siquidem illa constat ex solis propositionibus affirmatiuis, atque adeo negatione non indiget, hæc autem cùm nequeat constare tantùm negatiuis, sed affirmatiuâ vnâ, negatiuâ alterâ; nobilior igitur affirmatiua erit quàm negatiua. Demonstratione affirmatiuâ, negatiua demonstratur, nempè hæc ab illa pendet, & vim, ac efficaciam inde desumit; affirmatiua igitur præstantior. Affirmatiua potiora principia habet, quàm negatiua, nam affirmatiuæ principium est immediata affirmatiua, & negatiuæ immediata negatiua, & illa præstantior est istâ, tum quia prior est, ac notior, siquidem negatio per affirmationem cognoscitur, non contra, tùm quia affirmatio significat esse, negatio autem non esse: prius est enim esse quàm non esse; ergo affirmatio prior est negatione, quod si præstantius est demonstrationis affirmatiuæ principium, huiusmodi quoque erit & demonstratio. Tandem affirmatiua independens est, secus negatiua; non enim hæc sine illa, vt contra illa sine hac; ergo principalior est affirmatiua quàm negatiua; ergo præstantior.

Demonstratio duplex ostensiua, & ducens ad impossibile. *Ostensiua præfertur.*

Demonstratio autem ostensiua, siue affirmatiua sit, siue negatiua longè differt ab ea, quæ ducit ad impossibile. Per ostensiuam scilicet colligitur conclusio manifestè vera, ac necessaria; at per ducentem ad impossibile colligitur conclusio manifestè falsa, ac impossibilis. In ostensiua principia sunt notiora quoad veritatem ipsâ conclusione, propterea quòd conclusionis cognitio quicquid habet certitudinis, ac euidentiæ, à præmissarum cognitione mutuatur; quamobrem harum notitiam certiorem, ac euidentiorem esse necesse est, cùm propter quod vnumquodque tale, & illud sit magis; at in ducente ad impossibile conclusionis falsitas magis debet esse perspecta, quàm alicuius ex præmissis. Ostensiua progreditur naturæ ordine, à prioribus, notioribusque, at ad impossibile ducens fit progressu contra naturæ ordinem, cùm non à notioribus veris, sed falsis, procedat. Ostensiua vnic argumentatione, at ad impossibile ducens non nisi multiplici, nempè quadruplici, continetur.

Ostensiua, quamuis negatiua, præferenda.

Præstantior autem ostensiua est, quamuis negatiua, eâ, quæ ducit ad incommodum; quoniam illa procedit ex principijs veris notioribus, certioribus, ac euidentioribus ipsâ conclusione; at quæ ad incommodum ducit, ex conclusionis falsitate notiori, quàm sit falsitas alicuius ex præmissis.

Perspicuum tamen est inde plus dignitatis ostensiuam sibi adsciscere, etsi negatiuam, quàm quæ ad impossibile ducit. Quòd si res ita se habet, multò dignior erit adhuc ostensiua affirmatiua, quæ dignitate ipsi negatiuæ antecellit.

Reprehenduntur ij, qui passim demonstratione ducente ad incommodum vtuntur.

Perperàm igitur, ac inconsideratè admodum nonnulli plus nimio se adigunt huic generi demonstrandi, si aliquâ adhibitâ diligentiâ, loco ipsius eâ, quæ ostensiua est, vti possunt. Hæc enim ratiocinatio, non simpliciter, sed vt aiunt, secundùm quid, demonstratio dicitur.

Demonstratio quomodo procedat per deductionem ad impossibile.

Quoniam verò de resolutione agimus, paucis perstringemus, quæ faciunt ad institutum. Iam superiùs initio fuit à nobis animaduersum, deductionem ad impossibile, esse quidem assumptionem eius, quod quæsito contradicit, tanquam concessi per consequentia ad id, quod vero quidem concesso opponitur; in hac enim argumentatione sumimus id, quod quæsito contradicit, illudque supponentes tanquam verum, progredimur, donec in aliquod incidamus absurdum, per quod suppositione destructâ, denique confirmetur id, quod à principio quærebatur.

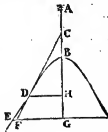
Quid commune sit vtrique modo.

Illud autem commune est resolutioni, & deductioni ad impossibile, quod vtraque ab incognito ad cognitum eodem progressionis ordine procedit, vtraque ordine consecutionum plurium constat, quarum vna consequitur alteram; in eo tamen discriminantur, quod illa desinit in verum, siquidem eius argumentatio postrema ostensiua est, veritatem concludens: vnde verum fuisse suppositum astruimus; quoniam tametsi ratione formæ ipsius discursus, verum ex falso sequatur, tamen in bona materia, & forma, non nisi ex verò ortum ducere potest; hinc regrediendo syntheticè, propositum ipsum concludit. At verò, quæ ad impossibile ducit desinit in falsum, & inde quod principio supponebatur, falsum esse conuincit, cùm falsum non ex vero, sed ex falso tantummodo deduci possit, ac propterea contrarium, vel contradictorium illius verum esse decernit, cùm è duobus contrariè, vel contradictoriè oppositis, si vnum est falsum, alterum esse verum, necesse sit.

Esto

Esto in exemplum demonstratio Apollonij Propositione trigesima prima primi Libri, in qua ostenditur.

Si in transuerso figura latere hyperboles sumatur aliquod punctum non minorem abscindens ad verticem sectionis, quàm sit dimidia transuersi lateris figura, & ab ipso erecta linea occurrat, si producatur intra sectionem, ad sequentes ipsius partes cadet. Supponitur enim cadere extra sectionem, & hoc contradicit quæsito, inde verò tanquàm concesso per consequentia progreditur ad id, quod vero concesso opponitur; incurrit enim in aliquod absurdum, nempè quadratum CB, ad rectangulum AGB, maiorem habere rationem, quàm idem quadratum CB, ad rectangulum AHB, quod est falsum, ac impossibile; ad quam enim magnitudinem, eadem maiorem habet rationem, ea minor est; vnde rectangulum AGB, deberet esse minus rectangulo AHB, quod est falsum, cùm opposito modo res se habeat. At verò falsum ex falso tantùm deduci potest, non autem ex vero, deductum est porrò ex eo, quod recta illa CD, cadat extra sectionem; hoc igitur falsum esse oportet.



Hic autem est animaduertendum, cùm scilicet deductione vtimur ad impossibile, non fieri Analysin, cuius deinde vestigijs repetitis, synthesis instituatur, nec immeritò; nam ex ijs, quæ non sunt, nulla potest fieri compositio. Sed quæ ab Analysta speciatim sint obseruanda in suo obeundo munere, sequenti capite persequemur.

Expedit etiam, vt quæ priora naturâ sunt, priùs itidem tractentur, idque magni momenti est, nam inde plurima consequuntur, quæ contrario modo contemplationem ineundo, minimè nobis datum est adipisci. Vnde si rationem, qualis sit inter parabolen, & triangulum eiusdem baseos, ac eiusdem altitudinis, primùm quisquam inquireret, in eo peccaret, quòd ordinem præuerteret; priùs enim naturâ est, quòd detur ratio inter parabolen, & triangulum perpetuò constans eadem in omnibus parabolis, ita vt, quæ ratio est vnius paraboles ad triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis, eadem sit alterius paraboles, ad sibi respondens triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis; & quæ est ratio semicirculi ad triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis, eadem sit alterius semicirculi, ad sibi respondens triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis. Hæc enim consideratio præcedit alteram, quæ speciem rationis decernit; ita sit vt, exempli gratiâ, de parabole loquendo, Si duæ parabolæ extiterint eiusdem altitudinis, siue inter easdem parallelas, quemadmodum est basis ad basin, ita colligatur esse parabolen ad parabolen. Quoniam licet arguere, vt parabole vna ad triangulum sibi inscriptum, ita parabole altera ad triangulum suum; & permutando, vt parabole ad parabolen, sic triangulum ad triangulum; sed triangulum ad triangulum est in ratione basium; ergo parabole ad parabolen, erit in ratione basium, & sic de consimilibus alijs. *Quæ priora natura sunt prius tractanda videntur.*

Plus nimio sibi profectò arrogarunt ij, qui passim deductione abutuntur, & quod primo alicui conuenit symptoma, de alio demonstrandum suscipiunt, cui mediatè potiùs illud natura concessit, vt si Theorema istud condiderint. *Redarguuntur nonnulli.*

Si circuli diameter producta fuerit, & ab absumpto puncto ipsius producta ducatur tangens circuli peripheriam, & à puncto contactus tres ductæ sint lineæ, quarum vna ad centrum, alia ad punctum extremum diametri, per quod transit ipsa producta, alia demum perpendicularis eidem diametro. Tria fiunt triangula, quorum area proportionales sunt. Præterquam-quod hoc nedum circulo, sed etiam ellipsi, & hyperbole, conuenire quisque deprehendet, vtriusque sectionis naturam introspiciendo; vnde præstat ad generaliorem formam Theorema reducere; illud etiam accedit, quòd hoc trianguli rectanguli naturam consequitur; si enim in subtendente angulum rectum, quæ hypothenusa dicitur, fuerit acceptum segmentum, quod interceptum sit inter huiusmodi punctum, & verticem vnius ex angulis acutis, quod quidem æquale sit lateri, cui prædictus angulus adiacet, & à prædicto puncto ad anguli recti verticem recta fuerit ducta, & à vertice eiusdem recti anguli cadat perpendicularis super hypothenusam, tria prædicta triangula conficiuntur, nullo intercedente circulo.

Laudabilius itaque est symptoma prædictum de hoc, quod naturâ circulum antecedit, & quo mediante potius ipsi circulo conuenit, vniuersali ratione quadam ostendere. Nam si quidpiā alicuius cōsequitur naturam, præstat id de hoc demonstrare potius, quàm de alio, cui non nisi mediatè quidem est accommodatum; sic enim nos ad simpliciora redigimus ea, de quibus differimus, atque per immediata, demonstrationes contexímus, quod cùm non fuerit animaduersum, silentio prætereundum non duximus, vt harum disciplinarum studiosus admonitus in Theorematibus condendis, cautè procedat; etsi fatendum sit, hoc apud plurimos inualuisse, non ob eorum inscitiam magis, quàm ob inanis gloriæ cupiditatem; hunc enim in modum è propria sede ad minus propriam, minusque consentaneam Theorema traducunt, & à simplicioribus ad implicatiora transferunt, vt aliquid noui se adinuenisse proprio marte videantur, cùm alioquin ab alijs eadem, seruato naturæ ordine, tractata fuerint: ei porrò videntur reprehensione digni, in quam quidem incurreret, qui de homine, risibile, exempli gratia, niteretur ostendere, quod propriè, ac immediatè admiratiuo conuenit, & hac haud neglectâ circumspectione plus laudis assequemur, vel saltem eo nomine, quòd rectam demonstrandi rationem benè calluisse, iudicabimur.

Superesset modo tractandum de Theorematis efformatione; sed hac de re supra, huius tractationis initio multa diximus, ipsius Theorematis partes, eiusdemq; conditiones, atque syntaxin explicantes; ob id hoc in loco, nè bis eadem repetita videantur, silentio præteribimus.

DE PARTICVLARIBVS METHODIS, quas hucusque Mathematicorum Schola frequentauit.

DEQ; PECVLIARI AB AVCTORE EXCVLTA.

CAPVT X.

Hactenus vniuersalissimâ methodo explicatâ, peculiares nonnullæ considerandæ supersunt, è quibus antiqua est vna, aliæ autem à Recentioribus adinuentæ. Ab illa igitur exordientes, reliquas deinceps recensebimus, eam ad calcem allaturi, quæ tametsi ab alijs fuerit insinuata, à nemine tamen hucusque nec demonstrata, nec adeò vniuersaliter exculta, nec, vt verbo concludam, satis pro dignitate tractata; in quâ propterea, cùm non nihil laboris impenderimus, eidemque firmitatem demonstrationibus conciliauerimus, nobis aliqua ex parte adscribendam, absit à verbo iactantia, existimamus.

De Antiqua Methodo per explosum excessum, atque defectum.

Antiqua methodus per explosum excessum, atq; defectum, explicatur.

INter methodos à Mathematicis, hisce disciplinis ferè nascentibus, vsurpatas, primùm illa se se considerandam offert, quî non rarò Veteres vti consueuere, quæque Archimedæa dicta fuit, quòd Archimedes quàm sæpissimè soleret eam adhibere. Hanc ego, per *explosum excessum, atque defectum* appello; qua quidem & Geometrarum Princeps Euclides est vsus, Libro 12. Prop. 2. demonstrare contendens, circulos inter se esse, quemadmodum à diametris quadrata, & Prop. 10. omnem conum tertiam esse partem Cylindri, eandem cum ipso basin, & altitudinem habentis. Demonstrat enim deducendo ad incommodum, Cylindrum non esse maiorem triplo coni; deinde non esse minorem, & inde concludit æqualem esse; propterea que conum tertiam esse partem Cylindri.

Vieta methodum hanc neglexit.

Hic demonstrandi modus plerisque non arrisit, præsertim Francisco Vietæ, qui propterea initio Supplementi Geometriæ ait, non satis constare, quod Archimedes tactu Helicis proposuit, nimirùm exhibere lineam rectam circumferentiæ circuli æqualem. *Exhibet sanè*, inquit, *lineam rectam maiorem ambitu cuiuscunque polygoni circulo inscripti; minorem autem ambitu cuiuscunque polygoni circumscripti, an igitur circulari æqualem? exhibetur angulus minor quocunque obtuso, maior vero quocunque acuto, an igitur rectus? si benè Archimedes, fallaciter Euclides.*

Tota

Tota itaque Vietæ difficultas in eo constituta videtur, quòd hunc in modum arguere: non liceat; hoc non est maius, non est minus illo; ergo est illi æquale. Contingit enim non rarò, vitiosum hunc modum esse argumentandi; vt exempli gratia, perspicuum est de angulo semicirculi, qui non est maior angulo recto, cùm sit minor quocunque angulo obtuso, non est minor angulo recto, quoniam est maior quocunque angulo acuto; & tamen non licet inferre, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto: cùmque ea sit minus idonea argumentandi ratio, non concludit cuicunque materiæ applicata, proinde supradicta argumentationis forma minimè admittenda videtur. *Aduersus hæc methodū difficultas affertur.*

Re tamen paulò diligentiùs introspecta, comperiemus hanc optimam esse argumentandi legem, nec Veteres in hoc fuisse deceptos. Ad suprapositam difficultatem autem quod attinet, occurrendum est, animaduertendo, hanc argumentationis formam suam habere vim, cùm ex eorum natura, quæ comparantur, non repugnat æqualitas. Si namque fieri posset, vt aliquis angulus rectilineus foret æqualis angulo mixto, contento scilicet lineis recti, & curui, benè liceret inferre: angulus semicirculi non est maior, nec minor recto; ergo est illi æqualis. At angulus rectus constituitur à linea recta perpendiculariter cadente super aliam lineam rectam, vnde anguli, qui sunt deinceps sunt æquales inter se; ita tamen vt vterque contineatur lineis rectis; at angulus factus à linea recta, & curua, quamuis recta caderet sic supra curuam, vt faceret angulos deinceps æquales, vnde esset æquè inclinata ex vtraque parte, sicuti contingit in angulo recto rectilineo; tamen inclinatio rectæ ad curuam non admittit æqualitatem cum inclinatione rectæ ad rectam. At verò quando à toto genere repugnat æqualitas, ad quam non aliud requiritur, nisi quod, dum duo termini inuicem comparantur, vnus secundùm rationem magnitudinis, nec excedat, nec deficiat, optimè tunc supradicta argumentationis forma per *explosum excessum, atque defectum* æqualitatem concludit. *Diluitur proposita difficultas.*

Repugnat autem æqualitas, cùm duo anguli tunc æquales dicantur, quando puncta æquè recedentia à vertice accepta in vna è duabus lineis angulum constituentibus, æquè sunt ad lineam alteram inclinata, sumpta inclinationis mensura per arcum, cuius centrum sit anguli vertex, vel per lineam perpendicularem omnium breuissimam. Quòd si duo sumantur anguli, quorum vnus rectilineus sit, mixtus autem alter, contentus linea recta, & curua, fieri non poterit, vt quæ æquè à vertice recedunt puncta, accepta in linea recta, æquè sint ad curuam lineam inclinata; id enim curuæ lineæ repugnat, non tamen repugnat, vt inæqualis sit inclinatio; quamobrem neque repugnat, vt angulus mixtus sit maior, vel minor angulo rectilineo. Nec admittendum illud: quocunque dari potest maius, & minus, eidem dari potest æquale; quamobrem, *non malè Archimedes, nec fallaciter Euclides*. *Nō malè Archimedes, nec fallaciter Euclides.*

Superest, vt validissimam hanc explicatam methodum exemplis breuiter illustremus.

Quamuis Theorema sequens ab alijs ostensum fuerit, nihilominus quia illud idem varijs methodis, præcipuèq; nostra, commodè quidem ostendi potest; placuit ob id in exemplum assumere, quod monuisse volumus, nè quispiam initio statim nos carpere hoc nomine velit, quòd acta agere contendamus.

THEOREMA.

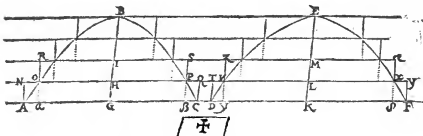
Exemplum LXXII.

Parabolæ æqualium altitudinum sunt inter se, vt bases.

Sint parabolæ ABC, DEF, æqualium altitudinum, seu quod idem est, inter easdem parallelas BE, AF, earumque bases sint AC, DF. Dico esse, vt AC ad DF, ita parabolen ABC, ad parabolen DEF. Si enim non ita se habent, vna ipsarum, puta ABC, ad alteram DEF, in minori, vel maiori ratione erit: sit primo in minori; ac ob id ABC, minor sit quàm opus est, vt sit in prædicta ratione, sitque defectus ✠, ita vt parabole ABC plùs ✠, sit ad parabolen DEF, vt basis AC ad basin DF.

Paraboles ABC diameter sit BG, & paraboles DEF, diameter sit EK; diuisaq; BG bifariam in I; & vtroque dimidio iterum bifariam, & sic deinceps, vt exempli gratia, IG in H, bifariam; & per puncta diuisionum ductæ sint æquidistantes alterutri ipsarum BE, AF; ductisque rectis parallelis ipsis diametris, vt AN, OR &c; CQ, PS &c; insuper DT, VZ &c; prætereà FY, X&, &c; per puncta videlicet intersectionis perimetrorum ipsarum parabolarum,

larum, cum ijs, quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipsarum BE, AF; adeò vt constitutæ sint figuræ circumscriptæ, & introscriptæ parabolis, constantes parallelogrammis æqua-



lium altitudinum, & numero æqualibus, si circumscriptæ circumscriptis, & introscriptæ introscriptis comparentur, & ita deinceps fiat, per alias subdiuisiones, & multiplicationem parallegrammorum, vt parallegrammum CN, excessus circumscriptæ figuræ, constantis ex ipsis parallelogrammis supra figuram inscriptam, minor sit, quàm ✠ spatium.

Quoniam igitur figura circumscripta parabolę ABC excedit inscriptam eidem parabolę ex constructione minori excessu, quàm ✠; ergo multò adhuc minori excessu excedet parabolen ABC; ergo aggregatum ex parabole ABC, & ✠, maius erit ipsi figuri circumscripta eidem parabolę ABC; ergo figura parabolę ABC circumscripta ad parabolen DEF, minorem habebit rationem, quàm aggregatum ex parabole ABC, & ✠, ad parabolen DEF. Sed aggregatum prædictum ad parabolen DEF, est vt basis AC, ad basin DF, ex hypothesi; ergo figura circumscripta parabolę ABC ad parabolen DEF, minorem habebit rationem, quàm basis AC ad basin DF. Sed vt basis AC ad basin DF, ita figura circumscripta parabolę ABC, ad figuram circumscriptam parabolę DEF, vt infrà constabit; * ergo figura circumscripta parabolę ABC, ad parabolen DEF minorem habebit rationem, quàm ad figuram circumscriptam eidem parabolę DEF; ergo parabole DEF maior erit figura sibi circumscripta. Quod est inconueniens.

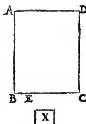
* Vbi Author de sua peculiari Methodo edixerit.

Nec dissimiliter, cùm in maiore supponatur esse ratione. Cum ergo neque vt in maiori nec in minori ratione ob id propositam rationem habebit &c.

Exemplum XXIII.

THEOREMA.

Cylindri recti basis ad eiusdem Cylindri curuam superficiem est, vt quarta pars diametri baseos ad ipsius Cylindri latus.



Esto cylindrus rectus, cuius rectangulum per axem sit ABCD: sumptaque BE, quæ sit quarta pars ipsius BC, diametri baseos eiusdem cylindri. Dico basin ad cylindri curuam superficiem, esse, vt BE, ad AB.

Si non ita est; habebit basis ad curuam cylindri recti superficiem maiorem, vel minorem rationem, quàm BE ad AB. Habeat primò maiorem, ita vt basis sit maior, quàm esse deberet, vt ad curuam cylindri superficiem haberet rationem, quæ est BE ad AB; excessus autem sit X. Itaque cylindri basis, minus spatio X, ad curuam cylindri superficiem rationem habebit, vt BE, ad BA,

Intelligatur ordinatum polygonum basi cylindri inscriptum, deficiens ab ipso circulo minori defectu, quàm X; ergo prædictum polygonum ad cylindri superficiem maiorem habebit rationem, quàm BE ad AB; ergo multò maiorem habebit rationem ad superficiem prismatis erecti supra polygonum, & cylindro inscripti; sed polygonum ad superficiem prismatis prædicti rationem habet, vt dimidia

quarta pars perpendicularis lateri à centro polygoni, ad AB prismatis altitudinem; ergo dimidia pars rectæ à centro perpendicularis lateri polygoni inscripti circulo, cuius diameter BC, ad AB, maiorem habebit rationem quàm BE, ad eandem AB; ergo dimidia pars rectæ perpendicularis lateri à centro polygoni maior foret BE quarta parte diametri illius circuli, cui polygonum prædictum inscriptum est: quod est inconueniens; vt enim circuli semidiameter est maior recta perpendiculari polygoni lateri, ita dimidia semidiameter, hoc est quarta diametri pars maior erit dimidio illius rectæ, quæ à centro cadit perpendicularis polygoni lateri. Non ergo basis ad curuam cylindri &c. maiorẽ habet rationẽ.

Nec dissimili modo demonstrabitur, si dicatur, basis ad curuam Cylindri recti superficiem minorem rationem habere, quàm BE, ad BA. Sit autem defectus X, ita vt circulus, vnà cum X ad curuam Cylindri recti superficiem rationem habeat, quæ BE, ad BA. Intelligatur circulo circumscriptum polygonum excedens ipsummet circulum minori excessu quàm X; huiusmodi autem polygonum adhuc Cylindri recti curuam superficiem minorem habebit rationem, quàm BE ad BA; sed vt BE, ad BA, ita est polygonum ad superficiem prismatis Cylindro circumscripti, cuius est basis; ergo polygonum ad recti Cylindri curuam superficiem minorem habebit rationem, quàm ad superficiem prismatis eidem Cylindro circumscripti. Quod est absurdum; ergo &c.

De Indiuisibilium Methodo.

PEruenimus tandem ad Indiuisibilium methodum, qua obscuriora Theoremata, & difficiliora Problemata, demonstrantur, atque soluuntur. Plerique tamen minus eam commendarunt ob eas, quas in sequentibus causas afferemus. Alij non penitus aspernendam, vel inutilem esse dixerunt, fallacem tamen, & non sine examine adhibendam; sed de his paulò post verba facturi sumus: interim methodum ipsam, cuius Auctor est Bonauentura Caualerius, proximum est, vt explicemus.

Indiuisibiliũ Methodus ad obscurissima demonstrãda conducit.

Quibusdam hæc methodus non arridet.

Methodus declaratur.

HÆc Indiuisibilium methodus inexplicabili facilitate ad difficillimã Theoremata demonstranda, & abstrusissima Problemata soluenda conducens, continui quidem indiuisibilibus vtitur, tanquàm instrumentis, ad figurarum tàm planarum, quàm solidarum mensuram comparandam.

Quibus vtatur hæc methodus, tanquam instrumentis.

Ad mensuram verò planarum figurarum adhibet lineas rectas vni cuidam lineæ parallelas, quæ quidem recta nuncupatur Regula. Hæ autem lineæ in ipsis figuris numero infinitæ mente concipiuntur, desinentes ad illas duas, quæ ex opposito easdem figuras tangunt, atque dicuntur earum oppositæ tangentes, quarum altera, tanquàm cęterarum parallelarum Regula, sumi consueuit.

Quid in hac methodo sit Regula.

Opposita tangentes quid.

Vt autem in planis figuris adhibentur lineæ, tanquàm indiuisibilia, ita quidem in solidis adhibentur plana; ad mensuram enim solidarum figurarum hæc methodus, plana adhibet vni cuidam plano signato æquidistantia, & huiusmodi planum illorum planorum Regula dicitur, in ipsis enim solidis, numero indefinita, mente quidem concipiuntur, desinentia ad duo illa plana, quæ ex opposito tangunt ipsa solida, & horum opposita tangentia plana dicuntur, quorum alterum, tanquàm cæterorum æquidistantium planorum Regula, sumitur.

In planis figuris adhibetur lineæ, ĩ solidis autem plana.

Ità fit, vt figura plana, instar telæ parallelis filis contextæ, concipiatur, solida verò figura, tanquàm liber parallelis folijs compactus, intelligatur: in planis autem figuris lineæ, in solidis verò plana numero indefinita, velut omnis crassitiei expertia, concipiuntur.

Hæc methodus duplex.

Duplex autem est hæc methodus Indiuisibilium, vtrique tamen, quæ superius diximus, communia sunt: è duabus verò vna dicitur Prior, altera verò Posterior. Prior quidem comparat ad inuicem aggregata omnium linearum planarum figurarum, & aggregata omnium planorum solidorum, quotcumq; illa sint; itaque prior ista methodus vtitur Indiuisibilibus collectiuè sumptis. Posterior autem comparat singulas lineas cum singulis lineis, & singula plana cum singulis planis, ijsdem in directum constitutis; quamobrem posterior

Explicatur prima, quæ vtitur Indiuisibilibus collectiuè sumptis.

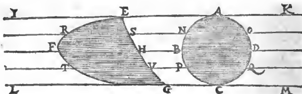
Posterior vtitur indiuisibilibus distributiuè.

Vtraq; generalem regulã tradit ad cõparandam figurarum mẽsuram.

posterior hęc methodus vtitur Indiuisibilibus distributiuè. Vtraque generalem regulam tradit ad comparandam figurarum mensuram; prioris autem Methodi generalis regula ita se habet, pro vt Indiuisibilium vsus collectiuè sumptorum exposcit: posterioris verò, pro vt Indiuisibilium vsus distributiuè acceptorum requirit; vtramque paulò infrà afferemus in medium post explicationem eorum, quæ modò tradidimus.

Exemplum.

Sint exempli gratià duæ quæcunq; figuræ planæ ABCD, EFGH inter easdem parallelas Ik, LM constitutæ: harum autem parallelarum, videlicet LM sumatur, tanquàm Regula parallelarum in eisdem figuris numero indefinito ducibilium, quarum aliquæ in figurâ ABCD sint rectæ NO, BD, PQ &c: at in figurâ EFGH sint rectæ RS, FH, TV &c.



Hic autem oportet aduertere, bifariam à nobis comparari posse lineas figuræ ABCD, ad lineas figuræ EFGH, videlicet vel collectiuè, hoc est cõparando aggregatum ad aggregatum linearum, vel distributiuè, nimirùm comparando sigillatim quamlibet rectam figuræ ABCD, cum qualibet rectà figuræ EFGH sibi in directum existente. Prior methodus vtitur primo comparationis genere; comparat enim ad inuicem aggregata omnium linearum planarum figurarum, & aggregata omnium planorum solidorum, quotcunq; illa fuerint; at verò Secunda methodus posteriorem adhibet comparationis modum, comparat enim singulas lineas cum singulis lineis, & singula plana cum singulis planis inter se in directum constitutis.

Generalis regula prioris methodi.

Generalis Canon prioris methodi ità se habet.

Si in duabus quibuscunque figuris planis etiam non in eadem altitudine existentibus, omnes lineæ vnius figuræ cuidam designatæ Regulæ parallelæ, mente descriptibiles, & collectiuè sumptæ, fuerint æquales omnibus lineis alterius figuræ cuicunque signatæ Regulæ parallelis mente describibilibus, & collectiuè sumptis, etiam ipsæ figuræ erunt æquales, & contra.

Vt in superiori Schemate sint æquales RS, NO, item FH, BD, preterea TV, PQ, & cæteræ collectiuè sumptæ, etiam ipsæ figuræ ABCD, EFGH erunt inter se æquales.

Perinde est dicere omnes lineas ad omnes lineas, ac dicere, aggregatum omnium linearum ad aggregatum omniũ linearum.

Nedum autem hoc intelligendum de proportione æqualitatis; quamcumque enim rationem habuerint omnes lineæ ad omnes lineas, hoc est aggregatum omnium linearum vnius figuræ planæ, ad aggregatum omnium linearum alterius figuræ planæ, eandem habebunt rationem, & ipsæ planæ figuræ.

In solidis quoque res ità se habet: si videlicet omnia plana vnius figuræ solidæ fuerint æqualia omnibus planis alterius figuræ solidæ, sumptis ijsdem quibuscunq; Regulis, etiam & ipsa solida æqualia erunt.

Quod etiam non solum de proportione æqualitatis intelligendum est, sed etiam de quacunque ratione; quamcunque enim rationem habuerint omnia plana ad omnia plana, hoc est aggregatum omnium planorum vnius figuræ solidæ, ad aggregatum omnium planorum alterius figuræ solidæ, eandem quoque rationem ipsæ solidæ figuræ habebunt.

Et hæc facilè possunt intelligi ex suprapposito diagrammate, si per proportionem æqualitatis re explicatà, loco illius proportionis æqualitatis quæcunque alia concipiatur proportio. Et insuper hæc eadem solidis aptari possunt, si per figuras illas planas, solidas intelligamus, & per lineas concipiamus plana.

Generalis Regula posterioris methodi.

Posterioris methodi generalis Canon hic est.

Si in duabus quibuscunque figuris planis, in ijsdem parallelis figuris ipsis constitutis, quarum parallelarum altera sit Regula: singulæ lineæ cum singulis lineis in directum existentibus, communique Regulæ parallelis, collatæ fuerint æquales, etiam & ipsæ figuræ inter se æquales erunt.

Quod nedum de proportione æqualitatis, sed de aliâ quacunque ratione intelligendum est, ità vt quamcunque rationem habuerint communiter dictæ lineæ sigillatim sumptæ, eandem

eandem habeant, & ipſæ figuræ. Si igitur in duabus quibuſcunque figuris planis, in iiſdem parallelis ipſis figuris conſtitutis, quarum parallelarum altera ſit Regula, ſingulæ lineæ cum ſingulis lineis in directum exiſtentibus, communique Regulæ parallelis, aliquam habuerint rationem: etiam & ipſæ figuræ eandem rationem habebunt. *Locum habet non ſolum in ratione æqualitatis, ſed in quacunque ratione.*

Non diſſimiliter in ſolidis. Si plana vnius figuræ ſolidæ communi Regulæ æquidiſtantia fuerint æqualia planis alterius figuræ ſolidæ eidem Regulæ æquidiſtantibus: etiam & ipſæ figuræ ſolidæ erunt æquales.

Quod autem de proportione æqualitatis enunciatum fuit, de quacunq; ratione intelligendum eſt: ita vt quamcunque rationem habuerint communiter inter ſe illa plana, eandem habeant, & ipſa ſolida, quæ quidem ſupponimus eſſe in iiſdem oppoſitis tangentibus planis, quorum alterum ſit communis eorum Regula. Itaque figuræ tam planæ, quàm ſolidæ ſunt in ratione omnium ſuorum Indiuiſibilium collectiuè; & ſi reperiatur in iiſdem quædam communis ratio, ſunt in ratione omnium ſuorum Indiuiſibilium diſtributiuè ad inuicem comparatorum.

In prioris Methodi gratiam illud obſeruant, videlicet ad indagandam rationem, atq; menſuram duarum datarum figurarum, tàm planarum, quàm ſolidarum, expendendam eſſe rationem, quam habent aggregata omnium Indiuiſibilium in iis mente deſcriptibilium iuxtà datam Regulam. *Quid obſeruandum in gratiam primæ Methodi.*

Pro ſecunda illud aduertunt, nempè quærendum eſſe, nùm in ſingulis Indiuiſibilibus in directum conſtitutis, ſiue ſint lineæ rectæ, ſiue plana, reperiatur quædam communis ratio. *Quid obſeruandum in gratiam ſecundæ.*

Paucis autem, vt Methodum hanc explicemus primam, deindè verò ſecundam, oportebit quaſdam definitiones præmittere.

Si per tangentes oppoſitas cuiuſcunq; datæ figuræ planæ, duo plana inuicem parallela ducantur, recta, ſiue inclinata ad planum datæ figuræ hinc inde indefinitè producta, quorum alterum moueatur verſus reliquum eidem ſemper æquidiſtans, donec illi congruerit: ſingulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes ſectiones plani moti, & datæ figuræ, ſimul collectæ, vocentur Omnes lineæ talis figuræ ſumptæ Regula vnâ earundem, hoc autem cum plana ſunt recta ad planam figuram. Cum verò ſunt inclinata vocentur omnes lineæ eiuſdem obliqui tranſitus datæ figuræ, Regula pariter earundem vnâ. *Prima definitio.*

Cùm verò plana recta ſunt ad datam figuram, rectæ illæ lineæ iam dictę recti tranſitus vocantur; ſicuti obliqui tranſitus dicuntur, quando plana ad datam figuram fuerint inclinata.

Ex quo intelligitur cum oppoſitę tangentes Regulâ quacunque in data figura duci poſſint, etiam lineas omnes datę figurę Regulâ quacunq; rectâ lineâ propoſitâ, haberi poſſe, tùm recti, tùm etiam eiuſdem obliqui tranſitus. *Corollarium.*

Si propoſito quocunque ſolido eiuſdē oppoſita plana tāgentia Regulâ quacunque ducta fuerint, hinc inde indefinitè producta, quorum alterum verſus reliquū moueatur ſemper eidem ęquidiſtans, donec illi congruerit, ſingula plana, quæ quidem in toto motu concipiuntur in propoſito ſolido ſimul collecta vocentur, Omnia plana propoſiti ſolidi ſumptâ Regula eorundem vno. *Secunda definitio.*

Ex quibus intelliges, quemadmodum propoſiti ſolidi oppoſita tangentia plana quacunque Regulâ duci poſſunt, ità eiuſdem omnia plana Regulâ quocunq; plano haberi poſſe. *Corollarium.*

Si oppoſitis tangentibus planis occurrant interiùs duę rectę lineę, vna quidem perpendiculariter, reliqua autem obliquè: puncta, quę ſunt communes ſectiones propoſitę lineę perpendiculariter incidentis, & ſingulorum planorum, quę collecta dicuntur omnia plana, ità tamen producta, vt eaſdem ſecare poſſint: ſiue puncta, quę ſunt communes ſectiones eiuſdem, & moti plani, atque fiunt in toto motu, ſimul collecta vocentur Omnia puncta recti tranſitus propoſitę lineę perpendiculariter incidentis; quę in obliquè incidente vocentur eiuſdem obliqui tranſitus. *Tertia definitio.*

Ex quibus licet colligere ſingula puncta recti tranſitus, vel obliqui incidentis lineę, nedum communes eſſe ſectiones illius, & ſingulorum, quę collecta dicuntur omnia plana propoſiti ſolidi, ſed etiam ſi per talem incidentem extendatur planum, eſſe communes ſectiones illius, & ſingulorum, quæ collectę dicuntur Omnes lineæ planę figurę, cuius oppoſitę tangentes ſunt communes ſectiones plani eiuſdem figurę, & oppoſitorum tangentium dicti ſolidi; nam motum planum deſignat in plano ſecante rectam lineam, & vna ſimul pun- *Corollarium.*

ctum in incidente, quod reperitur in illa recta linea, & ideò idem punctum est communis sectio tùm moti plani, & rectæ incidentis, tùm vnius earum, quæ dicuntur omnes lineæ datæ figuræ planæ, ita tamen productæ, vt hanc incidentem secare possint, & eiusdem incidentis.

Quarta definitio. Si inter alterum extremorum punctorum propositæ rectæ lineæ, & singula puncta, quæ simul collecta dicuntur omnia puncta recti, vel eiusdem obliqui transitus, eiusdem sumamus interiacentes lineas, dicatur istæ simul collectæ, Omnes abscissæ propositæ lineæ, quas, etiamsi non exprimatur, vocari supponemus recti transitus, si puncta sint recti transitus: vel eiusdem obliqui transitus, si puncta sint eiusdem obliqui transitus.

Quinta definitio. Rectæ lineæ verò in antecedentis definitionis proposita linea inter eadem puncta, & reliquum extremorum interiacentes, dicentur residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ recti transitus, si puncta sint recti transitus: vel eiusdem obliqui transitus, si sumpta puncta sint eiusdem obliqui transitus.

Corollarium. Ex quibus intelliges cuilibet abscissæ in proximis definitionibus propositæ lineæ respondere vnam ex residuis, ita vt tot sint illæ, quæ dicuntur residuę omnium abscissarum propositę linęę, quot illę, quę dicuntur eiusdem omnes abscissę, siue recti, siue eiusdem obliqui transitus; nam residuę omnium abscissarum propositę lineę interiacent inter reliquum extremum eiusdem punctum, & eadem illa puncta, inter quæ, & extremum primò dictum interiacent omnes abscissę.

Sexta definitio. Si pro qualibet earum, quę dicuntur omnes abscissę propositę rectæ lineæ ipsa proposita linea, siue eidem æqualis semel assumpta intelligatur, istæ simul collectæ dicentur, Maximæ omnium abscissarum propositæ lineæ, vel subintelligentur semper esse omnium, etiamsi dicerentur solummodò Maximæ abscissarum.

Corollarium. Quoniam verò omnes abscissæ tot sunt, quot omnes residuæ; maximæ verò omnium abscissarum tot sunt, quot omnes abscissæ; nam cuilibet abscissæ respondet vna maximarum, ideò maximæ omnium abscissarum propositæ lineæ tot erunt, quot etiam residuæ omnium abscissarum, quotcunq; sint omnes abscissæ, vel residuæ, idest pro qualibet residua habemus quoq; vnam maximarum ijs semper recti, vel eiusdem obliqui transitus assumptis.

Septima definitio. Si cuilibet omnium abscissarum propositæ rectæ lineæ adiuncta intelligatur alia recta linea cuidam æqualis, composita ex omnibus abscissis, & adiunctis, simul collectæ dicentur Omnes abscissæ propositæ lineæ, adiunctâ tali, nempè adiunctâ illâ, cui quæ adiunguntur sunt æquales; si verò fieret hæc adiunctio residuis, vel maximis omnium abscissarum, pariter dicerentur Residuæ, vel Maximæ omnium abscissarum adiunctâ eadem recti semper, vel eiusdem obliqui transitus.

Octaua definitio A. Propositâ quacunque planâ figurâ, & in ea ductâ vtcunq; rectâ lineâ vsque ad ambitum hinc inde terminatâ, si ipsa recta linea describere quancunq; figuram planam intelligatur non existentem in plano propositæ figuræ, ac deinde reliquæ earum, quæ dicuntur omnes lineæ propositæ figuræ sumptæ Regula iam ductâ lineâ, (& recti transitus si descripta figura sit erecta plano proposito: vel eiusdem obliqui transitus, si illi sit inclinata, eius nempè transitus, qui fit in tali inclinatione) describere intelligantur figuras planas similes, ac similiter positas, & æquidistantes primò descriptæ, ita vt omnes describentes sint descriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa; omnes descriptæ figuræ simul sumptæ dicentur Omnes figuræ planæ similes talis propositæ figuræ sumptæ Regulâ earum vnâ, vel Regulâ etiam ipsâ linea, vel latere describente, vt si descriptæ figuræ essent quadrata, hæ dicerentur Omnia quadrata talis propositę figurę, vel si essent triangula ęquilatera, dicerentur omnia triangula ęquilatera eiusdem.

B Solidum, cuius omnes descriptę figurę similes sunt omnia plana, dicetur Solidum similare genitum ex propositâ figurâ iuxtà eandem Regulam, iuxtà quam sumptę omnes dictę figurę similes fuerunt; quę igitur ex figuris propositis vt sic generantur, dicentur absque alio addito Solida similaria genita ex propositis figuris iuxtà Regulas omnium similium figurarum, quę ipsorum euadunt omnia plana; propositę autem figurę, eorundem Genitrices figurę vocabuntur.

C Cum verò duarum Genitricium vtcunque figurarum omnes descriptę figurę nedum similes erunt, quę reperientur in earum vnaquaque, sed etiam quę sunt vnius inuenientur

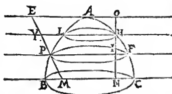
similes

similes omnibus figuris similibus alterius propositæ figuræ, fuerint autem in vtroq; solido figuræ æquè eleuatæ super plana Genitricium figurarum, tunc solida genita ex propositis figuris iuxtà Regulas eas, quæ sunt Regulæ omnium similium figurarum, earundem propositarum Genitricium figurarum dicentur solida inter se, vel ad inuicem similaria genita ex dictis figuris iuxtà dictas Regulas, vel intelligentur semper esse inter se, seu ad inuicem similaria; licet hoc non exprimatur, quotiescunque contrarium aliquid non adijciatur.

Cùm autem duas figuras in eodem plano habuerimus in eadem altitudine existentes, rectangula sub singulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ vnius propositarum figurarum, & illis in directum respondentibus in alia figura simul sumpta sic vocabimus, nempè rectangula sub ijsdem figuris, Regulâ eadem, quæ est omnium sumptarum linearum Regula. D.

Cùm verò propositarum figurarum altera fuerit parallelogrammum, cuius basis, iuxtà quam altititudo sumitur, sit sumpta pro Regula, dicta rectangula vocabuntur etiam omnia rectangula reliquæ figuræ, æquè alta, ac eorum vnum. E.

Hæc excerpsimus ex Auctore Methodi Indiuisibilium: & vt par erat omninò immutata transtulimus; proximum est, vt breuiter hæc explicemus, deinceps vtranque Methodum appositis exemplis declaraturi.



Sit igitur quæcunq; figura ABC; eius verò oppositæ tangentes vtcunq; ductæ EO, BC, intelligantur verò per ipsas EO, BC indefinitè extensa duo plana inuicem parallela, quorum quod transit per EO exempli gratia moueatur versus planum per BC semper illi æquidistans, donec illi congruat; communes itaq; sectiones talis plani fluentis cum ipsa figura ABC, quæ in toto illo motu perficiuntur, simul collectæ vocantur omnes lineæ figuræ ABC, è quibus aliquæ sunt LH, PF, BC sumptæ Regulâ earum vnâ, vt ipsâ BC, & quidem recti transitus, cum plana parallela rectè secant figuram ABC: at verò eiusdem obliqui transitus, cum plana parallela obliquè secant figuram ABC, & quidem obliqui transitus, nimirùm illius, qui in tali fit inclinatione. Vides igitur, quæ dicantur omnes lineæ figuræ ABC. *Suppositarũ definitionum explicatio.* *Omnes lineæ. Recti trãsitus.* *Obliqui transitus.*

Intelligamus nunc per ABC repræsentari solidum, cuius duo opposita plana sint tangentia, quæ quidem transeant per rectas EO, BC; intelligatur nunc moueri planum per EO extensum versus planum per rectam BC transiens, semper illi æquidistans; huius igitur plani fluentis, motumque subeuntis conceptæ in solido ABC figuræ, quæ quidem in vniuerso motu fieri intelliguntur ob intersectiones plani cum figuræ solidæ superficie, vocantur omnia plana solidi ABC sumpta Regulâ eorum vno; quorum aliqua sunt intelligenda LH, PF, BC, quorum communes sectiones cum figura ABC sunt rectæ LH, PF, BC; deinde sint rectæ ON, EM, quæ occurrant planis per EO, & BC transeuntibus, occurrant, inquam, in punctis O,N;E,M, at verò recta ON perpendiculariter, EM verò obliquè in illa plana incidat; puncta igitur, quæ sunt communes sectiones omnium planorum solidi ABC, productorum, si opus fuerit, & rectæ ON vocantur ipsius omnia puncta recti transitus, quorum aliqua sunt H,I,N. Quæ inter ipsa, & extremum punctum O continentur, vt ipsæ OH, OI, ON abscissæ nuncupantur: at verò quæ inter eadem puncta, & aliud extremum, quod est N, continentur, vt videlicet NI, NH, NO, residuæ omnium abscissarum; tot æquales ipsi ON, quot sunt omnes abscissæ, siue residuæ omnium abscissarum ON, dicuntur maximæ abscissarum; siue omnium abscissarum ON, quibus si adiungatur recta aliqua linea, dicuntur abscissæ, residuæ, siue maximæ adiunctâ tali lineâ, omnes quidem recti transitus in recta ON, vt in EM dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempè, qui in tali fit inclinatione. *Omnia plana.* *Omnia puncta recti trãsitus.* *Abscissæ.* *Residua omniũ abscissarum.* *Maximæ abscissarum.*

Dicitur autem eadem puncta recti transitus, siue obliqui, fieri tùm ab omnibus planis propositi solidi, vt ABC, tùm ab omnibus lineis plani per easdem incidentes extensi, vt ex. g. plani, quod per EO, BC transit, quod pariter transeat per ipsas ON, EM; idem siquidem planum, quod in solido ABC figuram producit LH, in figura plana ABC gignit rectam LH, & in recta ON punctum H, at verò in EM punctum Y, quod transit HL producta, vndè puncta H,Y dici possunt effecta à recta HY, atque hunc in modum omnia puncta recti transitus, quæ videlicet existunt in recta ON, dicenda sunt fieri, ne dum à dictis planis *Abscissæ residua.*

parallelis, sed etiam à lineis parallelis figuræ ABC productis, si opus sit, idque etiam intelligendum est in recta EM, cuius omnia puncta dicuntur eiusdem obliqui transitus, qui videlicet in tali fit inclinatione.

Deinde in eadem figura plana ABC, supponatur vtcunque recta BC, quæ figuram planam BC describat eleuatam super figuram ABC, at verò singulæ lineæ, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ ABC sumptæ Regulá BC, recti transitus, si figura BC sit erecta figuræ ABC; vel eiusdem obliqui transitus, (qui nimirum in inclinatione descriptæ figuræ ad planum ABC fit, si figura BC sit inclinata ad figuram ABC,) describere intelligantur figuras planas similes, similiter positas, & æquidistantes ipsi figuræ BC, ità vt describentes sint descriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa, quarum figurarum aliquæ sunt ipsæ BC, PF, LH; omnes igitur istæ simul sumptæ vocantur omnes figuræ similes ipsius figuræ ABC sumptæ Regula figura BC, vel linea, aut latere BC.

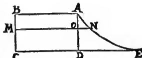
Omnes figuræ similes.

Solidum autem, cuius omnes dictæ figuræ similes ipsius ABC sunt omnia plana, dicitur solidum similare genitum ex figura plana ABC iuxtà Regulam ipsam figuram, vel lineam BC, & ipsa figura ABC nuncupatur Genitrix eiusdem solidi, quod ABC esse intelligitur.

Solidum similare genitum ex figura plana. *Figura solidi Genitrix.*

Quod si alia figura adsit plana, cuius omnes lineæ Regulá quadam sumptæ similes figuras planas describant, & quidem similiter positas, omnes vni cuidam æquidistantes, & similes figuræ BC, & æquè eleuatas super plana Genitricium figurarum; solida similaria genita ex istis figuris iuxtà dictas Regulas vocantur inter se, vel ad inuicem similaria; licet cum dicuntur solida similaria genita ex talibus, & talibus figuris, & hoc etiam alio non addito, intelligantur semper inter se ea esse, vel ad inuicem similaria, etsi non exprimatur, hoc autem nisi aliter explicetur.

Solida similaria.



Ad hæc exponantur duæ figuræ in eodem plano; ac in eadem altitudine, quæ sint BCDA, ADE; sit autem altitudo figuræ ABCD sumpta respectu rectæ CD, & altitudo figuræ ADE respectu ipsius DE, quę intelligantur ex eadem parte à communi altitudine partes ęquales abscindere, quę sibi in directum erunt; sit verò vtraque communis Regula omnium linearum dictarum figurarum, sitque ducta alia vtcunque eidem CE parallela MN, cuius portio existens in figurà BD sit MO, & manens in figurà ADE sit ON, rectangula proindè CDE, MON, & reliqua rectangula omnia, quę sub qualibet earum, quę dicuntur omnes lineę figurę BD Regula CE, vel CD, & illi in directum posita in figura ADE continentur, simul sumpta, vocantur rectangula sub figuris BCDA, ADE:

Rectangula sub figuris.

Cęterùm semper erit aliqua eidem in directum, pręterquam fortè illi, quę figuram tangit, vt BA; potest siquidem in figura ADE illi loco lineę punctum vnum tantummodò respondere, huiusmodi autem rectangulum non computatur, nec in censum venit, quia nihil illis adiungit, erit, inquam, hęc linearum respondentia in figura ADE iis, quę sumuntur in BD, cum sint in eadem altitudine sumpta respectu earundem linearum, sub quibus rectangula continentur.

Quod si contingeret earundem figurarum alteram esse parallelogrammum, & Regulam omnium eiusdem linearum esse vnum eiusdem laterum, quemadmodum CD, respectu cuius altitudo sumitur, tunc quoniam illę, quę ęquidistant ipsi CD in parallelogrammo BD, sunt eidem CD ęquales, suntque dictorum rectangulorum latera; propterea vocari possunt ea nedum rectangula sub his figuris, sed etiam hunc in modum appellari, nimirùm omnia rectangula figurę ADE, quę quidem figura haud necessariò est parallelogrammum, ęquè alta, ac vnum eorum, ac rectangulum CDE, altitudinis videlicet ęqualis ipsi CD.

Pręter hęc, duo etiam Postulata occurrunt, quorum primum est illud.

Prim. Postul. Congruentium planarum figurarum omnes lineę sumptę vna earundem, vt Regula communi, sunt congruentes. Et congruentium solidorum omnia plana sumpta, eorum vno, vt Regula communi, sunt pariter congruentia.

Secundũ Post. Omnes figurę similes alicuius figurę planę sunt omnia plana solidi, quod terminatur superficie, in quà iacent perimetri omnium dictarum similium figurarum.

Animaduertendo quædã. Vt verò hactenus tradita meliùs intelligantur, oportet aduertere Indiuisibilia figurarum inuicem

inuicem comparanda esse sub quadam vniformi ratione, determinatoque spissitudinis, siue constipationis, quicumque ille sit, gradu, aliàs nisi seruetur huiusmodi vniformitas spissitudinis ipsorum Indiuisibilium, fieri poterit, vt figurę non sint inter se ęquales, quamuis Indiuisibilia omnia, vtpotè obliqui transitus in vna figura, ęqualia sint omnibus Indiuisibilibus, vtpotè recti transitus in alia figura.

Itaque si figuræ fuerint planę, omnes lineę ipsarum sub eodem transitu accipiendę sunt, vel sub recto, vel sub obliquo, eiusdem tamen obliquitatis; hunc enim in modum retinebitur semper in omnibus lineis idem spissitudinis, vel raritatis gradus.

His autem de rebus si quis alia nonnulla desideret, consulat Caualerium huius Methodi Auctorem; solum illud adijciam supradictam diuersitatem in punctis quoque linearum adinueniri, quarum vna dicitur linea recti transitus, altera obliqui; vnde illius puncta dicuntur puncta recti transitus, istius verò puncta obliqui transitus; hæc eadem diuersitas est in abscissis, residuis &c.

Proinde abscissæ, residuæ &c. hanc nomenclaturam sortiuntur.

Caualerius porrò primæ Methodi fundamenta iecit ostendendo primò propositionem illam.

Quarumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti transitus, & quarumlibet solidarum omnia plana sunt magnitudines inter se rationem habentes.

Secundò.

Æqualium planarum figurarum omnes lineæ sunt æquales, & æqualium solidarum omnia plana sunt æqualia, Regulâ quauis assumpta.

Tertiò.

Figuræ planæ habent inter se eandem rationem quam earum omnes lineæ iuxta quamuis Regulam assumptæ; & figuræ solidæ, quam earum omnia plana iuxta quamuis Regulam assumpta.

Quartò.

Si duæ figuræ planæ, vel solidæ in eadem altitudine fuerint constitutæ, ductis autem in planis, rectis lineis, & in figuris solidis, ductis planis, vtcunque inter se parallelis, quorum respectu prædicta sumpta sit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, seu ductorum planorum portions figuris solidis interceptas, esse magnitudines proportionales, homologis in eadem figura semper existentibus: dictæ figuræ erunt inter se, vt vnum quodlibet eorum antecedentium ad suum consequens, in alia figura eidem correspondens.

Prima propositio, item secunda, & tertia veritatem generalis regulæ demonstrant iuxtà priorem Methodum assumptæ. At Propositio quarta est quasi quidam nexus vtriusque Methodi Indiuisibilium, cùm in ea appareat comparatio omnium Indiuisibilium, tàm collectiuè, quàm distributiuè sumptorum; propterea quod singula Indiuisibilia alicuius figuræ cum singulis Indiuisibilibus alterius, eisdem in directum positis, collata, reperiantur ad illam habere eandem rationem, quod ad posteriorem Methodum pertinet: concluduntur omnia Indiuisibilia ad omnia Indiuisibilia esse, vt vnum ad vnum, quod priori Methodo congruit: vnde infertur figuras ipsas esse, vt vnum ad vnum.

Harum autem propositionum demonstrationes, qualescunque sint, apud ipsum videri possunt; nos tamen illas quatenus ad nostram Methodum conducunt, aliâ viâ incedentes demonstrare tentabimus, occurrentes difficultatibus, quæ aduersus Indiuisibilium Methodum afferri solent.

Ad secundam autem Indiuisibilium Methodum quod attinet, non est cur hìc in eius consideratione immoremur; tùm quia apud eius Auctorem videri potest, tùm etiam quia per se ipsam non adiuncta priori, magnam haud affert vtilitatem. Hic porrò videtur adnotatione dignum, quòd si quispiam hanc per Indiuisibilia procedentem Methodum minùs commendet, ex eo capite fortasse, quoniam ipsis Indiuisibilibus vtitur; aduertat facilè reuocari posse ad quandam demonstrandi rationem, quæ loco ipsorum Indiuisibilium diuisibilia quædam substituat, videlicet parallelogramma in planis, & parallelepipeda in solidis, quæ, cùm cuique perspecta facilè admodum esse possint, piget in eorum tractatione detineri.

De

De Methodo innixa Grauitatis Centro.

Vsus centri grauitatis ad Geometrica Theoremata demonstrãda in vsu fuit tũ apud Veteres, tum apud Recentiores.

IN rebus Geometricis ad Theoremata demonstranda, & ad Problemata construenda non rarò adhibitum fuisse grauitatis centrum, cùm à Veteribus, tùm à Recentioribus, perspicuum est eorum cuicunque monumenta versanti. Et ad Theoremata quod attinet, illud ostensum fuit, quòd *Parabole sesquitertia sit trianguli eandem basin, & altitudinem habentis*: sic & de Hyperbole, quòd *cuiuslibet Hyperboles portio ad sibi inscriptum triangulum eiusdem cum ipsa baseos, ac altitudinis, eam habeat rationem, quam dua tertiæ partes aggregati ex latere transuerso, & diametri portione ad eam, qua ex centro sectionis ducitur ad portionis centrum grauitatis.* Et de Ellipsi, ac Circulo, quòd *omnis Ellipseos, vel Circuli portio ad sibi triangulum inscriptum eiusdem cum ipsa baseos, ac altitudinis, eam habeat rationem, quam duæ tertiæ partes diametri portionis reliqua ad eam, quæ ex figura centro ducitur ad grauitatis centrum in portione.* Præterea, quòd *in semicirculo, & quocunque circuli sectore arcus ad duas tertias rectæ sibi subtensæ, eam habeat rationem, quam semidiameter, ad eam quæ ex centro ducitur ad sectoris centrum grauitatis.* Et id genus alia, vt apud Auctores videri possunt.

Vsus centri grauitatis ad Problemata Geometrica construenda.

Ad Problemata quod attinet; multa quidem præsidio centri grauitatis constructa fuerunt, & inter reliqua præclarissimum illud, in quo iubemur *quadratum æquale circulo exhibere*; si quispiam enim centrum grauitatis semiperipheriæ adinuenerit, ac fecerit, vt recta à centro circuli ad huiusmodi grauitatis centrum, quæ quidem est basis Quadratricis, vt hæc, inquam, ad circuli radium, ita hic ad aliam quampiam; huius autem quadruplum factum sit latus trianguli orthogonij, vnum scilicet circa rectum, aliud verò radius eiusdem circuli; huiusmodi enim triangulum circulo æquale erit; quare si huic exhibeatur quadratum æquale, hoc ipsum quadratum æquabitur circulo; & alia etiam in exemplum afferri possent. Sed hac de re infrà.

Multa de Grauitatis Centro tractantur.

Hìc porrò non nulla dicenda sunt de Grauitatis Centro, in cuius gratiam non est prætereundum, quod ab alijs itidem animaduersum fuit, Centrum nimirum vniuersim acceptum, punctum esse quantitatis continuæ, & finitæ, signatum siue actu, siue potentia, vel in illa ipsa quantitate, eiusue termino, vel extra eum certo quodam respectu, siue extensionis, siue intercapedinis, siue habitudinis partium ad id, cuius dicitur centrum.

Centrorum, vt & quantitatũ, triplex genus.

Centrorum autem, vt & quantitatum tripartitum videtur esse genus, nempe centrum Linearum, Superficierum, & Corporum. Et quidem ratione respectus, tria quoque alia centra recognoscuntur, videlicet Figuræ, Magnitudinis, ac Grauitatis.

Cẽtrũ Figuræ quid.

Centrum Figuræ, *punctum illud* appellant, *in quo omnes diametri se se mutuò intersecant*, seu *à quo semidiametri exeunt*. Hoc autem propriè corporibus, ac superficiebus conuenit, quibus propriè conuenit Figuræ nomen, licet etiam ad figuras conicas referri soleat. Et hoc tàm intra, quàm extra Figuram, eiusque termino figuratur; intra quidem vt in sphæra, & circulo: extra, vt in conoide hyperbolieo, & hyperbole: in termino, vt in hemisphærio, semicirculo, omnibusque sectoribus.

Aliqui autem loquentes saltem de figuris rectilineis ordinatis, descripserunt Figuræ centrum hunc in modum. *Figura aliqua plana multilatera centrum habere dicuntur punctum illud, in quo omnes rectæ lineæ, vel angulos oppositos iungentes, bifariam secantur, vel ab angulis ductæ ad laterum oppositorum bipartitas sectiones in easdem rationes.*

Centrum Magnitudinis, quid.

Centrum Magnitudinis illud est punctum, quod vndique æqualiter ratione magnitudinis, vel extensionis ab extremis abest. Hoc verò cuique quantitati finitæ conuenit, Lineis nimirum, Superficiebus, & Corporibus, sed non singulis. Lineæ quandoquidem ordinatæ, ac vtrinque terminatæ centrum est illud punctũ, in quo ea bifariam diuiditur; at inter superficies solus Circulus, inter solida sola Sphæra est, cui Magnitudinis centrum propriè conueniat; impropriè tamen Polygonis, & Polyedris regularibus aptatur, in quibus videlicet latera hedra ab hoc secundùm se tota spectata, non autem secundum partes æquè recedunt; quo pacto Magnitudinis centrum extra quantitatem, cuius centrum dicitur, reperire licet; sic se habent lineæ curuæ in se ipsas recurrentes, vt circularis, & elliptica; sic se habent corona superficialis, & annularia corpora.

Vel si dicere placet hoc centrum id esse punctum, quod in lineis eas bissecat, in superficiebus

ciebus id, per quod vtcunque ducta recta linea superficiem in duas æquales partes diuidit: in corporibus punctum illud, per quod vtcunque planum incedens æque partitur.

Hæc autem æqua partitio, tàm in lineis, quàm superficiebus, atque corporibus sic intelligenda est, vt partes illæ seorsum acceptæ sint æquales, ac homogeneis æquiponderent.

Centri grauitatis variæ definitiones.

Centrum grauitatis variè definitum fuit, dixerunt aliqui sic definiendum, *Centrum grauitatis cuiusque grauis est eiusdem grauis medium*; ita quidem Aristoteles. Alij sic, *dicimus autem centrum grauitatis vniuscuiusque corporis esse punctum quoddam intrapositum à quo si graue dependens mente concipiatur, dum fertur quiescit, & seruat eam, quam in principio habebat positionem, neque in ipsa latione circumuertitur*; ita Pappus. Alij sic, *centrum grauitatis vniuscuiusque solidæ figuræ, est punctum illud intrapositum, circa quod vndique partes æqualium momentorum consistunt. Si enim per tale centrum ducatur planum, figuram quomodocunque secans, semper in partes æqueponderantes ipsam diuidet.*

Grauitas propriè corporibus inest.

Qui hactenus de centro grauitatis tradita docuerunt, Physicè grauitatem ipsam contemplantes, solis corporibus adscripserunt, quibus re vera inest; ac ob id in ijs tantummodò grauitatis centrum agnouerunt, quibus cùm re ipsa tantùm grauitas insit, & ipsum grauitatis centrum inesse potest.

Mathematicus grauitatẽ concipit inesse punctis, lineis, & superficiebus, non sine vtile.

Quamuis tamen nunquam Natura superficies, & lineas à corporibus seiunxerit, à Mathematico tamen seiungi permittitur, citra errorem. Non dissimiliter, quamuis grauitas, grauitatisque centrum solis corporibus insit, nihilominus non sine magno veritatis lucro sibi Mathematicus arrogat, grauitatem superficiebus, lineis, ac punctis inesse concipere. Quòd si permittendum, quod re verà permitti debet, generalior est ineunda tractatio de ipso grauitatis centro, ac propterea non sistendum in descriptionibus ipsius hactenus traditis, quibus tantummodò centrum grauitatis, quod proprium est corporum, explicatur, sed paulò vniuersalior est afferenda definitio hunc in modum. *Grauitatis centrum vniuscuiusque finitæ quantitatis punctum est illud, vel in illa ipsa quantitate, eiusue termino, vel extra positum, circa quod vndique partes æqualium momentorum consistunt. Propterea quòd vel ipsum centrum, vel linea recta, siue planum per centrum quomodocunque ductum semper in partes aquè ponderantes propositam quantitatem dispescet.*

Quorundam error.

Non est autẽ hìc prætereundum id, in quo nonnulli crassiori Minerua philosophantes decepti sunt, videlicet binas illas partes ab huiusmodi puncto, aut plano secante factas æquipõderantes esse dicendas comparatione centri grauitatis totius; atque hunc in modum partes illas æqualium momentorum esse, non autẽ quasi seorsim acceptæ, & ad trutinam reuocatæ æquiponderare debeant. Partes enim illæ æqualia momenta sortiuntur ratione positionis, ac situs, quibus sublatis, nihil prohibet quominus inæqualium illæ sint ponderum: quæ quidem omnia facilè Libræ naturam perscrutanti constabunt. Nõ enim repugnat vt ea, quæ æquiponderant, etiam seorsim spectata æqualium sint ponderum, id tamen necessarium non est ad æquilibrium, seu ad momentorum æqualitatem, cum testimonio libræ non raro partes exigui ponderis seorsim spectatæ, si à centro longiùs absint, æquiponderent partibus grauioribus propè centrum constitutis. Hæc autem vniuersim dicta sunto de grauitatis centro in triplici quantitatis genere; siquidem, vt paulò antea notauimus, non sine magno sapientiæ commodo, grauitatem ne dum corporibus, sed etiam lineis, atque superficiebus inesse concipimus. Obseruarunt autem non raro idem esse centrum grauitatis figuræ, eiusdemque perimetri, quandoque verò non ita.

Aduertenda quædam.

Neç etiam ommittendum est, quod in re, de qua agimus, non exigui momenti est, nimirum cùm grauitatem lineis, & superficiebus inesse concipimus propriè loquendo, comparationem instituendam esse inter homogenea, quæ quantitate affecta intelligimus: vnde inter lineas, quas graues cõcipimus, instituenda est comparatio; item inter superficies; tandem inter corpora; non autem inter lineas, & superficies, vel inter superficies, & corpora.

De his tamen fusiori calamo scribendum alibi.

De vsu centri grauitatis differendum proponitur.

Reliquum est vt de vsu centri grauitatis ad dimensiones, rationesque figurarum ineundas, sermonem instituamus. Non vno autem modo contingit; ducemus autem exordium ab eo, quem excoluit Antiquitas, isque, vt perspicuus reddatur, exemplis eum illustrabimus. Priùs tamen animaduertendum, eius vsum præcipuè consistere, vt beneficio ipsius inter magnitudines rationem inueniamus; Ita planè superiùs adnotatum fuit, ope centri grauitatis cognosci quænam sit ratio, videlicet sesquitertia, Paraboles ad triangulum sibi inscriptum, & sic de alijs.

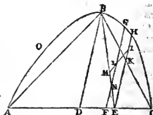
Metho-

Archimedes hanc vsum vsurpauit. Methodum hanc è Veteribus Archimedes in suo de Quadratura Paraboles Libro, luculenter expressit, quamuis initio eam Mechanicam appellauerit, non ob id tamen detestabilem putes, cùm certis demonstrationibus innitatur. Hunc porrò in modum ad Propositionem XVII vsque, processit. Pergit deinde alia vtens, Methodo quæ purè Geometrica est, quæ quidem apud ipsum videri potest.

Sed, vt hęc aliquo illustremus exemplo, vnum, vel alterum afferemus ex ijs, quibus etiam & nostra Methodo satisfacimus: propterea sit

THEOREMA.

Exemplum LXXIV. *Parabole sesquitertia est trianguli eandem sibi basin, & eandem altitudinem habentis.*



Sit parabole AOBC, cui inscriptum sit triangulum ABC; vtriusq; communis vertex esto B, basis autem AC, Dico parabolen AOBC, sesquitertiam esse trianguli ABC.

a 10. primi. b 9. sexti. c 31. primi. Ducatur diameter BD, seceturque DC bifariã [a] in puncto E, & in F eã lege secetur, [b] vt ratio FC ad DF, sit superbipartiens tertias, hoc est, vt 5, ad 3: at verò per [c] puncta E, & F, agantur EH, FG parallelæ diametro DB; mox agatur BE occurrens FG in N; sit autem portionis parabolicæ BHCB, grauitatis centrum I, punctum scilicet in kH, eiusdem portionis diametro.

Ex I ducatur recta ad centrũ grauitatis semiparaboles BHCD, quod necessariò erit in recta FG, vt demonstrabitur, nimirum L, & protracta ad partes L occurret rectæ BE in puncto, videlicet M, quod erit centrum grauitatis trianguli DBC, vt infrà dicetur; quare EB tripla erit ipsius EM, & punctum M necessariò cadet inter B, & N, vt paulò infra constabit.

Resolutio.

d 15. quinti. e 11. quinti. f corol. 19. quinti. g 17. quinti. QVoniam integra parabole AOBC, sesquitertia est trianguli integri ABC; ergo semiparabole DBHC sesquitertia erit [d] trianguli DBC: sed MI est sesquitertia ipsius LI, vt mox videbimus; ergo [e] vt MI ad IL, ita semiparabole DBHC, ad triangulum DBC; ergo [f] per conuersionem rationis, vt IM ad ML, ita semiparabole DBHC, ad parabolicam portionem BHCB; & [g] diuidendo vt LI ad ML, ita reciprocè triangulum DBC, ad portionem parabolicam BHCB. Quod ita se habet; nam M, est centrum grauitatis trianguli DBC: & I est centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB: & L est centrum grauitatis semiparaboles DBHC. Si autem cuiuslibet figuræ planæ vtcunque sectæ centra grauitatis partium iungantur recta linea, huiusmodi linea à centro grauitatis totius prædicti *h 8. primi Archim. æquipond.* plani ita secatur, [h] vt segmenta è contrario respondeant partibus commemoratis.

Lemma I.

Quòd autem centrum grauitatis semiparaboles BHCD, sit in recta FG, quæ parallela est ipsi DB, ostendetur inferiùs. *Est enim ipsius FC ad DF ratio superbipartiens tertias &c.* Ostendetur inquam inferiùs, vbi de nostra peculiari Methodo agetur, & quidem longè aliter, ac ab alijs prestitum fuerit.

Lemma II.

Quod verò IL protracta ad partes L, occurrat centro grauitatis trianguli DBC, cuiusmodi est ex hypothesi punctum M, sic ostendo. *Quoniam enim I punctum, est centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB; & M, centrum grauitatis trianguli DBC; denique*

L est

L est centrum grauitatis semiparaboles BHCD; est autem semiparabole prædicta vtcunque diuisa à recta BC in partes, quarum vna est portio parabolica BHCB, cuius centrum grauitatis est I; alia vero est triangulum DBC, cuius grauitatis centrum est M; ergo recta coniungens puncta I,M secari debet ab L,centro grauitatis totius magnitudinis, nempè semiparaboles BHCD: si igitur recta IL, non perueniret ad M, grauitatis centrum trianguli DBC, recta coniungens puncta M,I non transiret per L; alioquin duarum rectarum vnum foret commune segmentum LI; atque adeò non secaretur à centro grauitatis, nimirum semiparaboles BHCD. Quod est inconueniens.

Breuius ex octaua Prop. Æquiponderantium Archimedis.

Lemma III.

Quòd autem EM subtripla esse debeat ipsius BE, constat. *Nam grauitatis centrum vniuscuiusque trianguli est punctum in recta ducta à vertice bissecante basin, ita vt pars ad verticem, dupla sit reliqua.*

Lemma IIII.

Quod autem MI sit sesquitertia ipsius LI, sic ostenditur. *Qualium enim partium CD est octo, talium DE debet esse quatuor, cùm DC diuisa sit bifariam in E; est autem FC ex constructione quinque; ergo FE erit vnum; & quia FN parallela est ipsi BD, ob id erit, vt DE ad EF, ita BE ad EN; sed DE ad EF, est in ratione quadrupla, cùm DE taxati, vt quatuor, FE valeat vnum; ergo BE ad EN, erit in ratione quadrupla; est * autem BE ad EM, in ratione tripla; ergo si BE taxetur duodecim, ME valebit quatuor, & NE valebit tria, atque adeò MN valebit vnum, itaque ME quadrupla erit ipsius MN; at ob parallelas NL, EI, quæ ratio est EM ad MN, eadem est IM ad ML; ergo IM quadrupla erit ipsius ML; quàre per conuersionem rationis MI sesquitertia erit ipsius LI.* * *Ex eo quod præmissum est lemmate.*

Punctum M,cadet inter B & N; *Nam alioquin caderet extra FG, quod est absurdum.*

Compositio.

QVoniam L est centrum grauitatis semiparaboles DBHC, vt vidimus; & I, est centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB; & M, est centrum grauitatis trianguli DBC; ergo erit, vt ostendemus, reciprocè, vt LI ad ML, ita triangulum DBC ad portionem parabolicam BHCB; ergo componendo,vt IM,ad ML,ita semiparabole DBHC,ad parabolicam portionem BHCB;ergo per conuersionem rationis, vt MI, ad IL, ita semiparabole DBHC ad triangulum DBC; sed MI est sesquitertia ipsius LI; ergo semiparabole DBHC, sesquitertia erit trianguli DBC; ergo integra parabole ABHC, sesquitertia erit trianguli integri ABC. Quod oportebat &c.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Quoniam integra parabole AOBC sesquitertia est trianguli integri ABC; ergo
Semiparabole DBHC sesquitertia erit trianguli DBC: sed
MI est sesquitertia ipsius LI, ergo *Initium Resolutionis, & finis Compositionis.*
Vt MI ad IL, ita semiparabole DBHC, ad triangulum DBC; ergo per conuersionem rationis.
Vt IM ad ML, ita semiparabole DBHC ad parabolicam portionem BHCB: & diuidendo.
Vt LI ad LM, ita reciprocè triangulum DBC ad portionem parabolicam BHCB; Quod ita se habet: nam M, est centrum grauitatis trianguli DBC: & I, est centrum grauitatis portionis parabolicæ BHCB: & L, est centrum grauitatis semiparaboles DBHC. ergo IM ita secabitur in L, vt reciprocè &c. *Finis Resolutionis, & initium Compositionis.*

Si autem cuiuslibet figuræ planæ vtcunque sectæ centra grauitatis partium iungantur, rectâ lineâ, huiusmodi linea à centro grauitatis totius prædicti plani ita secatur, vt segmenta è contrariò respondeant partibus commemoratis,

SCHOLION.

Ex dictis apparet vsus centri grauitatis ad ostendendam rationem inter duas superficies. Non dissimiliter in corporibus ad idem, grauitatis centrum adhiberi solet. Obserua autem in superiori resolutione, MI, adhiberi, tanquàm libram, atque L, se habere, tanquàm Hypomoclion, & ipsius libra extremis M, I, intelligi appensa grauia, nempè triangulum DBC, & spatium parabolicum BHCD.

Aliter.

QVoniam, vt infra demonstrabimus, peculiarem nostram Methodum tractantes, adhibito etiam grauitatis centro, spatium DBC, triplum est spatij BHCB; ergo componendo spatium DBHC quadruplum erit spatij BHCB; ergo per conuersionem rationis spatium DBHC sesquitertium erit spatij BDC, sed vt simplum ad simplum, ita duplũ ad duplum; ergo parabole AOBHC, quæ est duplum spatij DBHC, sesquitertia erit trianguli ABC, quod est duplum spatij DBC.

Nec desunt alij modi quibus, mediante centro grauitatis, hoc idem Theorema ostendi potest.

Sed & illud quoque mediante grauitatis centro demonstrabitur.

THEOREMA.

Exemplum LXXV.

Circuli segmentum ad inscriptum sibi triangulum eiusdem baseos ac altitudinis, est vt duæ tertiæ partes diametri segmenti reliqui ad rectam connectentem circuli centrum, & grauitatis centrum, quod ab initio proponebatur, segmenti.

Segmentum prædictum, vel est non maius, vel maius dimidio circuli. Sit primò non maius.

Esto circulus ABCD, cuius centrum G, segmentum dimidio non maius sit quod recta AC, & peripheria ABC continetur, cui sit inscriptum triangulum ABC, cuius altitudo, BK, quę sit propterea segmenti ABC diameter. Manifestum autem, quod hæc producta, transibit per G circuli centrum. Reliqui segmenti diameter sit KD, sitq; segmenti recta AC, & peripheria ABC, comprehensi, grauitatis centrum punctum L.

Ostendendum est Circuli segmentum comprehensum recta AC & peripheria ABC ad triangulum ABC esse, vt duæ tertiæ partes ipsius KD ad GL.

Fiat triangulum EGF, cuius basis parallela, & æqualis AC, & altitudo GH æqualis AK, huius porrò grauitatis centrum sit I, punctum, in quo GH ita diuiditur, vt GI sit dupla ipsius IH.

Resolutio.

QVoniam est vt duæ tertiæ partes ipsius Dk ad GL, ita segmentum ABC ad triangulum ABC; sed vt GI ad GL, ita est segmentum ABC ad triangulum EGF; vt infra constabit; æquiponderant enim ex G. ergo per subtractionem æqualium rationum, vt duæ tertiæ partes ipsius DK, ad duas tertias partes ipsius GH, hoc est ad GI, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC, sed vt duæ tertiæ partes ipsius DK

ad

ad ipsam GI, ita DK ad GH; ergo vt DK ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Sed vt Dk ad Ak, ita Dk ad GH; ergo vt Dk ad AK, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC; sed vt Ak ad KB, ita Dk ad Ak; ergo vt AK ad KB, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Sed GH est ex constructione æqualis AK; ergo vt GH ad BK, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Quod ita se habet; sunt enim triangula quorum bases sunt æquales, atque adeo sunt inter se vt altitudines.

Lemma.

Quod autem sit vt GI ad GL, ita segmentum ABC ad triangulum EGF, *nostra peculiari Methodo inferius ostendemus.*

Compositio.

QVoniam triangula ABC, EGF sunt æqualium basium, erunt inter se vt altitudines; ergo vt GH ad BK, ita triangulum EGF ad triangulum ABC, sed GH ex constructione est æqualis AK; ergo vt AK ad KB, ita triangulum EGF ad triangulum ABC, sed vt AK ad kB, ita Dk ad AK; ergo vt DK ad Ak, ita triangulum EGF ad triangulum ABC, sed vt DK ad AK, ita DK ad GH; ergo vt DK ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed vt DK ad GH, ita eædem partes ipsius DK ad easdem partes ipsius GH, nempè duæ tertiæ partes ad duas tertias partes; ergo vt duæ tertiæ partes ipsius DK ad duas tertias partes ipsius GH, hoc est ad GI, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed vt GI ad GL, ita quidem est segmentum ABC ad triangulum EGF; ergo [a] vt duæ tertiæ partes ipsius Dk ad GL, ita segmentum ABC ad triangulum ABC. Quod opportebat ostendere. a 23. quinti.

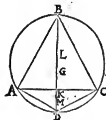
At quando segmentum fuerit maius dimidio.

Iunctis AD, DC, reliquæ portionis ADC grauitatis centrum esto M, ex hactenus demonstratis liquet, segmentum comprehensum recta AC, & peripheria ADC, ad triangulum ADC, esse vt duæ tertiæ partes BK ad GM; at vt triangulum ADC ad triangulum ABC, ita est KD ad BK, seu vt duæ tertiæ ipsius KD ad duas tertias partes ipsius KB; ergo vt duæ tertiæ partes ipsius KD ad GM, ita erit [a] segmentum comprehensum rectâ AC, & peripheriâ ADC ad triangulum ABC, sed vt segmentum comprehensum rectâ AC, & peripheria ABC, ad segmentum alterum sub recta AC, & peripheria ADC, est [b] vt GM ad GL (est enim G cẽtrum grauitatis totius figuræ & L, ac M, sunt centra partium;) ergo [c] vt duæ tertiæ partes KD ad GL, ita segmentum contentum rectâ AC, & peripheriâ ABC, ad triangulum ABC.

a 23. quinti.

b 8. æquipond. Archim.

c 23. quinti.



Conspectus Resolutionis, atq; Compositionis.

Quoniam est vt duæ tertiæ partes ipsius DK ad GL, ita segmentum ABC ad triangulum ABC; sed — Initium Resolutionis, & finis Compositionis.

Vt GI ad GL, ita est segmentum ABC ad triangulum EGF; æquiponderant enim ex G. ergo per subtractionem æqualium rationum.

Vt duæ tertiæ partes ipsius Dk ad duas tertias partes ipsius GH, hoc est ad GI, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed

Vt duæ tertiæ partes ipsius DK ad duas tertias partes ipsius GH, ita DK ad GH; ergo

Vt Dk ad GH, ita triangulum FGE ad triangulum ABC, sed

Vt Dk ad AK, ita DK ad GH; ergo

Vt DK ad AK, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed
Vt Ak ad kB, ita Dk ad Ak; ergo
Vt AK ad KB, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed
GH est ex constructione aequalis AK; ergo
Vt GH ad Bk, ita triangulum EGF ad triangulum ABC. Quod ita se habet; sunt enim triangula, quorum bases sunt aequales, atque adeo sunt inter se, vt altitudines.

Vnus Resolutionis, & inuitum Compositionis.

SCHOLION.

Ex his porrò, quæ modo dicebamus, facilè innotescet ratio circuli ad quadratum inscriptum; si namque nos intelligamus AC ductam per centrum G, ad rectos angulos cum BD, & ad eius extrema ductis rectis ex B, fiet triangulum, ad quod semicirculus eam habebit rationem, quam habent duæ tertiæ partes semidiametri DG ad rectam coniungentem G centrum circuli, scilicet figuræ, & grauitatis, & centrum grauitatis ipsius semicirculi; quod comparatur per analogismum illum. Vt semiperipheria ad diametrum, ita tertia pars diametri ad aliam interceptam inter circuli centrum, & grauitatis centrum semicirculi: seu quod in idem redit; Vt semiperipheria circuli ad duas tertias partes diametri, ita semidiameter, ad interceptam inter circuli centrum, & centrum grauitatis semicirculi. Nam si fuerint duæ quantitates, fueritq; vt prima ad secundã, ita tertia pars huius ad aliam. Etiam vt prima ad duas tertias partes secundæ erit, vt dimidia pars secundæ ad illam; vnde si Geometricè reperiatur illud semicirculi centrum grauitatis, & Geometricè quoq; quadratum circulo æquale exhibebitur. Obserua autem vsum centri grauitatis, in suprapositæ Resolutione, non vno in loco.

Sed nondum ad generalem formam Theorema redactum est; nam hoc proprium est ipsius circuli, quatenus GH trianguli altitudo facta est æqualis AK, quæ media proportionalis est inter DK, KB; sed si GH intelligatur potens rectangulum DKB, quamuis non sit æqualis AK, quæ est semibasis trianguli ABC, fiet Theorema commune circulo, & Ellipsi, qua de re hìc non nulla dicenda.

Commune autem fiet, si præcipiamus, loco ipsius AK, pro ipsa GH in triangulo EGF substitui rectam, quæ possit rectangulum BKD; in Ellipsi siquidem AK non est huiusmodi, quamuis in circulo sit, hoc autem intellecto demonstrationem contexere licebit ad eum, qui sequitur, modum.

Exemplum LXXVI.

THEOREMA.

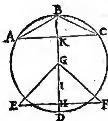
Cuiuslibet circuli, ac Ellipseos quidem segmentum ad inscriptum sibi triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis, est vt duæ tertiæ partes diametri segmenti reliqui ad illum, quæ ex figura centro ad grauitatis centrum eius, quod initio dicebatur, segmenti.

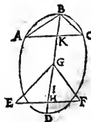
Segmentum prædictum, vel est non maius, vel maius dimidio circuli: sit primò non maius.

Resolutio.

Quoniam igitur, vt duæ tertiæ partes ipsius Dk ad GL, ita segmentũ ABC ad triangulũ ABC; sed vt GI ad GL, ita est segmentũ ABC ad triangulũ EGF, vt infra constabit; ergo vt duæ tertiæ partes DK ad GI, ita a triãgulũ EGF, ad triangulũ ABC;

a per subtractionẽ æqualium rationũ.





sed

sed vt DK ad GH, ita duæ tertiæ partes ipsius DK ad GI, nempè ad duas tertias partes ipsius GH; ergo vt DK ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed vt GH ad BK, ita DK ad GH, cùm GH, ex constructione possit rectangulum BKD; ergo vt GH ad BK, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC. Quod ita se habet; prædicta enim triangula EGF, & ABC, cùm æquales habeant bases, erunt inter se in ratione ipsarum GH, Bk.

Lemma.

Quòd autem sit, vt GI ad GL, ita segmentum ABC ad triangulum EGF, ostendemus infra, nostrâ peculiari Methodo vtentes.

Compositio.

QVoniam itaque triangula EGF, & ABC sunt super æqualibus basibus constituta, erunt inter se vt rectæ GH, BK; ergo vt GH ad BK, ita triangulũ EGF ad triangulum ABC, sed vt GH ad BK, ita Dk ad GH, cùm GH possit rectangulum BKD; ergo vt Dk ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed vt DK ad GH, ita duæ tertiæ partes ipsius DK ad duas tertias partes ipsius GH, nempè ad GI; ergo vt duæ tertiæ partes Dk ad ipsam GI, ita triangulum EGF ad triangulum ABC; sed vt GI ad GL, ita quidem est segmentum ABC ad triangulum EGF, vt vidimus; ergo [a] vt duæ tertiæ partes ipsius DK ad GL, ita segmentum ABC, ad triangulum ABC. Quod oportebat ostendere. [a] 11. quinti.

At quando segmentum fuerit maius dimidio, ratiocinandum vt supra, quodque de circulo diximus, Ellipsi est accommodandum.

Conspectus Resolutionis, atque Compositionis.

Quoniam igitur vt duæ tertiæ partes ipsius DK ad GL, ita segmentum ABC ad triangulum ABC; sed *Initium Resolutionis, & finis Compositionis.*

Vt GI ad GL, ita est segmentum ABC ad triangulum EGF; ergo

Vt duæ tertiæ partes Dk ad GI, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC: sed

Vt DK ad GH, ita duæ tertiæ partes ipsius DK ad GI, nempè ad duas tertias partes ipsius GH; ergo

Vt Dk ad GH, ita triangulum EGF ad triangulum ABC: sed

Vt GH ad Bk, ita DK ad GH, cum GH ex constructione possit rectangulum BkD; ergo *Finis Resolutionis, & initium Compositionis.*

Vt GH ad Bk, ita triangulum EGF, ad triangulum ABC. Quod ita se habet; prædicta enim triangula EGF, & ABC, cum æquales habeant bases, erunt inter se, vt GH ad Bk, atq; adeo altitudines.

In eo igitur hæc Methodus consistit, quod vtatur principijs mechanicis. Mechanica verò principia dico, quæ grauitatis centrum concernunt; omnis quandoquidem demonstratio è principijs conclusionem deducit. Principiorum autem nomine medium intelligitur; hinc porrò demonstratio nomenclaturam consequitur; & demonstratio ipsa talis est, cuiusmodi est medium; & quamuis demonstrationis principia complexa sint, medium autem quid incomplexum, principiorum tamen, nomine quæ complexa sunt, medium intelligitur; quoniam ab hoc illa conditionem sortiuntur. Quamobrem principia complexa illa mechanica dicentur, quatenus in ijs mechanicum medium continetur. Mechanicum autem erit si grauitatis centrum extiterit. *In quo hæc methodus consistat.*

Cæterùm vniuersalis illa resolutionis Methodus ab Antiquis exculta, de qua superiùs abundè tractaulmus, Mechanicæ demonstrandi rationi maximè accommodatur, vt vidimus. Et hæc quantum ad antiquum vsum centri grauitatis; recens autem mox explicabitur modus adhibendi grauitatis centrum, ad Geometricas veritates indagandas.

Modus igitur alter adhibendi grauitatis centrum erit huiusmodi, vt rectè dixeris, eum consistere in certa quadam cuiusuis quantitatis Rotundæ compositione, resolutione, atque in hinc deductis dimensione, comparatione, &c. Sic enim ferè eius Auctor Guldinus loquitur, Rotundi nomine intelligendo lineas, superficies, & corpora, quæ aliquo pacto ex simplici quodam circulari motu, quem *rotationem* appellat, ortum ducunt, adeò vt Rotundi *Modus alter adhibendi centrum grauitatis.* *In quo hæc Methodus consistat.*

Quid Rotũdi nomine intelligendum.

tundi nomine ne dum Sphærã, Conum, Cylindrum, Sphæroidem, Conoidem &c. sed & illorum superficies ac lineas, quæ in ijs per motum illum circularem designantur, intelligere debeamus.

Motus localis simplex in duplici discrimine.
Duplex Potestas, Directa, & Rotunda.

Quoniam autem duplex est simplicis motus localis quidem species, prout ad præsens attinet institutum, nimirum rectus, & circularis, ita fit vt Potestas Geometrica à motu originem sumens in duplici sit discrimine, Directa scilicet, & Rotunda; illa ex motu recto, hæc autem ex circulari nascitur.

Vtraque Potestas tripartitò diuiditur.

Vtraque Potestas tripartitò diuiditur iuxta triplicem quantitatis continuæ speciem, ita fit vt primi gradus Potestas sit Linearis, secundi Superficialis, tertij Corporea. Quorum graduum ortus ita se habent; primus ex motu puncti, secundus ex motu lineæ, tertius ex motu superficiei: vnde puncti quidem Potestas est linea; lineæ superficies; superficiei corpus.

Linea recta quid?
Linea recta est Potestas primi gradus.

Iam enim vulgatum est apud Mathematicos lineam rectam nil aliud esse quam vestigium puncti motum in plano rectà subeuntis; imaginantur enim punctum ipsum in directum moueri super planum, vestigiumque relictum sine latitudine, & sine profunditate, lineam esse; atque adeò si Potestas dici debet, quæ ex motu nascitur, linea recta, Potestas erit, & quidem primi gradus.

Parallelogrãmum est Potestas secundi gradus.

Quòd si huiusmodi lineam genitam imaginemur in plano quopiam transuersim moueri sibi parallelam, ita vt eius extrema puncta binas describant lineas, priori quidem ad rectos angulos, orietur parallelogrammum rectangulum Potestas secundi gradus.

Parallelepipedum est Potestas tertij gradus.

Si demum superficiem iam ortam eleuari, aut deprimi nos intelligamus, vt sibimet semper sit parallela, ita vt eius termini, scilicet extremæ lineæ plana describant, quæ ad primum planum sint ad angulos rectos, orietur corpus planis vndique rectangulis comprehensum, quorum bina opposita perpetuò sunt parallela, quod parallelepipedum appellatur, estque Potestas tertij gradus. Potestatis autem Directæ ortus hic esto.

Predicta Potestatis quilibet gradus diuiditur in Iustam, maiorẽ, & minorem Iusta.
In secũdo gradu Iusta Potestas est quadratũ. Rectãgulum altera parte breuius Potestas minor Iusta altera vero parte longius Potestas maior Iusta.
In tertio gradu Iusta Potestas est cubus. Parallelepipedum quod altitudine cubũ non adæquat, Potestas est minor iusta, quod verò excedit, maior iusta.

Potestatis iam dictæ quilibet gradus, diuiditur in Iustam, Maiorem Iust:, & Minorem Iust:; quamuis autem in primo gradu, in quo est linea huiusmodi partitio absolutè locum habere minimè videatur, cùm linea quæcunque, siue recta, siue circularis Iusta Potestas dici possit; comparatiuè tamen etiam maior, & minor admitti debet. In secundo gradu vbi superficies lineæ rectæ Iusta Potestas quadratum erit. At rectangulum altera parte breuius est Potestas Minor Iust:, altera verò parte longius Potestas est Maior Iust:. In tertio denique gradu Potestas Iusta est Cubus, vnde parallelepipedum quod altitudine cubum non adæquat Potestas est Minor Iust:, quod verò Cubum altitudine excedit, Potestas est Maior Iust:.

Rotunda Potestas est amplior quam Directa.
Potestates Rotundæ, & rotunda corpora sunt infinita.

Rotunda Potestas numerosior est, infinitas sub se continens magnitudines, ad tria tamen genera facilè reuocabiles, loquendo de Potestatibus secundi, & tertij gradus, nam ad primum quod attinet, vnicam speciem continet, videlicet lineam, & quidem circularem. Potestas autem secundi gradus genita ex linea ne dum recta, sed ex quacunque siue simplici, recta videlicet, & circulari, siue mixta quauis, dummodo intelligantur omnes cius partes in eodem plano consistere, infinities multiplicari potest; vnde infinitæ sunt Potestates siue superficies Rotundæ. Hac itaque ratione Potestas tertij gradus ex quacunque superficie plana lineis, & quotcunque, & quibuscunque terminata nascitur; ac propterea huiusmodi Potestates, siue Rotunda corpora infinita sunt, quorum genesis luculentiùs hic explicabitur.

Vt enim Directæ Potestates fieri concipiuntur ex motu recto magnitudinis illius, quæ rectà progrediendo, illas describit; non dissimiliter Potestates Rotundæ fiunt ex circulari motu puncti, vel magnitudinis, quæ per rotationem circa centrum firmum ac certum, vel immobilem axem, easdem progignit; quamobrem primi gradus Potestas est vestigium, quod post se aliquod punctum relinquit in eodem plano cum centro sui motus situm, circumductum in orbem. Hoc autem punctum non aliam sui situs differentiam agnoscit, quàm illam, quæ nascitur ex diuersa ipsius à centro rotationis elongatione, quæ quando nulla fuerit, sed potius rotandum punctum cum ipso centro motus, vel rotationis conuenit, alia tunc Potestas non est Iusta sanè dicenda, quàm illud ipsum punctum, quo cùm nihil liceat minus assignare, duas tantummodo species admittit Iustam, & iustã Maiorem Iusta, propterea quod præcisè in se ipsam cùm ducitur, siue directè, siue circulariter di-

cenda

cenda est: vnde punctum in se ipsum producit punctum, quod quidem à centro rotationis disiunctum, perfectam circuli peripheriam describit.

Sicut Potestates Directæ ex motu recto, ita Rotundæ ex motu circulari fiunt.

Innumeræ sunt autem Rotundæ Potestates secundi, & tertij gradus, cùm quantitates vnde nascuntur, lineæ videlicet, & superficies, ne dum variæ esse possint, sed varios quoque situs obtineant; nihil tamen prohibet quin ad finitas species, ac genera reuocentur. Et primo quidem retentâ illâ partitione Potestatis in Iustam, Maiorem, & Minorem Iustâ, aliora quædam genera sunt addenda iuxtà situm. Hic enim Rotundæ seu circumuoluendæ quantitaris, aut Horizontalis, aut Verticalis, aut Obliquus est, habitâ ratione ad horizontem eundem; vnde Potestates Rotundæ fiunt Horizontales, Verticales; & Obliquæ. Quòd si eadem quantitas Rotanda existens, aut Horizontalis, aut Verticalis, aut Obliqua ad centrum, vel axem sui motus, tam propinquè accedere possit, vt eundem situm retinens propinquiùs accedere nequeat, quando scilicet in sui vel aliqua parte, aut puncto, punctum prædictum vel axem contigerit, vna procreabitur Potestas, siue Horizontalis, siue Verticalis, siue Obliqua.

Ex his Potestas Iusta est punctum; habet Potestatē Iusta Maiorem sed non minorem.

Punctū à centro disiunctū sui reuolutione perfectā peripheriā circuli describit.

At si quantitas eadem Rotanda in tantum accesserit, vt centrum motus, vel partem axcos in se receperit, & secundùm aliquam sui partem vltra eundem processerit, & ab axe diffecta fuerit, tunc Potestas generabitur minor Iustâ. Alia multa addit Guldinus, & exemplis illustrat, quæ apud ipsum videri possunt.

Potestates Rotundæ secundi & tertij gradus multiplicantur ob triplicem situm scilicet horizōtale, verticalē & obliquum quantitatum vnde nascuntur.

Solùm hic definitiones quasdam commemorabimus.

Rotatio, motus est simplex, & perfectè circularis circa centrum consistens, aut immotum axem, qui quidem Rotationis axis nuncupatur, circumuehens siue punctum, siue lineam, siue planam superficiem, quæ post se tanquam vestigium relinquat describat, siue efficiat Rotundam vel lineam, vel superficiem, vel quantitatem corpoream.

Quod autem hoc motu circumagitur dicitur punctum, vel linea, vel superficies, vel quantitas Rotanda, siue Rotata; at verò genita ex hac rotatione quantitas, dicitur Potestas eius, quod circumuectum est, generalique nomine Rotundum dicitur.

Potestates Rotundæ fiūt horizōtales, verticales, & obliqua.

Radius Rotationis est linea rectà finita, horizonti parallela, ad axem rotationis perpendicularis, in quo axe siue in rotationis centro alterum ipsius punctum extremum consistit, alterum autem in grauitatis centro rei illius, quæ rotatur, & quæ Potestatem generat, infigitur.

Potestas Rotunda Iusta quando generetur.

Quando generetur Potestas Rotunda Minor Iusta.

Huiusmodi autem linea concipitur in eodem plano perpetuò consistere cum puncto illo, linea, vel superficie, quæ rotatur, ac in eius centro grauitatis terminatur, eamque sibi circumducit affixam, ea lege vt hic Radij terminus circumagatur altero permanente immoto in centro, vel axe Rotationis.

Prima. Quid sit Rotatio.

Via rotationis est circuli circumferentia, quam in rotatione describit grauitatis centrum quantitatis rotatæ, siue terminus radij rotationis circumlatus.

Secunda. Quid sit quātitas Rotāda, vel rotata.

Remotio, siue distantia, ac elongatio puncti, seu quantitatis, quæ rotatur à rotationis axe, propriè quantitas est Radij rotationis. Propriè autem dicitur, quia remotio illa quandoque sumitur indeterminatè, ita vt quantitas Rotanda esset dicta à rotationis axe remota, quæ ipsum nullo modo tangeret; & eadem quantitas nihil prorsus ab eodem axe remota diceretur, quæ ipsum in aliqua sui, siue puncto, siue parte contingeret.

Tertia. Radius Rotationis quid.

Quarta. Via rotationis quid.

Sed pro Compositione Potestatum Rotundarum, Generalis hæc Regula traditur.

Remotio, seu elōgatio pūcti seu quātitatis quæ rotatur quid sit.

Quantitas Rotanda in viam rotationis ducta producit Potestatem Rotundam, vno gradu altiorem Potestate, siue quantitate rotatâ.

Regula generalis.

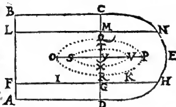
Generalem hanc Regulam, etsi verissimam, indemonstratam tamen reliquit huius Methodi Auctor. Sed ex ijs, quæ Ioannes Antonius Roccha felicis memoriæ, cuius consuetudine Ferrariæ, valdè familiariter vtebar, ex ijs, inquam, quæ Caualerio communicauerat, mihique ostenderat, demonstrari commodè posset. Erat autem huiusmodi.

Hanc regulā generalem etsi verissimā indemonstratā tamen Auctor reliquit.

Lemma.

Si figurâ plana super aliqua sui recta linea figuram ipsam secante libretur, erunt momenta segmentorum figuræ, vt sunt solida Rotunda ab ipsis segmentis circa secantem lineam reuolutis, descripta.

Sit fi-



Sit figura ABEA, quam fecet recta quæpiam CD in partes ABCD, & CED: concipiatur autem circa ipsam CD, velut circa axem, librata reuolui. Dico momentum figuræ ABCD, ad momentum figuræ CED esse, vt solidum Rotundum genitum ex rotatione figuræ ABCD, ad solidum Rotundum procreatum ex rotatione figuræ CED, reuoluta circa eundem axem CD. Sumptis in CD axe quibuscunque punctis G, M, per quæ agantur FH, LN, ductæque sint ipsi CD ad rectos angulos; vel si segmentum ABCD fuerit rectangulum, intelligantur ductæ parallelæ ipsi AD, ita vt portionibus FG, LM existentibus in figura BD, reliquæ GH, MN existant in figura CED. Diuisis autem FG, GH, bifariam in punctis I, & K.

Quoniam igitur momentum rectæ FG ad momentum rectæ GH, si intelligatur vtraque circa G librari, rationem habet compositam ex ratione magnitudinis FG, ad magnitudinem GH, & ex ratione IG, distantiæ centri grauitatis I, ex puncto G, ad GK distantiam centri grauitatis k, ab eodem puncto G (est enim I, centrum grauitatis magnitudinis FG, vt K, centrum grauitatis magnitudinis GH,) hoc est ex ratione FG ad GH; vt enim simplum ad simplum, ita duplum ad duplum; sed duæ rationes FG ad GH, componunt rationem quadrati FG ad quadratum GH; ergo momentum rectæ FG ad momentum rectæ GH, erit, vt quadratum FG ad quadratum GH; hoc est vt circulus, cuius radius FG ad circulum, cuius radius GH. Nec dissimiliter momentum rectæ LM, ad momentum rectæ MN, erit, vt quadratum LM ad quadratum MN; & sic de reliquis. Deinde verò momentum FG ad momentum LM, est, vt quadratum FG ad quadratum LM, & ita semper; ergo omnes primæ simul magnitudines, videlicet omnia momenta figuræ BD, ad omnes secundas simul, nempè ad omnia momenta figuræ CED, erunt vt omnes tertiæ simul, scilicet vt omnia quadrata figuræ BD, ad omnia quadrata figuræ CED, seu quod idem est, momentum figuræ BD ad momentum figuræ CED, erit, vt omnia quadrata figuræ BD, ad omnia quadrata figuræ CED; hoc est vt omnes circuli figuræ BD, quorum scilicet radij sunt omnes lineæ prædictæ figuræ BD, ad omnes circulos figuræ CED, quorum scilicet radij sunt omnes lineæ prædictæ figuræ; seu quod idem est, vt rotundum ex figura BD ad rotundum ex figura CED.

His præhabitis pergit Caualerius. *Figuræ quidem CED grauitatis centrū esto V, in prædicta rotatione describens circuli peripheriam VTSXV, quæ via rotationis dicitur prædicti centri grauitatis V, & TV rotationis radius. At verò figuræ BD grauitatis centrum esto O, sitque OT perpendicularis ipsi CD, rotationis radius, & ORPQO via rotationis.*

Supradicta Regula demõstratio. *Quoniam igitur ratio momenti figuræ BD ad momentum figuræ CED, composita est ex ratione prædictarum figurarum BD, CED, & ex ratione radiorum OT, TV, qui quidem sunt distantiæ centrorum grauitatis O, & V, ab axe CD, seu ex ratione peripheriarum, seu viarum rotationis ORPQO, & SXVTS; At verò ex huiusmodi rationibus componitur quoque ratio columnarium, seu cylindricorum, quorum bases sunt figuræ BD, CED, altitudines verò sunt rectæ, quarum vna æqualis est via rotationis ORPQO, alia æqualis via rotationis SXVTS; ergo Rotunda prædicta ex BD, & CED descripta, erunt in ratione prædictorum cylindricorum; sed Rotundum ex BD descriptum æquale est cylindrico, cuius basis BD, altitudo verò recta æqualis via rotationis ORPQO: Rotundum autem descriptum ex CED æquale est cylindrico, cuius basis CED, altitudo autem recta æqualis via rotationis SXVTS, vt mox constabit: cylindricus verò cuius basis CED, altitudo æqualis via rotationis SXVTS, fit ex ductu CED in prædictam altitudinem; ergo etiam rotundum ex figura CED, fit ductu huiusmodi figuræ, quæ est quantitas rotata in SXVTS, viam rotationis. Ergo quantitas Rotata ducta in Viam rotationis, Potestatem facit vno gradu altiorem quantitate rotatâ.*

Quòd autem Cylindricus in basi BD, altitudinem habens æqualem viæ rotationis ORPQO, æqualis sit Rotundo ex figura BD, sic ostenditur. *Rotundum ex figura BD, idem est quod cylindricus, basim habens circulum, cuius radius AD, altitudinem autem CD; hic autem cylindricus æqualis est alteri, cuius basis BD, altitudo verò rotationis via ORPQO; eorum enim bases altitudinibus reciprocantur; vt enim circulus, cuius radius AD ad figuram BD, ita reciprocè altitudo æqualis via rotationis ORPQO, ad altitudinem CD; propterea quod circulus, cuius radius AD, fit ex ductu ipsius AD, in semiperipheriam à se descriptam, hoc est in viam*

rotatio-

rotationis ORPQO, quæ dimidia est prædicta peripheria: at verò figura BD, fit, ductu AD, in DC; quare vt circulus, cuius radius AD ad figuram BD, ita reciprocè est via rotationis ORPQO ad CD; cylindricus igitur basim habens BD, altitudinem verò æqualem rotationis viæ ORPQO, æqualis est Rotundo ex BD. Hinc & cylindricus, cuius basis CED, altitudo verò æqualis viæ rotationis SXVTS, æquabitur Rotundo ex figura CED; sunt enim huiusmodi solida proportionalia, vt vidimus; quare si cylindricus in basi BD, altitudinem habens viam rotationis ORPQO, æqualis est Rotundo ex figura BD; etiam Cylindricus, cuius basis CEB; altitudo via rotationis SXVTS, æquabitur Rotundo ex figura CED. Quod oportebat ostendere.

Hinc Generalia quædam inferuntur Corollaria.

Primum. Cùm manifestum sit vnius, eiusdemque quantitatis varias fieri posse Potestates, & ex hac Regula constet omnes fieri ex ductu eiusdem quantitatis rotandæ in viam rotationis, necessariò consequitur, si viæ rotationis sint æquales, Potestates etiam æquales fore; si verò eædem viæ fuerint inæquales, Potestates etiam inæquales fore, ac eandem ad se inuicem rationem habituras, quam habent rotationis viæ, atque adeò quam habent radij rotationis, cùm peripheriæ sint vt radij. Contrà verò si radij sint ijdem, vel æquales, rotandæ etiam quantitates inæquales, Potestates etiam inæquales fore, & in eadem inter se ratione, quam habent quantitates rotandæ. *Corollarium primum.*

Secundum. Si quantitates rotandæ binæ sint & inæquales, & Potestates æquales producant, sequitur etiam vias, & radios rotationis inæquales esse, & eandem reciprocè rationem habituros inter se, quam habent quantitates rotandæ. Et contra si radij, aut viæ rotationis sint cum quantitatibus rotandis reciprocè proportionales, erunt etiam Potestates inter se æquales. *Corollarium secundum.*

Tertium. Si verò tàm quantitates rotandæ, quàm viæ, siue radij rotationis sint inæquales, sequitur Potestatum rationem esse compositam ex ratione quantitatis rotatæ vnius ad quantitatem rotatam alterius, & ex ratione viæ, vel radij illius vnius ad viam, vel radium huius alterius. *Corollarium tertium.*

Quartum. Quando termini intermedij rationum componentium sunt ijdem, vt si ratio A ad E, dicatur composita ex ratione B ad C, & ex ratione C ad D, vbi intermedij termini C, & C, sunt ijdem, tunc quoniam rationes componentes sunt continuatæ in tribus terminis B, C, D, concluditur rationem compositam A ad E, eandem esse cum ratione B ad D. *Corollarium quartum.*

Methodus autem hæc, vt diximus, grauitatis centro vtens procedit; vnde illius notitiam, atque adeò indagationẽ, in omnibus assumptis considerandis debet habere perspectã. *Hæc Methodus centri grauitatis indagationem requirit, et primo incipit ab eius vsu in punctis, ac lineis.*

Sequitur vsus centri grauitatis, & primo punctorum, ac linearum rectarum, hoc est de compositione Potestatum Rotundarum à punctis, ac lineis rectis descriptarum.

Primò Potestas rotunda componitur, quæ describitur à puncto vno, vel pluribus. *Prima potestas rotunda.*

Si propositum sit punctum vnum, datusque sit radius rotationis illius, & oporteat ipsius Potestatem rotundam componere. Ex rotationis radio, tanquàm semidiametro, inueniatur circuli peripheria, quam datũ punctũ in rotatione describit; ea nãque Problemati satisfacit. *Potestas vnica vnius puncti cõponitur.*

Quòd si plura sint puncta data, quodlibet verò cum suo rotationis radio sine vllo respectu ad illorum positionem, plures quoque erunt quærendæ circulorum ad radios datos peripheriæ; illæ namque, si ita petatur, vnam in summam colligendæ sunt, vel quælibet seorsum designanda. *Quando plura sunt puncta, sine respectu ad positionem.*

Quòd si plura sint puncta data in certa positione quadam, tàm inter se, quàm respectu axeos, ducendæ sunt ex punctis datis ad axem rotationis lineæ rectæ perpendiculares, quarum quantitas, si fuerit ignorata, est exploranda; eæ siquidem sunt rotationis Radij, cum quibus procedendum, vt supra. *Quando plura sunt in certa positione.*

Quod si in hac punctorum pluralitate certã positione datorum, vnica sit inuenienda peripheria, omnibus peripherijs à singulis punctis descriptis simul sumptis æqualis; respiciendum erit ad diuersas punctorum positiones, quæ multifariam contingunt. Primò, vt omnia puncta sint in eadem recta linea constituta; quod trifariam accidit; nam illa ad axem rotationis, vel erit perpendicularis, vel parallela, vel obliqua. *Quomodo indaganda vnica peripheria singulis æqualis, data punctorum pluralitate &c.*

Tandem si plura sint data puncta sine vllo certo suæ positionis ordine, ac ob id quomodocunque fortuitò constituta, tunc procedendum vt supra, cùm data puncta essent in data obliqua, constituta; singuli enim radij sunt seorsim inquirendi, coniungendique, & ad compositum ex omnibus correspondens, inquirenda est peripheria, quæ proposito satisfaciet. *Quãdo plura data sunt pũcta sine certo positionis ordine.*

Potestas, quã data recta efformat, & quidem Horizontalis, Verticalis, & obliqua componitur.

Potestas rotunda componenda sit, quam data recta linea efformat, & quidem Horizontalis, Verticalis, & Obliqua.

Pro horizontali proposita linea applicetur horizontaliter, hoc est, perpendiculariter ad axem rotationis; sumatur eius centrum grauitatis, punctum scilicet, in quo ipsa bifariam diuiditur, vnde rotationis Radius erit eius dimidium: reperiatur rotationis via, quæ erit peripheria descripta ab huiusmodi radio; hæc enim ducta in propositam quantitatem rotatam, & producet Potestatem Horizontalem Iustam.

Potestas Verticalis iusta, lineæ rectæ nulla est, nisi ipsamet linea.

Potestas Verticalis iusta huius lineæ nulla est, nisi ipsamet linea proposita; tunc enim cuadit axis immobilis.

Potestas obliqua pro sui cõpositione, quid requirat.

Potestas obliqua requirit pro sui compositione, præter quantitatem lineæ, cuius desideratur potestas, etiam ipsius lineæ ad axem inclinationem; vel rectam lineam ab aliquo noto puncto datæ rectæ ad axem perpendiculariter ductam. Factâ igitur eius inclinatione ad axem in dato angulo, & ex eius centro grauitatis ducatur ad axem perpendicularis, quæ rotationis Radius erit, ac ob id rotationis via non ignorabitur, quæ ducta in propositam lineam veluti in quantitatem rotatam, producit Potestatem Iustam Obliquam propositæ lineæ, quæ quidem Potestas est superficies Conica perfecti Coni isoscelis.

Potestates maiores iustis.

Potestates autem maiores Iustis componendæ sint. Data sit remotio ipsius ab axe rotationis recta quæpiam, cui in directum ponatur proposita linea horizontaliter ad axem applicata, ita vt fiat vna linea recta. Centrum grauitatis propositæ lineæ est punctum, in quo ipsa bifariam diuiditur, inter quod & axem intercipitur aggregatum ex linea remotionis, & ex dimidio propositæ lineæ, quod est rotationis Radius: vnde rotationis via non ignorabitur, quæ ducta quidem in propositam lineam quantitatem rotatam producit Potestatem Horizontalem Iustâ maiorem eiusdem propositæ lineæ, quæ quidem Potestas est figura plana circularis, duabus peripherijs perfectis comprehensa, alterâ conuexa, alterâ verò concauâ, eaque corona commodè dici potest.

Potestas Verticalis iusta maior.

Potestas Verticalis Iusta maior describitur per lineam propositam perpendiculariter erectam, factoque Radio rotationis, qui sit æqualis lineæ remotionis, rotationis via innotescet, quæ ducta in propositam lineam rotatam, componet Potestatem Verticalem iustâ maiorem. Huiusmodi autem Potestas est superficies Cylindri.

Potestas obliqua iusta maior.

Potestas Obliqua iustâ maior, vt componatur, præter lineam cuius danda est potestas, dari quoque debet angulus inclinationis, quem ipsa facit cum axe; vel perpendicularis ex centro ipsius ad axem, vel binæ quæcunque rectæ ex binis ipsius punctis ad axem perpendiculariter ductæ; ex his enim constabit Radius rotationis secans propositam lineam bifariam, atque adeo in eius centro grauitatis: vnde rotationis via prodibit, quæ ducta in propositam quantitatem rotatam procreabit Potestatem Obliquam iustâ maiorem, & huiusmodi Potestas est superficies frusti Conici.

Potestas rotunda, quam binæ rectæ simul sumpta describit, vt cõponatur.

Potestas rotunda, quam binæ rectæ simul sumptæ describunt, componitur ad eum, qui sequitur modum.

Potestas Rotũda quã binæ rectæ simul sũpta describunt quomodo componatur.

Potestas rotunda, quam binæ rectæ simul sumptæ describunt ita componitur. Datæ sint duæ rectæ quarum altera concidat cum axe rotationis, altera verò posita sit extra illum, & sit earum iusta Potestas componenda. Vna sit quæ cum axe coincidat: altera verò extra axem erit ad priorem vel recta, vel obliqua, vel demum eidem parallela, vtcunque se habeat, sat est alterius tantum lineæ, quæ est extra axem potestatem componere: Vnde ex antecedenti, oblato Problemati fit satis, recta siquidem in axem coincidens, cùm rotationem non subeat, nullam potestatem procreat.

Alio modo idẽ perficitur.

Quod si placet vtriusque datarum linearum commune grauitatis centrum reperire, deinde radium ac rotationis viam, in quam vtraque simul ducatur linea, eadem reperietur potestas.

Quando datæ rectæ fuerunt adinuicem inclinatæ.

At si duæ datæ rectæ sint ad inuicem inclinatæ, vt quempiam angulum constituant, & earum Potestas Rotunda Iusta sit componenda. Animaduertendam earum applicationem ad axem rotationis bifariam contingere. Vel vt vtraque extremitas earum vbi non conueniunt, vel vna tantum axem attingat. Posterior casus communi Regula absoluitur; quòd si vtraque extremitas axem contingat, ratione tam inclinationis linearum ad se inuicem, quàm applicationis earundem ad axem, tres dantur casus: primò vt existente vnâ ad axem obliquâ, altera sit ad eundem recta; secundò, si hæc altera etiam sit obliqua,

Quãdo rectæ sunt inuicem inclinatæ.

sita

ſita ſit ſupra perpendicularem. Tertiò infrà.

E duabus datis inuicem inclinatis, cuius extremum vnum tangit axem, diuidatur biſariam, & ex puncto diuiſionis, quod eſt grauitatis centrum, ducta ſit perpendicularis ad axem, hic erit rotationis Radius æqualis dimidio illius, quæ ex altero extremo prædictæ lineæ perpendiculariter cadit ad axem, vel etiam illi, quæ à biſſectionis puncto alterius obliquæ, ſcilicet infra perpendicularem ad axem, cadit pariter perpendicularis ad axem: alterâ æquali obliquâ exiſtente ſupra perpendiculari; Rotationis igitur via non ignorabitur, quæ ducta in aggregatum ex maiori è duabus inclinatis, & ex minori, ſiue ſupra, ſiue infra perpendicularem, Iuſtam facit Poteſtatem. Huiuſmodi autem Poteſtas eſt ſuperficies Rhombi ſolidi à triangulo, cuius baſis eſt axis, latera verò ſunt duæ rectæ datæ ad inuicem inclinatæ, quarum minor cadit infra perpendicularem. Vel eſt ſuperficies duorum conorum &c.

Poteſtates autem Iuſtis maiores pro expoſitis lineis, ex dictis innoteſcunt. *Poteſtates Iuſtis maiores ex dictis colligi poſſunt.*

Quod ſi binæ datæ rectæ huiuſmodi ſint, quæ non faciant angulum, aut ſe ſe mutuo tangant, ſed vel ſint parallelæ, vel ad inuicem obliquæ, ratione axeos tertiam conſequuntur differentiam; ſi enim parallelæ ſunt vtræque, vel rectæ ad axem, vel obliquæ, vel vna obliqua, & altera recta, habitis centris grauitatis, & Radijs rotationis, rotationis via non latebit. *Caſus alter.*

Poteſtates Rotundæ plurium rectarum linearum, comparantur compoſitione facta, vt ſequitur. *Poteſtates Rotundæ pluriũ rectarum linearum.*

Ex communi Regula ſupra tradita componatur Poteſtas. Si Poteſtas ſit efformanda, quæ fruſti coniei ſuperficies ternas contineat, nempe ſuperficiem conicam cum ſuis duabus baſibus: inueniatur Poteſtas binarum rectarum ſimul, quæ ſunt diametri baſium: deinde reperiatur Poteſtas lateris ſuperficiei conicæ ſeorſim priori addenda, vel ſingularum rectarum Poteſtates componantur.

Quando verò dantur centrum cõmune, & Radius rotationis cũ ipſis lineis &c; Cùm enim duæ rectæ ſe mutuò ſecuerint, & bina ſegmenta vnius, ac bina ſegmenta alterius fuerint æqualia, interſectioniſque punctum omnium ſimul commune centrum, Radiuſque rotationis dimidium ſit eius, quæ eſt ad rectos angulos cum axe, Poteſtas componetur, ducendo rotationis viam, quæ latere non poteſt; cùm Radius ſit cognitus, in ſummam quatuor datarum rectarum. Quod etiam intellige, ſi ipſæ datæ forent vt binæ tantum.

At ſi plures datæ rectæ inter ſe omnes æquales extiterint, ac in tali ſitu poſitæ, vt commune centrum facilè comparari queat, faciliùs per viam rotationis componitur Poteſtas, quàm per plures,

Poteſtas communis linearum rectarum æqualium, ſegmento circulari inſcriptarum, componitur, vt ſequitur. *Poteſtas communis linearũ rectarum æqualium, ſegmento circulari inſcriptarum.*

Propoſitarum linearum æqualium, & numero pariter parium, peripheriæ circularis ſegmenti ordine continuo inſcriptarum, vel etiam circumſcriptarum, commune centrum grauitatis inueniatur, & ex illo vnico Poteſtas ſimul omnium ſumptarum reperietur; & quidem attendendo, vel ad diametrum circuli, vel baſin, chordam, ſiue ſubtenſam ſegmenti, licet Poteſtates componere iuxta triplicem differentiam Horizontalem, Verticalem, & Obliquam, & quidem, Iuſtas, vel Iuſtis maiores.

Vnde ſi fuerint quotcunque, exempli gratia, octo, lineæ æquales, circularis peripheriæ ſegmento ordine quidem inſcriptæ, ſiue illud ſemicirculari ſit maius, vel minus, vel æquale, communeque ipſis grauitatis centrum innotuerit, ac oporteat earum primo Poteſtatem Iuſtam horizontalem componere; ſitque ſegmentum minus tertia pars peripheriæ circuli, maius autem duæ tertiæ partes, notaque ſit diameter, conſtabit ſubtendens vnum ex octo arcubus, tùm in minori ſegmento, tùm in ſemicirculo, tùm in ſegmento maiori; cùmque totius arcus axi ſupponatur perpendicularis in minori ſegmento, dimidium ipſius erit rotationis radius, nempè ſinus ſextantis; in reliquis autem circuli ſemidiameter, velut æqualis rectæ, quæ propriè rotationis radius dicitur, ductæ à grauitatis centro portionis perpendicularis ad axem: Vnde ad harum Poteſtatum Horizontalium compoſitionem non eſt opus notitiâ communis centri grauitatis, cùm ſatis ſuperque ſit nouiſſe illud eſſe in recta tendente ad verticem portionis; radio autem cognito, rotationis via non latebit pro omnibus ſegmentis, Rotationis via igitur ducta in aggregatum octo linearum rectarum, ſeg-

mento ordine inſcriptarum producit Horizontalem Iuſtam Poteſtatem ipſarum, & quidem pro ſegmento minori, pro ſemicirculo, & pro ſegmento maiori, prout ducta fuerit in aggregatum prædictarum linearum octo, vnius, vel alterius ſegmenti.

Superficies ex huiuſmodi rotationibus ortæ, conicæ ſũt.

Omnes autem hæ ſuperficies ex rotatione ortæ, Conicæ ſunt, binæ ſcilicet ſupremæ, ſemianuli Rhombici ſuperficiem efformantes, reliquæ ſunt Conorum decurtatorum, vel ſi mauis Annulorum.

Ad Poteſtates Iuſtas Verticales quod attinet. Subtendens circuli ſegmentum euadit rotationis axis, Radius porrò ea recta, quæ ex centro grauitatis communi iam dicta ſuper ſubtenſam perpendiculariter cadit; Biſariam verò prædictarum Poteſtatum inquiſitio poteſt inſtitui. Primò vel communi iam explicatâ regulâ. Secundò ex ijs, quæ iam fuerunt inuentæ, Poteſtatibus.

Poteſtatum inquiſitio biſariam inſtitui poteſt.

Pro primo modo quid agendum.

Pro primo modo ex Radijs rotationum vijs inuentis, & in ſummam rectarum datarum ductis, quæſita Poteſtas prodibit; ad id autem eſt opus rotationum Radijs, ſine quibus latent earundem rotationum viæ, pro quo non vna eſt inquiſitionis ratio; nam pro ſegmento minori fiat vt dimidia ſumma ipſarum rectarum ad dimidiam baſin ſegmenti, ita rectæ à circuli centro perpẽdicularis ſuper vnam datarum rectarum, ad aliam, quæ erit, coniungens circuli centrum, & centrum grauitatis commune datarum linearum, ordine inſcriptarum, à qua ſubducta differentiâ inter ſemidiametrum, & perpendicularem à vertice ipſius ſegmenti, remanet rotationis Radius: Vnde rotationis via perſpecta erit, & Poteſtas Verticalis Iuſta.

Pro ſemicirculo.

Pro ſemicirculo, fiat vt dimidia ſumma rectarum inſcriptarum ad ſemidiametrum, ita perpendicularis à centro ſuper vnam ex inſcriptis ad aliam quæ erit rotationis Radius. Vnde via rotationis non ignorabitur, & Poteſtas Verticalis Iuſta.

Pro ſegmento maiori.

Pro ſegmento maiori, fiat vt dimidia ſumma inſcriptarum ad dimidiam baſin ſegmenti, ita perpendicularis ducta à centro ſuper vnam ex inſcriptis, ad aliam diſtantiam inter commune centrum grauitatis, & centrum circuli, cui addito exceſſu perpendicularis à vertice ad baſin ſegmenti, Radius rotationis innoteſcet: vnde, & rotationis via non latebit, quamobrem & Poteſtas Verticalis Iuſta perſpecta fiet.

Aliæ Verticales Poteſtates emergunt.

Aliæ itidem Poteſtates emergent Verticales, ſi loco axeos iam dicti ſtatuatur recta illi parallela tangens ſegmenti verticem.

Alia etiam ratione hæ, ſimileſque Poteſtates procreantur; ſiquidem cùm eiuſdem quantitatis variæ componi poſſint Poteſtates, & Horizontales, & Verticales, & infinitæ Obliquæ, eæque vel Iuſtæ, vel Iuſtis Maiores, omnes tamen eandem inter ſe rationem habebunt, quam illarum Radij rotationis ex quibus fuerunt procreatæ habebant. Vnde fit vt cuiuſuis quantitatis, & quauis data Poteſtate cum ſuo rotationis Radio, alia eiuſdem quantitatis Poteſtas procreari poſſit per inſtitutum analogiſmum, ſi ipſius aſſignetur rotationis Radius. Vt ſi fiat quemadmodum Radius rotationis Poteſtatis Horizontalis ad Radium rotationis Poteſtatis Verticalis, ita Poteſtas Iuſta inſcriptarum Horizontalis ad aliud, & hoc erit Poteſtas Verticalis.

Poteſtates Rotũdæ perimetri triangulorum, & quadrangulorum.

Poteſtates Rotundæ perimetri triangulorum, & quadrangulorum, componuntur vt ſequitur.

Biſariã poteſt contingere, vt triangulum, atq; quadrãgulum Iuſtã Poteſtatem componant.

Biſariam poteſt contingere, vt triangulum atque quadrangulum Iuſtam Poteſtatem componant. Vel enim primo habebit latus vnum ita poſitum, vt cum rotationis axe coincidat, vel ſecundò eandem in puncto alicuius anguli tantùm continget.

In primo caſu biſariam perimetri poteſtas fieri poteſt. Primò, vt binorum tantum laterum, quorum neutrum coincidit cum axe, rationem habeamus, adeo vt via rotationis ducatur in ſummam binarum illarum rectarum; proueniet enim Poteſtas Iuſtas Verticalis perimetri totius trianguli. Quo quidem artificio vtendum quoties, & centrum grauitatis binarum linearum prædictarum, & Radius rotationis facilius comparari poterit, quàm ſi commune centrum tribus lineis inquirendum foret.

Secundò etiam Poteſtas fiet ſi centrum inquiratur totius perimetri, rotationiſque via ducatur in totum perimetrum; eadem enim omninò Poteſtas procreabitur, quod intelligendum quoque de pluribus; tunc autem hæc præferenda eſt ratio, quando Radius rotationis facilius pro hac, quam pro illa comparatur.

Quòd ſi triangulum aliquo ſuo angulo rotationis axem attingat, perimetri poteſtatem biſariam

bifariam assequemur, vel ita vt latus vnum ipsius trianguli sit rectum ad axem, & sic fiet Potestas Iusta Horizontalis, vel vt vnum latus sit parallelum axi, & fiet Potestas Iusta Verticalis, vel nullum latus sit aut rectum, aut parallelum ad axem, & fiet Potestas perimetri eiusdem trianguli iusta Obliqua.

Quando triangulum aliquo suo angulo rotationis axem attingit.

Potestates Iustis maiores fient, si Radio rotationis, de quo hactenus tantum additum fuerit, quantum remotio quantitatis rotandæ requirit, cætera autem vt supra peragendo.

Potestas Iusta Horizontalis. Iusta Verticalis. Iusta Obliqua.

Cingulorum, & Gnomonum Potestates ex Regula vniuersali depromuntur; habito siquidem grauitatis centro, recta ex illo ad axem rotationis, determinat Radium rotationis: vnde rotationis via non latebit, quæ quidem ducta in quantitatem rotatam, Potestatem procreat. Solum id præ oculis habendum, num præster vti centro communi, an verò particulari linearum.

Cingulorum & Gnomonum Potestates ex generali Regula depromuntur.

Potestas perimetri Polygonorum regularium inquiritur sic. Reperiatur rotationis Radius, qui facilè comparabitur cùm circuli centrum idem sit, quod polygoni eidem inscripti centrum grauitatis, hinc ducta perpendicularis ad axem est rotationis Radius: vnde via rotationis non ignorabitur, quæ quidem ducta in quantitatem rotatam, Potestatem procreabit quæsitam.

Potestas perimetri polygonorum regularium.

Verticalis dicetur ea, quæ oritur ex polygono, cuius vnum latus, aut commune est cum axe rotationis, aut eidem parallelum. Horizontalis verò dicetur quando latus vnum est horizonti parallelum, quæ absolutè intelligi possunt pro polygonis laterum numero imparium, vel quorum laterum numerus non est pariter par; tunc enim vt Potestas Verticalis dicatur, latus vnum polygoni rotandi erit vel parallelum, vel incidet cum axe rotationis, & vel duo anguli respondebunt alter vertici, & alter horizonti, vel vnus saltem siue vertici, siue horizonti, prout hoc, vel illud latus euaserit axis.

Retunda. Verticalis Potestas quæ nã dicenda, quæ dicenda Horizontalis.

Quando verò laterum numerus est pariter par, latus autem vnum incidit in axem rotationis, vel cum eo parallelum est, erit itidem oppositum latus eidem axi parallelum, sed & alia duo erunt horizonti parallela; ex quo ambigendum num illa Potestas, Verticalis potius, an Horizontalis dicenda sit, sed hoc nihil refert. Cæterum Obliquæ Potestates dicentur, quibus nec horizontalis, nec verticalis ratio aptari potest.

Obliqua Potestates, quæ dicenda.

Verticalis Potestas Iusta vt componatur, fiat Radius rotationis ea linea, quæ perpendicularis est ad vnum latus polygoni, qui quidem Radius etiam Potestati Horizontali inseruiet, quando scilicet numerus laterum pariter par extiterit; alioquin si numerus alius fuerit, ita vt angulus axem rotationis tangat, rotationis Radius pro Potestate Horizontali, erit ipsa circuli semidiameter, cui polygonum inscriptum est, si laterum numerus par fuerit. Quod si fuerit impar, Radius rotationis erit æqualis medietati rectæ illius, quæ vnum, aut plures angulos numero impares subtendit; at pro obliquis Potestatibus Iustis, rotationis Radius neque erit ea, quæ recta ex centro circuli ad axem est, nec circuli semidiameter, sed minor semidiametro, & maior perpendiculari supradicta.

Verticalis Potestas Iusta vt componatur.

Potestas verò cuiusuis circularis peripheriæ circulum totum non ambientis, componetur sic.

Potestas cuiusuis peripheriæ circulum non ambientis.

Vt enim rectarum æqualium circulari segmento inscriptarum Potestates componuntur, sic etiam ipsarum circularium peripheriarum. Ex centro igitur grauitatis datæ peripheriæ, quod sanè diuersum omninò est, à communi centro grauitatis inscriptarum, & reliqua peragantur vt ibi; Potestates enim emergent Horizontales, Verticales, & Obliquæ; ducenda est autem proposita peripheria in suam rotationis viam, quemadmodum inscriptarum aggregatum ducebatur in communem viam rotationis.

Potestas circuli componetur eodem modo, quo partium Potestas componebatur: solum illud interest, quod integra circuli peripheria sit sibi semper æqualis, & vniformis, ac in sui medio centrum grauitatis obtineat: vnde facillimè eius rotationis Radius innotescit; quia tamen ratione axeos rotationis eodem se semper habet modo, quamcunque peripheriæ partem ei obuertat, Potestas eius iusta quidem, & alia iustâ maior dici poterit; nullam tamen hæc Potestas Horizontalis, Verticalis, aut Obliquæ, differentiam admittet, quamuis in circulo diametrum aliquam elegeris, & eam nunc horizonti, nunc verticali parallelam, vel etiam ad rotationis axem, qui verticalis dicitur, obliquam posueris; eadem siquidem perpetuò orietur Potestas idemque rotationis Radius, qui semper in iusta quidem est semidiameter circuli, Potestas verò est superficies Annuli stricti, ac ortum ducit

Potestas circuli quo ratione cõponatur.

ducit ex propositæ peripheriæ ductu in se ipsam; siquidem rotationis Radius est eiusdem peripheriæ semidiameter; quamobrem rotationis via æqualis est eidem propositæ peripheriæ.

Radius rotationis Potestatis maioris qualis sit.

Radius autem rotationis Potestatis maioris Iustâ tantum superat semidiametrum circuli propositi, quantum extremum punctum ipsius ab axe remouetur. At ipsa Potestas est superficies Annuli absolutè dicti, oriturque ex ductu propositæ peripheriæ in illam peripheriam, quæ ad propositam, eandem habet rationem, quam habet Radius rotationis ad semidiametrum oblati circuli.

Potestates perimetri segmentorũ, aliarũq; circuli partiũ, quomodo componantur.

Potestates autem perimetri segmentorum, aliarumque circuli partium componuntur, vt sequitur. Circuli partes, quæ fiunt ex sectione rectæ lineæ, distribuuntur in segmenta, sectores, sectorum æmulos, frusta, & alia sine certo nomine varia. Perimetrorum verò figurarum istarum mixtilinearum Potestates componemus hac arte.

Potestates perimetrorum mixtilinearũ figurarũ quomodo comparantur.

Et primò ad circulorum segmenta quod attinet; si Potestas eorum Horizontalis efformanda sit, obseruandum est illud, quod in segmento, quod minus est semicirculo, Radius rotationis est ipsius semibasis, seu semichorda; in reliquis autem circuli semidiameter; propterea quod huiusmodi lineæ sunt æquales, ductis à grauitatis centro ipsius segmenti ad rotationis axem, cui segmenti basis est perpendicularis; vnde rotationis Radij sunt, quibus cognitis, rotationis viæ innotescunt, at via rotationis ducenda est in quantitatem perimetri; hoc enim pacto Potestates Iustæ Horizontales producentur. Huiusmodi autem Potestates sunt superficies partis Annuli stricti deficientis ab integro iuxta defectum segmenti à toto circulo.

Potestatum Verticalium eorundem segmentorũ quomodo se habeat.

Potestatum Verticalium eorundem segmentorum compositio non differt à compositione Potestatum peripheriarum; basis enim segmenti, cùm sit rotationis axis, ex eo nec rotatur, nec vllam superficiem describit; quamobrem via rotationis, ac eius Radius cum supradictis coincidunt, atque via illa ducenda est in solam segmenti peripheriam, vt fiat hoc loco componenda Potestas. Huiusmodi autem Potestas ex segmento minori erit superficies semiannuli Citrij, Stricti, & Lati; ex semicirculo erit superficies semiannuli stricti, & ex segmento maiori superficies Annuli stricti, similiter plus quam semissis.

Quando Rotationis axis mutatur, fitq; priori parallelus.

Quod si rotationis axis mutetur, fiatque alius priori parallelus segmenti, peripheriam in vertice contingens, fiet rotationis Radius ex communi rotationis centro ad axem perpendiculariter erectus, & fiet diuersa Potestas: vnde peripheria segmenti concauam superficiem describet, eiusque basis, cylindricam.

Potestates obliquæ, & Verticales, &c.

Potestates Obliquæ, quemadmodum, & Verticales, vt describantur, opus est centro grauitatis proprio perimetri ipsius segmenti; inde siquidem ducenda est recta ad axem perpendicularis, vt fiat rotationis Radius, hinc habebitur via rotationis, nimirum peripheria Radio ipso descripta; hæc autem via ducta in propositum perimetrum, velut in quantitatem rotatam, Iustam Obliquam Potestatem producet.

Potestates segmentorũ Iustis maiores.

At verò Potestates segmentorum propositorum Iustis maiores fient, si accipiantur Radij rotationis maiores.

Potestates horum perimetrorũ, quomodo faciliùs cõponantur.

Potestates horum perimetrorum componentur faciliùs, si peripheriarum, segmentorum, & basium Potestates seorsim efficiantur, & vtræque coniungantur, faciliùs, inquam, efficientur, quàm vt centrum grauitatis vtriusque commune inquirendo, & reliqua peragendo.

Hactenus dicta, sunt intelligenda de sectoribus, eorũdemq; æmulis.

Hactenus tamen dicta intelligenda sunt de sectoribus, eorundemque æmulis, non tamen eodem modo discurrendum de frustis, quæ ex peripheriæ circuli abscinduntur à duabus rectis parallelis æqualiter à centro circuli remotis; propterea quod grauitatis centrum perimetri illius idem est, quòd circuli centrum, ac ob id Radius rotationis communis, facilè & rotationis via, & Potestas comparatur.

Potestas Perimetri lunularum.

Potestas perimetri Lunularum, Arcuatarum figurarum, & Securicularum, Coronarumque, hac lege perficitur.

Bifariam perimetri Lunularum Potestas efformari potest, vel ex centris grauitatis singularibus, vel ex communi centro grauitatis; alteruter autem modus est eligendus, prout facilitas, vel commoditas postulabit. Præstat tamen definire, quæ nam ex ipsis Potestatibus dicenda sit Horizontalis, quæ Verticalis, & quæ Obliqua.

Horizontalis potestas.

Horizontalis illa dicetur, quando axis rotationis parallelus est rectæ transeunti per centra circulorum, à quibus fit Lunula, & huiusmodi axis tetigerit exteriorem circulum in

alterutra

alterutra parte à dexteris, vel à finistris, nam ex huiusmodi rotatione Potestas orietur Horizontalis Iusta. Quòd si idem axis à prædictis punctis remoueatur, fit Potestas maior Iustâ.

Quando Lunula fit per intersectionem circulorum.

Quòd si Lunula fiat per intersectionem circulorum, Horizontalis Potestas Iusta pro rotationis axe assumet rectam perpendicularem ad eam, quæ nectit puncta intersectionis circulorum, simulque tangit peripheriam conuexam, ac Iustâ maior eundem axem, situ eodem permanente, magis à centro grauitatis remouebit.

Potestates Verticales Iustæ perimetri Lunularum.

Potestates autem Verticales Iustæ perimetri earundem Lunularum fient, si rotationis axis statuatur recta quæpiam, & quidem cùm Lunula fiat per contactum circulorum, rotationis axis tetigerit vtrunque circulum, atque adeò in puncto contactus vtriusque circuli, fuerit perpendicularis rectæ transeunti per vtriusque circuli centrum; Iustis autem maiores prouenient Potestates, si rotationis axis, longiùs à centro grauitatis recesserit.

Aliæ Potestates Iustæ Verticales.

At verò Potestates aliæ Iustæ Verticales earundem Lunularum, immò & Iustis maiores fient si rotationis axis non statuatur recta tangens vtcunque circulum, nimirum in mutuo horum contactu, sed eidem potius extiterit parallelus in opposito puncto circuli exterioris, at in reliquis, quando scilicet Lunula fit per intersectionem ipsorum circulorum, circulum tetigerit in puncto Verticali, fueritque parallelus rectæ transeunti per puncta intersectionum eorundem circulorum; hoc enim pacto perimetri lunularum Potestates Iustæ fient; Potestates autem Iustis maiores, ab axe radio magis ab eodem puncto contactus vel vno intersectionum, extrorsum remoto.

Potestates Obliquæ perimetri Lunularum.

Potestates Obliquæ perimetri dictarum Lunularum prouenient, si rotationis axis aliter quàm dictum fuit se ad perimetrum Lunularum habuerit, & Iustæ, & Iustis maiores.

Potestates Arcuatarum figurarum.

Ad arcuatas figuras quod attinet, loquendo de præcipuis, quæ nimirum ex binis segmentis circuli æqualibus componuntur, quarum commune grauitatis centrum perimetri est in quo se mutuo secant ad angulos rectos, lineæ, quarum vna transit per intersectiones peripheriarum, altera verò bissecat easdem peripherias; itaque perimetri huiusmodi Potestas Horizontalis Iusta rotationis habet axem, rectam, quæ tangit in punctis vbi arcus se mutuo secant, & rectæ nectenti huiusmodi puncta perpendicularis est, cuius dimidium est rotationis Radius, & hoc quando arcus sunt minores semiperipheria; quod si maiores extiterint, recta quæ perpendicularis est ei, quæ bissecat arcus, fueritque tangens alterutrius: Radius verò rotationis erit dimidium bissecantis arcus &c.

Sic de semicircularum perimetro, suo modo intelligendum.

Potestates perimetri Ellipseos &c. Horizontalis Iusta.

Potestates autem perimetri Ellipseos, & reliquarũ conicarum sectionũ comparari poterũt sic. Ad perimetri Potestatem Iustam Horizontalẽ quod attinet, axis rotationis fit recta perpendicularis Horizonti tangens perimetrum in extremo puncto axeos longioris; Radius fit semiaxis longior, vnde via rotationis non ignorabitur, quæ quidem ducta in perimetrum producit Potestatem Horizontalem Iustam, quæ est superficies Annuli Elliptici stricti lati.

Verticalis Iusta.

Potestas autem perimetri eiusdem Verticalis Iusta comparabitur si fit rotationis Radius semiaxis breuior, eodem existente axe: Vnde Potestas Verticalis quæsita est medietas ipsius Horizontalis, cum perimeter vtrobique sit idem, & Radius prior ad hunc sit vt 2, ad 1; hæc superficies erit Potestas Annuli Elliptici stricti, alti.

Potestas Obliqua.

Ad componendam autem Potestatem Obliquam, oportet cognoscere primò quantitatem Radij rotationis, qui si non detur, erit producendus axis Ellipticus, Maior, vel Minor, vsque ad axem rotationis, vt fiat triangulum rectangulum, ex quo datis, vel inquisitis, necessarijs, Radius Rotationis comparabitur. Reliqua vt supra de cæteris.

Potestas maio Iusta.

Potestates maiores Iustis componentur non dissimiliter; ex Radijs vijsq; rotationis maioribus &c.

Potestas rotũda, quam planum triãguli rectilinei describit.

Potestas autem rotunda, quam planum trianguli rectilinei describit, componetur, vt sequitur.

Propositum sit aliquod triangulum Isosceles, cuius grauitatis centrum notum sit redditum; punctum enim est illud, ita diuidens rectam ex vertice in medium baseos ductam, vt pars Verticalis ad reliquam sit in ratione dupla. Huius autem trianguli diuersimodè ad axem rotationis applicati sit opus rotundam Potestatem componere, quæ quidem vt ex applicatione ad axem trianguli rectanguli constare potest, vbique Iusta erit.

Ex omnibus autem applicationibus trianguli rotandi ad axem rotationis, ea seligenda illa,

illa, vnde rotationis Radius faciliùs innotescit, atque adeò Via rotationis, ac demum Potestas comparatur; vnde, & Reliquæ Potestates efformantur.

Si igitur propositi trianguli Isoscelis basis coincidit cum rotationis axe, Radius rotationis erit tertia pars rectæ ex vertice bissecantis basin, versus eandem basin; in eo siquidem puncto est grauitatis centrum. Inde facilè constat rotationis Via, quæ ducta in quantitatem rotatam, nempè aream trianguli, producit Potestatem trianguli, ratione basis Verticalem. Huiusmodi autem Potestas est Rhombus solidus.

Potestas Verticalis eiusdē trianguli.

Potestas autem Verticalis, eiusdem trianguli, alia comparabitur, si alius statuatur Rotationis axis, per verticem trianguli, æquidistanter basi ductus. Tunc autem rotationis Radius est pars bissecantis basin ex vertice, pars, inquam, continens duas tertias partes versus eundem verticem; hic autem Radius cum duplus sit superioris, Potestas etiam inde orta dupla erit ipsius. Hęc autem est residuum, quod superest ex Cylindro, cuius altitudo est basis supradicti trianguli, & semidiameter baseos est recta ex vertice bissecans basin, si nimirum ex eo tollatur quantitas Rhombi solidi iam dicti.

In reliquis triangulorum Potestatibus componendis quid agendū.

In reliquis autem triangulorum Potestatibus componendis, illud præcipuè curandum, vt Radij rotationis quantitas commodè reperiatur: vnde si propositum triangulum fuerit sic applicatum axi, vt non basis, sed vnum è cruribus cum axe coincidat, rotationis autem Radius sit recta à centro grauitatis perpendicularis ipsi axi, quæ facilè, ob similitudinem triangulorum, comparabitur; ad efformandam Potestatem procedendum sic: Fiat vt Radius rotationis supra iam habitus ad hunc rotationis Radium, ita Potestas superiùs producta ad aliud; & sic habebitur ex Corollario primo Potestas debita posteriori Radio ratione verticalis cruris. Est autem huiusmodi Potestas Rhombus solidus constans è duobus conis Isoscelibus inæqualibus.

Alia Verticalis eiusdem trianguli Potestas.

Nec dissimiliter fit alia Verticalis eiusdem trianguli Potestas, si rotationis axis alius ponatur recta parallela axi iam dicto, transiens per anguli verticem, cui subtenditur iam dictus axis; reperietur enim Radius rotationis, itemque rotationis via, atque tandem Potestas.

Potestas Horizōtalis eiusdem triāguli.

Fiet etiam Potestas Horizontalis eiusdem trianguli, vno ex cruribus Horizontaliter constituto; ob similitudinem enim triangulorum rotationis Radius comparabitur; vnde rotationis via non latebit, atque adeò Potestas.

Alia Horizōtalis potestas.

Alia etiam eiusdem trianguli Potestas Horizontalis fiet, si alius statuatur axis priori parallelus, transiens per extremum alterum cruris Horizontaliter constituti.

Potestas Obliqua.

Potestas autem Obliqua eiusdem trianguli fiet, in eo situ constituti, vt nullum ipsius latus sit ad axem perpendiculare, vel parallelum. Sic etiam suo modo habebitur Potestas efformans Conum simplicem &c.

Cæterarum autem specierum triangulorum rectilineorum non dissimili arte poterunt efformari Potestates.

Potestates Rotūda Quadrilaterorum.

Potestates Rotundæ Quadrilaterorum rectilineorum sic efficiuntur. Quadrilatera enim sunt Quadratum, altera parte longius, altera parte breuius, Rhombus, Rhomboides, Trapetium binarum parallelarum, Trapetium vnius anguli recti, Trapetium absolutè sumptum, horum autem inquiratur Potestas.

Potestas Quadrati.

Potestas quadrati explicabitur infra, cùm de Polygonis regularibus.

Quādo fuerit figura altera parte longior.

Altera parte longius suam efformat Potestatem, si minus latus statuatur coincidens cum axe. Altera parte breuius si maius latus. Itaque vnica est figura, vnicaque ipsius Potestatis Compositio: at iuxtà diuersam ipsius ad axem rotationis applicationem, Potestates diuersæ. Horizontalis dicetur, si longius latus Horizontaliter rotetur: Verticalis, si Verticaliter: Obliqua, si obliquè. Potestas autem eius Rotunda Iusta erit, cū figura rotanda axem attigerit: Maior Iustâ, si ab eodem remota fuerit; quod de reliquis quadrilateris itidem intelligendum.

Si itaque fuerit figura alterâ parte longior, cuius latus longius sit perpendiculare ad axem rotationis, & Horizontaliter rotetur, latus autem breuius cum axe coincidat, altero in proprio situ, fitque à centro grauitatis ducta recta perpendiculariter ad axem, quæ quidem dimidium erit lateris longioris, & erit Radius rotationis, quæ ducta in aream figuræ quantitatem rotatam, procreat Potestatem Rotundam ipsius figuræ, quæ Cylindrus est latus, cuius altitudo est latus breuius; latus autem longius est semidiameter circuli, qui basis est eiusdem Cylindri. Ver-

Verticalis Potestas duplo minor est, cùm rotationis Radius subduplus fuerit prioris, atque adeo Potestas etiam subdupla est, ex hac rotatione fit cylindrus altus, cuius axis est latus longius semidiameter baseos est latus breuius.

Quando altera parte longior figura habet latera in obliquo situ ad axem.

Si verò fuerit alterâ parte longior figura, ita vt eius latera obliquum situm obtineant ad eundem axem rotationis, latusque longius, atque adeò breuius datos angulos efficiat, cum, reperietur rotationis Radius, fiat autem vt Radius Potestatis Horizontalis iam inuentæ ad hunc Radium, ita prædicta Potestas Horizontalis ad aliud, & prouenict Potestas quæsita. Non dissimiliter procedendum cum Rhombo, Rhomboide &c.

Potestates multangulorũ laterum.

Potestates autem multangulorum laterum pariter parium, sectori, vel segmento circuli inscriptorum, componentur ad eum, qui sequitur, modum.

Prædictarum figurarum centra grauitatis inueniantur, & Potestas rectarum linearum æqualium segmento circuli inscriptarum reperiatur; secus autem de sectore.

Duplex modus cõponendi potestatem horum multangulorum.

Duplex autem est modus componendi Potestatem horum multangulorum. Primus ex centris grauitatis, Radijs, ac vijs rotationis triangulorum proprijs, ac singularibus: secundus ex communi vnicoque multanguli centro, & hic sanè facilior. In Compositione Potestatis Horizontalis, in qua peripheriæ chorda perpendicularis existit ad axem rotationis non est opus communi illo grauitatis centro, sed satis est constare id in recta illa, quæ ex medio subtensæ perpendiculariter ad eam in multangulo educitur, consistere; propterea quod ex huius puncto quouis recta ducta perpendiculariter ad axem æqualis est rotationis Radio: at pro Verticali, & Obliqua Potestate componenda opus est centro iam dicto. Potestas autem comparatur ductâ rotationis via in aream multanguli propositi.

Potestas Horizontalis multanguli semicirculo inscripti.

Sit componenda Potestas Horizontalis multanguli semicirculo inscripti octo æqualibus rectis diametro circulo contenti, & procedatur, vt diximus.

Sic etiam, & suo modo Potestas Verticalis componetur.

Potestates autem polygonorum regularium, componentur hoc modo.

Potestas polygonorum regularium.

Si componenda sit Potestas alicuius polygoni, iam ex supradictis constat quid agendum. Sit primo illud octogonum, cuius Potestas Rotunda, siue Horizontalis, siue Verticalis (est enim eadem) componenda sit; cognita autem diametro, cognoscetur, & latus, itemque perpendicularis à centro ad latus ipsum, eritque rotationis Radius: vnde cognoscetur via rotationis, quæ ducta in aream figuræ, dabit Potestatem eiusdem Horizontalem, seu Verticalem.

Potestas Rotunda cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

Potestas verò Rotunda cuiuscunque figuræ rectilineæ, componetur, vt sequitur.

Ad triangula, quadrilatera, ac multangulos, circulo, partibusque eius inscriptos, quod attinet, iam supra locuti sumus: vnde superest de varijs atque diuersis variorum rectilineorum speciebus aliquid insinuemus. Habito centro grauitatis propositi rectilinei inquirendus est radius rotationis, eiusque via; nam hæc ducta in aream rectilinei Rotundam Potestatem quæsitam componet. Hæ autem variæ erunt Potestates, ne dum propter varietatem rectilineorum, sed etiam propter variam eiusdem rectilinei ad axem rotationis applicationem.

Ad inquirendum Radium rotationis, præhabendum est grauitatis centrum, & si placet vnicum propositi rectilinei centrum, opus erit non rarò propositum rectilineum, in triangula, quadrangula resoluere; harum autem partium aream si non habeamus, arearum saltem rationem oportet cognoscere. Cùm igitur ad Potestatis compositionem areæ totius propositi rectilinei cognitio requiratur, eaque multoties haberi nequeat, nisi ex cognitione, & collectione arearum ipsorum triangulorum, & quadrangulorum, considerandum an expediat ex his particularum centris potius Potestates particulares, componere, easque in vnam summam colligere, an ex vnico totius figuræ centro, suam efficere Potestatem.

Potestas Circuli.

Potestas circuli comparabitur sic. Iusta Potestas circuli, fit ex ductu peripheriæ ipsius, quæ rotationis via est, in aream eiusdem circuli, strictusque Annulus procreatur. Iustâ verò Maior fit ex ductu peripheriæ illius circuli, cuius semidiameter est Radius rotationis; qui quidem Radium dati circuli tantum superat quanta est circuli eiusdem ab axe rotationis remotio, in eandem circuli aream, prouenitque Annulus absolutè dictus.

Potestas semicirculi.

Potestas semicirculi, segmentorum, sectorum, reliquarumque circuli partium, componetur, vt sequitur.

Semicirculi, reliquarumque circuli segmentorum Potestatum Rotundarum compositio non differt à reliquis, Ll Hori-

Horizontalis potestas Iusta.

Horizontalis autem Potestas Iusta, vbi videlicet diameter semicirculi, siue basis segmenti ad rotationis axem perpendicularis est, partem efficit Annuli stricti per sectionem plani paralleli ipsi Horizonti genitam, componitur ab area semicirculi, & segmenti maioris, quorum semidiameter, minoris verò basis dimidium, radio rotationis æquantur, ducta in vias proprias rotationis. Hìc autem aduerte, ad hoc haud opus esse grauitatis centro, sed satis, superque esse, vt constet, illud esse in recta, quæ perpendiculariter erigitur ex bissectionis puncto baseos ipsius segmenti.

Potestas Iusta Verticalis.

Ad Compositionem autem Potestatum Iustarum Verticalium quod attinet, quando scilicet basis segmenti, vel diameter semicirculi cum axe rotationis coincidit, aduertendum per rotationem segmenti minoris fieri corpus citrij, per semicirculi rotationem, sphæram perfectam, per circumactum segmenti maioris, nasci corpus mali. Radij autem rotationis sunt rectæ ductæ à centro grauitatis figurarum perpendiculariter ad axem: hinc cognita rotationis vi, eaque ducta in aream figuræ exhibet Potestatem Iustam Verticalem; ita etiam suo modo fiunt Potestates Obliquæ eorundem segmentorum, fiunt etiam Potestates Rotundæ sectorum circuli &c.

Potestates Lunularum.

Potestates autem Lunularum, Arcuatarumque figurarũ, Securicularum, & Coronarum, fiunt ad eum modum, qui facilè ex hactenus dictis colligitur.

Potestas Rotũda Ellipseos

Potestas Rotunda Ellipseos componitur sic; & quidem Potestas Iusta Horizontalis, quando scilicet axis longior Horizonti congruit, vel ad axem rotationis est rectus constituit Annulum Ellipticum strictum, & latum. At verò Potestas Verticalis est Annulus Ellipticus strictus,& altus; at Potestates ab Ellipsibus descriptæ cuius axes ad rotationis axem sunt obliqui, vocantur etiam Annuli stricti Elliptici, sed Obliqui.

In Potestatis Iustæ Horizontalis compositione rotationis Radius est semiaxis maior, vnde innotescit rotationis via, quæ quidem in aeram Ellipseos ducta, Potestatem Iustam Horizontalem procreat.

At huius Potestatis medietas Potestas est Verticalis Iusta cum rotationis Radij in ea sint ratione.

Potestas Obliqua.

Potestas autem Obliqua similiter colligitur ex ratione Radiorum rotationis.

Potestates Iustis maiores.

Potestates autem Iustis Maiores sunt Annuli quidem Elliptici, & Horizontalis Potestas latum constituit Annulum.

Potestates Rotundæ semiellipseos &c.

Potestates autem Rotundæ semiellipseos reliquarumque partium Ellipticarum, hac arte perficiuntur.

Diuiditur Ellipsis in diuersas partes eodem omninò modo quo circulus, quæ etiam iisdem nominibus appellari poterunt, ac propterea dabitur semiellipsis, segmenta minora, & maiora, sectores ad centrum, & ad peripheriam, frusta &c. Datis autem centro, & diametro Ellipseos dabuntur etiam prædictarum partium grauitatis centra, atque areæ; quamobrem Potestates illarum componentur non aliter, quàm Potestates partium circuli, sic comparabitur Potestas Iusta Horizontalis, semiellipseos, quæ est semiannulus ellipticus strictus, vel latus, vel altus, prout Ellipsis per axem, vel Maiorem, vel Minorem secta est, nam rotationis est semiaxis maior, & semiaxis minor pro alta &c.

Potestas Iusta Verticalis æquatur sphæroidi.

Potestas autem Iusta Verticalis æquatur Sphæroidi. Rotationis Radius idem est qui semiellipseos circa maiorem, vel minorem axem descriptæ, prout Potestas alta, vel lata facienda sit.

Horizontales, & Obliquæ Potestates Iusta maioresq; Iustis quomodo fiant.

Horizontales etiam, & Obliquæ Potestates Iustæ, sicut & maiores Iustis, quomodo fiant, quemadmodum & multa alia ad hoc spectantia facilè quidem ex dictis intelligitur.

Potestas etiam Rotunda Paraboles componitur.

Potestas Rotũda paraboles Horizontalis, Verticalis, & Obliqua.

Integræ autem Paraboles Rotunda Potestas Horizontalis fit, quando basis ipsius ad rotationis axem perpendicularis est. Verticalis quando basis cum axe coincidit, vel ei parallela est. At verò Obliqua, si ad axem basis Obliqua fuerit.

Horizontalis Iusta quomodo dici cõsueuit.

Horizontalis Iusta dici consueuit Annulus, vel semiannulus strictus parabolicus. Verticalis Iusta refert Citrium parabolicum. Sed & multa alia ad hoc spectantia ex dictis colligi possunt.

Generalis Regula Resolutionis Potestatũ.

Hucusque summatim attulimus in huius Methodi gratiam, quæ pertinent ad Potestatum synthesin: nunc innuam, quæ faciunt ad Analysin, pro qua ea Generalis Regula traditur;

Potestas

Poteſtas data applicetur parti componenti datæ, & quantitas quæ inde oritur, partem alteram componentem manifeſtabit.

Quoniam autem quantitates componentes ſunt quantitas rotata, & via rotationis, propterea alterutrà datà, altera per applicationem Poteſtatis ad illam non ignorabitur: Vnde ex rotationis Radio, rotationis via prodibit, & contra.

Via rotationis ex Radio, & Radius ex illa innoteſcit per proportionem ſemidiametri ad peripheriam. Radius porrò centrum grauitatis quantitatis rotatæ, vel in puncto, vel in linea determinat, & quidem iuxta ſpeciem Poteſtatis, ſiue ea fuerit Iuſta, vel Iuſtà Maior, quæ ex figura ipſa datæ Poteſtatis deprehendetur. Nam ſi figuræ pars aliqua, aut linea, aut punctum rotationis axem attigerit, Poteſtas propoſita Iuſta eſt. Quod ſi axis nullo modo attingatur, & tamen ab ipſa Poteſtate ambiatur, ea erit Iuſtà maior. Iuſtis minores non minus in Reſolutione, quàm in Compoſitione negligantur.

Quando Poteſtas Iuſta fuerit.

Poteſtas Iuſta maior.

Poteſtates Iuſtis minores negliguntur.

Poteſtates autem Rotundæ a lineis rectis deſcriptæ reſoluuntur ſic. Poteſtas Rotunda à linea recta deſcripta cùm ſit ſuperficies, vel circularis, vel Conica, vel Cylindrica, eaque vel Horizontalis, vel Obliqua, vel Verticalis, & quidem vel Iuſta, vel Iuſtà maior; hæc autem omnia ex ipſa data Poteſtatis figura, vel nomine cognoſcentur.

Poteſtates Rotundæ à lineis rectis quomodo reſoluãtur.

Sit itaque primò tanquam Poteſtas oblatum planum circuli; ſtatim autem pronunciandum eſt, hanc eſſe Poteſtatem Rotundam ſecundi gradus à linea recta creatam, Iuſtam Horizontalem. Datà igitur circuli quantitate, itemque lineà rotatà vnde Poteſtas procreata eſt, per hanc ipſam lineam ibi datur Poteſtas, & prodibit rotationis via, hoc eſt peripheria, ex qua innoteſcet Radius rotationis determinans in linea data ex centro circuli, centrum grauitatis ipſius lineæ rotatæ.

Quòd ſi loco lineæ rotatæ data ſit via rotationis, ad hanc applicatà Poteſtate, proueniet quantitas lineæ rotatæ.

Nec diſſimiliter ſi eiuſdem lineæ detur Poteſtas, quæ ſit ſuperficies Coni Iſoſcelis, ex quo intelligimus Poteſtatem eſſe Iuſtam Obliquam, hac applicata ad lineam rotatam, prodibit rotationis via, cuius radius indicat remotionem centri grauitatis lineæ rectæ, quæ conicam ſuperficiem deſcripſit ab axe rotationis, quæ duplicata dat quantitatem conicæ baſeos. At verò angulus, quem axis coni cum eiuſdem latere conſtituit, eſt inclinatio lineæ rotatæ ad axem rotationis; Cùm autem loco quantitatis lineæ rotatæ, vnà cum Poteſtate data fuerit via rotationis, Poteſtas ad hanc viam applicata, dabit quantitatem lineæ rotatæ.

Poteſtates Iuſtis maiores ſunt ſuperficies circulares, coronæ nuncupatæ, conicæ verò ſunt coni imperfecti, & ſuo modo reſoluuntur.

Poteſtates Iuſtis maiores.

Vnde ſi data ſit Poteſtas reſoluenda, quæ ſit ſuperficies fruſti conici, & vnà cum ipſa data ſit recta linea rotata, ſi per hanc diuidatur Poteſtas, via rotationis eiuſque radius comparabitur. Inclinatio autem lineæ rotatæ ad axem prodibit, ſi quadratum altitudinis fruſti ſubtrahatur ex quadrato lateris; remanebit enim quadratum baſeos trianguli rectanguli, cuius hypotenuſa eſt prædictum latus, & cathetus altitudo fruſti, ex quibus colligetur inclinatio quæſita.

Sic etiam ſi propoſita ſit reſoluenda Poteſtas à pluribus, quàm vna recta deſcripta, quemadmodum eſt ſuperficies Rhombi ſolidi deſcripta à binis rectis, vnà cum quantitate earundem ſimul ſumptarum; ad hanc enim applicata Poteſtate, proueniet rotationis via, eiuſque radius: vnde conſtabit remotio centri grauitatis ipſarum linearum ab axe.

Poteſtas à pluribus quàm vna recta est.

Idem iudicium ferendum de reliquis Poteſtatibus deſcriptis à pluribus rectis.

Poteſtates à lineis curuis, mixtiſque deſcriptæ, ſuam habent reſolutionem: vnde ſi detur ſphærica ſuperficies, Poteſtas quidem Verticalis peripheriæ ſemicirculi Iuſta data ſit, ſitque data via rotationis, ad quam ſi applicetur Poteſtas proueniet ſemiperipheria circuli maximi in ſphæra, ex cuius rotatione ſphærica ſuperficies compoſita fuit; & contra ſi loco viæ rotationis data fuiſſet quantitas ſemiperipheriæ rotatæ, ad hanc applicatà Poteſtate, prodiſſet rotationis via. Reſolutio etiam Poteſtatum à planis rectilineis factarum inſtituitur. Si igitur detur Poteſtas aliqua reſoluenda ſimul dari debet vel via rotationis, vel planum rotatum, alterutro autem dato, per vnicam diuiſionem alterum innoteſcit.

Nec dissimili artificio Potestates Rotundæ, à planis curuilineis ortæ, resoluuntur: vt sit proposita sphæra, tanquàm Potestas Rotunda, resoluenda descripta à plano semicirculi; sitque data simul etiam area semicirculi; per hanc enim diuisâ Potestate, via rotationis prodibit &c.

Potestas Rotunda in directam trãsmutatur. Potestas autem Rotunda transmutatur in Directam; si namque Potestas Rotunda data fuerit in numeris, & ea quidem superficies extiterit, extrahatur radix eius quadrata; si corpus extrahatur cubica; quod si præcisè fieri non poterit, fiat per approximationem. Vel

Potestas illa applicetur ad certum quendam numerum, prodibit alter, & ambo erunt latera rectanguli æqualis propositæ Potestati, quando hæc fuerit superficies. Quòd si fuerit corpus, prodibit superficies expressa numeris, quæ ducta in numerum diuidentem faciet parallelepidedum æquale solidæ Potestati. Sed huiusmodi applicationes etiam Geometricè fieri possunt.

Hæc autem summatim fuerunt à nobis exhibita, in gratiam huius Methodi, quam certè ob oculos ponere non licebat, his neglectis. Qui verò cupit hæc eadem cumulatè tractata inspicere, adeat huius Methodi Auctorem Guldinum.

Superest, vt pauca quædam exempla nos afferamus in medium, quibus videlicet, hæc ipsa Methodus illustretur.

Sed vt Methodum hanc, quatenus centro grauitatis vtitur, magis explicemus, iuuabit Theoremata quædam in exemplum afferre, & quidem è numero eorum, quibus etiam nostrâ peculiari Methodo satisfacimus; inde siquidem Lector facilè intelliget, vtra earum sit plausibilior, vel saltem quid inter vtramque interesse videatur.

THEOREMA.

Exemplum LXXVII.

Circuli inter se sunt, vt à semidiametris, diametris, &c. semicircumferentijs, circumferentijs, &c. quadrata.

Potestas Rotunda horizontalis Iusta, quam recta linea efformat, sic comparatur. Extremo lineæ datæ Horizontaliter positæ immoto, ac stabili, dum linea reuoluitur puncto, in quo ipsa bifariam diuiditur, quodque eius est grauitatis centrum, peripheriam describit, quæ rotationis via dicitur, cuius Radius est dimidium ipsius lineæ; ducta autem rotationis via in lineam rotatam, comparatur Potestas Iusta Horizontalis Rotunda, quæ est circuli planum, cuius semidiameter est linea rotata; ergo circulus æqualis est rectangulo sub semidiametro, & rotationis via, hoc est semiperipheria ipsius circuli (est enim via rotationis peripheria circuli descripti semidiametro, quæ dimidium est peripheriæ circuli, de quo instituitur comparatio; vtq; semidiameter ad semidiametrum, ita peripheria ad peripheriam;) ergo circulus ad circulum est, vt rectangulum ad rectangulum, sed rectangulorum ratio componitur ex rationibus laterum, ergo circulorum ratio componitur ex rationibus laterum rectangulorum; sed ratio laterum est eadem, cum vt semidiameter ad semidiametrum, ita sit semiperipheria ad semiperipheriam; atq; adeò rectangulorum ratio est ratio duplicata laterum; & quæ est ratio rectangulorum, eadem est circulorum; ergo circulorum ratio est duplicata laterum, seu vt quadrata laterum; ergo vt quadratum semidiametri vnius circuli ad quadratum semidiametri alterius circuli; vel vt quadratum semiperipheriæ ad quadratum semiperipheriæ; atque adeò vt quadratum diametri ad quadratum diametri; vel vt quadratum integræ peripheriæ ad quadratum integræ peripheriæ, ita circulus ad circulum. &c.

THEOREMA.

Exemplum LXXVIII.

Cylindri recti curua superficies ad basin est, vt latus eiusdem Cylindri, ad quartam partem diametri eiusdem baseos.

Ratio enim superficierum, quarum vna est curua Cylindri recti, altera est basis, componitur [a] ex ratione lateris ipsius cylindri, ad semidiametrum baseos, & ex ratione eiusdem semidiametri, ad dimidium semidiametri, seu ad quartam partem diametri, ergo superfi-

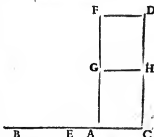
a Ex Corol. tertio.

perficies cylindri curua ad basin, est [b] vt altitudo Cylindri, ad quartam partem diametri baseos. b Ex Corol. quarto.

THEOREMA.

Exemplum LXXIX.

Omnis Cylindri recti superficies sine basibus, aequalis est circulo, cuius ea, quae ex centro, media proportionalis est inter latus, & diametrum baseos eiusdem Cylindri.



Sit recta FA, quae circa axem DC rotetur, mediante radio GH recta, quae est ad rectos angulos ipsi DC, bissecans FA in puncto G, vbi centrum est grauitatis ipsius FA, quae per hanc rotationem cylindricam superficiem describat. Reperiatur inter FA, & duplam AC, (est autem AC semidiameter baseos ipsius cylindri) reperiatur, inquã, inter FA, & duplam AC, diametrum baseos ipsius cylindri, media proportionalis BC, quae, si bissecetur in E, ibi huiusmodi lineae erit grauitatis centrum. Ostendendum est cylindricam superficiem aequalem esse superficiei circuli descripti, à semidiametro BC, cuius rotationis Radius est recta EC, circa eundem axem DC. Quoniam igitur superficies cylindrica aequalis est rectangulo sub recta FA, latere cylindri, & via rotationis, seu peripheria circuli, cuius semidiameter GH, siue AC, quae illi est aequalis. At verò circuli, cuius semidiameter BC, superficies, aequalis est rectangulo sub recta BC, & via rotationis, siue peripheria, cuius radius EC; vt autem peripheria ad peripheriam, ita est diameter ad diametrum; propterea, acceptis diametris loco ipsarum peripheriarum, nimirùm dupla AC, & dupla EC, quae est ipsa BC,

Erit, vt rectangulum sub FA, & via rotationis, cuius semidiameter AC, ad rectangulum sub BC, & via rotationis, cuius radius EC, ita rectangulum sub FA, & dupla AC, quae est diameter, loco viae rotationis, atque peripheriae, ad rectangulum sub BC, & dupla EC, quae est BC, diameter, loco vię rotationis, atque peripherię. Sed cylindrica superficies erat ęqualis rectangulo sub FA, & via rotationis, cuius radius AC, & circulus, cuius semidiameter BC erat aequalis rectangulo sub BC, & via rotationis, cuius radius EC; ergo vt rectangulum sub FA, & dupla AC, ad quadratum BC, ita cylindrica superficies ad circulum, cuius semidiameter BC; sed rectangulum sub FA, & dupla AC, aequale est quadrato BC; ergo cylindrica superficies aequabitur circulo, cuius semidiameter BC.

THEOREMA.

Exemplum LXXX.

Cuiuscunque coni Isoscelis superficies ad basin, eam habet rationem, quam latus Coni ad Radium circuli, qui basis est coni.

Quoniam conica superficies nascitur ex latere coni in viam rotationis, hoc est in peripheriam, cuius Radius est dimidium Radij baseos ipsius coni: at verò circulus, qui est basis coni, nascitur ex ductu eiusdem peripheriae, quae erat dicta via rotationis, in semidiametrum eiusdem baseos; ergo superficies conica, ad superficiem circuli, qui est basis ipsius coni, est, vt latus coni, ad Radium circuli, qui basis est coni; ex prima Sexti Elementorum.

THEOREMA.

Exemplum LXXXI.

Cuiuscunque sphaerae superficies quadrupla est maximi circuli eorum, qui sunt in ipsa.

Quoniam enim est, vt medietas viae rotationis, siue semiperipheria minor, ad semiperipheriam maiorem, nimirùm circuli maximi ipsius sphaerae, ita Radius illius ad Radium istius; sed vt Radius ad Radium, ita semisubtensa semicirculi maximi, hoc est Radius ipsius ad

arcum

arcum quadrantis, seu ad quartam partem ipsius peripheriæ maximi circuli; ergo etiam vt medietas viæ rotationis ad semiperipheriam circuli maximi, ita Radius ipsius ad quartam partem peripheriæ eiusdem; ergo rectangulum sub extremis, hoc est sub semisse viæ rotationis, & quarta parte maioris peripheriæ, æquatur rectangulo sub medijs, nempè sub semiperipheria circuli maximi, & Radio eiusdem; sed rectangulum illud æquatur quartæ parti superficiei sphæricæ, nam tota superficies sphæræ producitur ex tota via rotationis in semiperipheriam maximam; rectangulum autem hoc nempe sub semiperipheria circuli maximi, & Radio eiusdem æquatur circulo maximo eiusdem sphæræ; ergo tota sphærica superficies æquatur quadruplo circulo maximo eiusdem sphæræ.

THEOREMA.

Exemplum XXXXIII.

Omnis sphæra quadrupla est coni, basin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum, qui in sphæra, altitudinem verò Radium sphæræ.

Intelligatur dimidium circuli maximi ipsius sphæræ, eique inscriptum triangulum rectangulum, angulum habens rectum ad centrum circuli, basis semidiameter ipsius circuli, quæ scilicet tendit à centro bissecans semiperipheriam, perpendiculum verò altera semidiameter, atque adeo in hoc triangulo hypotenusa sit recta subtendens quadrantem totius peripheriæ. Manifestum est ex rotatione semicirculi, circa diametrum, veluti, circa axem sphæram procreari; ex rotatione verò trianguli fieri conum cuius basis circulus maximus ipsius sphæræ, altitudo verò semidiameter eiusdem. Ostendendum est sphæram esse quadruplam huiusmodi coni. Intelligatur factum aliud triangulum simile, & æquale iam dicto, ita vt ex vtroque coalescat semiquadratum inscriptum semicirculo. Quoniam igitur est semicirculus ad semiquadratum, vt semicircumferentia ad diametrum (circulus enim ad quadratum sibi inscriptum est vt semiperipheria ad diametrum, cùm latus quadrati inscripti sit medio loco proportionale inter diametrum, & semidiametrum: atque adeò sit æquale rectangulo sub diametro, & semidiametro; sed semiperipheria ducta in eundem radium æquatur circulo; ergo vt semiperipheria ad diametrum, ita circulus ad quadratum sibi inscriptum: atque adeo ita semicirculus ad semiquadratum). At verò sphæra componitur ex rotatione semicirculi, hoc est ex ductu areæ semicirculi in quatuor tertias partes diametri; duplus verò conus, hoc est Rhombus, quem rotatio semiquadrati circa axem eundem describit, componitur ex ductu areæ eiusdem semiquadrati in tertiam partem peripheriæ; siquidem rotationis Radius est tertia pars semidiametri, atque adeo via rotationis est tertia pars peripheriæ maximi circuli. Ergo sphæra ad duplum conum est, vt productũ ex semicirculo in quatuor tertias partes diametri, ad productũ ex semiquadrato in tertiam partem periphæriæ. Sed vt semicirculus ad semiquadratum, ita erat semicircumferentia ad diametrum; ergo productum ex semicircumferentia in quatuor tertias partes diametri, ad productum ex diametro in tertiam partem circumferentiæ, erit, vt productum ex semicirculo in quatuor tertias partes diametri, ad productum, ex semiquadrato in tertiam partem circumferentiæ, sed in hac rectangulorum ratione erat sphæra ad duplum conum; ergo sphæra ad duplum conum erit vt productum ex semicircumferentia in quatuor tertias partes diametri ad productum ex diametro in tertiam partem circumferentiæ, seu ad productum ex tertia parte diametri in integram circumferentiam, seu ad productum ex duabus tertijs partibus diametri in semicircumferentiam; sed productum ex semicircumferentia in quatuor tertias diametri partes est duplum producti ex duabus tertijs partibus diametri in eandem semicircumferentiam; ergo sphæra ad duplum conum est in ratione dupla; ergo sphæra ad simplum conum est in ratione quadrupla.

De Methodo Progressionibus innixa.

Mirabilis vsus vtriusque Progressionis.

SAtis quidem liquet Progressionem esse duplicem, quarum vna Arithmetica, altera autem Geometrica est. In illa termini perpetuò se æqualiter excedunt, in hac proportionaliter se habent. Mirabilis est vtriusque vsus ad Geometricas veritates indagandas.

Ad Arithmeticam Progressionem quod attinet, si rectè nos attendamus comperiemus

per

per illam, quamplurima Theoremata demonstrari posse, quibus tamen profitemur Geometricè magis peculiari nostra Methodo satisfieri.

Sunt autem Theoremata quædam velut huius Methodi cardines, vt.

Propositio.

Series quantitatum Arithmeticè proportionalium (siue iuxta seriem numerorum quadraticorum) continuo crescentium, à, o, vel puncto inchoatarum numero, vel finitarum, vel infinitarum est ad seriem totidem maxima æqualium in ratione subdupla.

In hac quinque spectanda sunt. Minor terminus; Maior Progressionis excessus; Terminorum multitudo; & eorundem Aggregatum, de quibus alibi.

Idque sic ostendunt, Esto primus terminus Progressionis Arithmeticæ o, secundus 1, vltimus l, terminorum multitudo erit $l + 1$, cuius dimidium ductum in l, dabit summam ipsius Progressionis, nempe $\frac{l+1}{2} l$.

Vel supposito terminorum numero, a, quantuscunque sit terminus secundus, summa seriei erit $\frac{1}{2} a l$. Hinc *Experire in numeris, idque luculentius conspicies.*

THEOREMA. *Exemplum LXXXIV.*

Triangulum ad parallelogrammum eiusdem baseos, ac altitudinis est in ratione subdupla.

Triangulum enim constat ex rectis potentia quidem infinitis parallelis Arithmeticè proportionalibus a puncto vel o inchoatis, quarum maxima est basis; parallelogrammum vero ex totidem basi æqualibus. Item

THEOREMA. *Exemplum LXXXV.*

Pyramidoides, vel Conoides parabolicum eiusdem baseos, ac altitudinis, siue erectum, siue inclinatum est in ratione subdupla.

Pyramidoides enim vel Conoides parabolicum constat ex planis potentia quidem infinitis Arithmeticè proportionalibus, à puncto inchoatis, quorum maximum est basis, Prisma verò, vel Cylindrus, ex totidem basi æqualibus.

Et alia multa sequuntur.

Propositio.

Series infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium (siue iuxta seriem numerorum quadraticorum) continuè crescentium à, puncto, vel o inchoatarum; ad seriem totidem maxima æqualium rationem subtriplam superat, estq; excessus ea ratio quam habet vnitas ad sextuplum numeri terminorum post o, siue quam habet radix quadratica termini primi post o, ad sextuplum radicis quadratæ termini maximi.

Vt si terminus post o, primus ponatur 1, vltimus autem l, erit $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6l} l^2$. Summa. Vel (posito numero terminorum a: vltimiq; latere l.) $\frac{a}{3} l^2 + \frac{a}{6a-6} l^2$. Cum autem numero terminorum excrescente, excessus ille supra rationem subtriplam, ita continuò minuatur, vt tandem quolibet assignabili minor euadat, si in infinitum procedatur, intelligitur euaniturus; quare. *Experire in numeris, idque luculentius conspicies.*

Propositio.

Series potentia infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium, (siue iuxta seriem numerorum quadraticorum) continuè crescentium à puncto, siue o; inchoatarum; est ad seriem totidem maxima æqualium, in ratione subtripla.

Hinc

Hinc porrò multa colliguntur, nempe,

THEOREMA.

Exemplum LXXXVI.

Conus, vel Pyramis, ad Cylindrum, vel Prisma eiusdem baseos ac altitudinis est in ratione subtripla.

Conus enim, & Pyramis constant ex similibus, & parallelis planis potentia quidem infinitis in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium constitutis, quorum minimum est punctum, maximum verò basis. Cylindrus autem, vel Prisma ex totidem maximo æqualibus. Item

THEOREMA.

Exemplum LXXXVII.

Complementum Semiparaboles, spatium scilicet, quo Semiparabole complet parallelogrammum est ad parallelogrammum in ratione subtripla. Hinc

THEOREMA.

Exemplum LXXXVIII.

Semiparabole ad prædictum parallelogrammum est in ratione subsesquialtera.

Sunt enim diametri segmenta in duplicata ratione semiordinatim applicatarum sibi respondentium, vnde rectæ omnes ductæ parallelæ diametro in complemento iam dicto sunt in duplicata ratione partium sumptarum in recta tangente paraboles verticem Arithmeticè proportionalium, quibus nempè respondent semiordinatim applicatæ. Series igitur rectarum in complemento ad seriem maximæ æqualium in parallelogrammo, ex præmisso Theoremate erit in ratione subtripla; ergo, & complementum ad parallelogrammum erit in ratione subtripla. Atq; adeo semiparabole est ad idem parallelogrammum in ratione subsesquialtera. Hinc & multa alia etiam colliguntur.

Adi Vallis Arith. Infinitorum.

SCHOLION.

Aduertenda quædam.

Aduertendum est autem in Progressionibus commemoratis, quando scilicet fit series quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium, immò & in triplicata &c. propositiones non verificari de multitudine determinata, hoc est de terminis acceptis secundùm determinatam multitudinem, sed oportet in infinitum abire. Vnde si exempli gratia, sumantur decem termini Arithmeticè proportionales inchoantes à, o, sumantur, & eorum quadrata; horum series non est subtripla seriei æqualium maximo termino. Secus autem euenit si comparetur series ipsorum terminorum Arithmeticè proportionalium inchoantium à, o, eaque comparetur cum serie maximo æqualium; præcisè siquidem huius illa subdupla est, accepta etiam secundum quamcunque determinatam multitudinem. Series igitur quadratorum spectari potest, vel prout abitura in infinitum, vel prout abijt: priori modo non est subtripla terminorum maximo æqualium, sed maiorem rationem habet; prout autem abijt in infinitum, subtriplam rationem obtinet; hunc enim in modum excessus continuò decrescentes in infinitum, euanuerunt. Hoc animaduertisse iuuat, quod in consimilibus frequenter accidit, idque etiam in Progressionibus Geometricis, infra constabit.

Ita quoque notare licet in comparatione facta inter omnia quadrata alicuius lineæ, & quadrata totidem partium eiusdem, quadrata siquidem omnium partium cuiuscunque rectæ subtripla sunt totidem quadratorum totius; sunt enim in ratione Coni ad Cylindrum, quod tamen intelligendum secundùm processum in infinitum. Vt si rectæ cuiusdam decem partes acceperis, initio semper facto ab extremo vno ipsius, adeo vt semper minores in maioribus includantur vtcunq; non propterea decē illarū partiū quadrata simul sumpta erunt in ratione subtripla, ad totidem quadrata totius simul accepta. Sunt enim illæ partes Arithmeticè

thmeticè proportionales, perpetuò se excedentis æqualibus excessibus; quamobrem est series infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium continuè crescentium, à puncto, seu o, exordientium, hoc est quadratorum partium prædictarum, atque adeo erit ad seriem totidem maxima æqualium, hoc est ad totidem quadrata totius in ratione subtripla.

Si quis autem contentus aliunde cognouisse, conum esse subtriplum cylindri eiusdem baseos, ac altitudinis, Theorema propositum Geometricè demonstrabit: vnde & alia plurima innotescent; duplatis enim partibus fient diametri circulorum coni, totaque linea itidem duplata fient diametri circulorum cylindri eiusdem baseos, ac altitudinis cum cono. At si per Theorema istud, illud itidem demonstrare velit, aliunde hoc oportebit ostendere, vt paulò antea insinuauimus, quod in secundo libro cumulatius tractabimus.

Hæc autem admirationem ingerunt, nam si nos intelligamus conum, & cylindrum eiusdem baseos, ac altitudinis, determinatamque multitudinem planorum, basi parallelorum secantium tam cylindrum, quam conum; communes quidem planorum, tam cum cylindro, quàm cum cono sectiones erunt circuli, nullus tamen præter vnum circulorum cylindri poterit esse triplus circuli sibi respondentis in cono, adhuc tamen omnes circuli cylindri tripli erunt omnium circulorum in cono eiusdem baseos, ac altitudinis. In his igitur vides abeundum esse in infinitum. *Admiranda quædam.*

Propositio.

Series quantitatum in triplicata ratione Arithmeticè proportionalium, siue iuxtà seriem numerorum cubicorum continuè crescentium, à puncto, vel o, inchoatarum, est ad seriem totidem maxima æqualium est in ratione, qua subquadruplam superat, & huiusmodi rationis excessus est ratio, quam habet vnitas ad quadruplum numeri terminorum post o, siue quam habet cubica radix termini primi post o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Vt $\frac{1+\cdot}{4} l^{1} + \frac{1+\cdot}{4l} l^{1}$ Vel $\frac{n}{4} l^{3} + \frac{n}{4l} l^{3} = \frac{b^{1}}{6}$ [illegible].

Cum verò crescente numero terminorum excessus ille supra rationem subquadruplam, ita continuò decrescit, vt tandem quolibet assignabili, fit minor propterea si in infinitum procedatur, omninò euanescet; quare, *Exemplum LXXXIX.*

THEOREMA.

Series infinita quantitatum in triplicata ratione Arithmeticè proportionalium, siue iuxtà seriem numerorum cubicorum continuè crescentium, à puncto, seu o, inchoatarum, est ad seriem totidem maximè æqualium in ratione subquadrupla.

Hinc,

THEOREMA. *Exemplum LXXXX.*

Complementum semiparaboles cubicæ ad suum parallelogrammum est in ratione subquadrupla, ac propterea, & ipsa semiparabole est in ratione subsesquitertia.

Hinc & multa alia colliguntur.

Quo autem pacto sit indaganda ratio, quam habet series ad seriem, de quibus supra, in Secundo Libro explicabimus.

Hic autem non prætereo quod vlterius perspicuum fiet nimirum plurima beneficio Progressionis Arithmeticæ demonstrata facilius ostendi, & magis fortasse Geometricè per decrescentiam excessus, atque defectus; vnde hæc magna ex parte ad peculiarem nostram Methodum reuocantur. *Adnotanda quædam.*

Ad Geometricam Progressionem quod attinet, illud dicendum occurrit, quòd huic etiam, Methodus inniti potest; obseruata siquidem ipsa Progressione, multoties innotescit ratio quæsita: vnde qui adnotarunt, paraboIen aggregatum esse quoddam infinitarum numero magnitudinum in proportione quadrupla, quarum prima est triangulum eiusdem baseos ac altitudinis cum illa; secunda est aggregatum ex duobus triangulis descriptis in duobus segmentis eiusdem paraboles, & ita deinceps; parabolen autem esse aggregatum omnium terminorum, adnotarunt simul, primam illam magnitudinem, seu primum ter- *De Geometrica Progressione disseritur.*

Mm minum,

minum, nempè triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis cum parabola, medio loco proportionalem esse inter primam differentiam, & ipsam parabolen; quare si primus terminus valet quatuor, secundus terminus valebit vnum; prima igitur differentia valebit tria: quare aggregatum omnium, vt parabole ad primum terminum, scilicet ad triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis, ita hoc ipsum triangulum, quod valebat quatuor, ad primam differentiam, quæ valebat tria. Ex Progressionis Geometricæ siquidem natura primus terminus est medio loco proportionalis inter primam differentiam, & aggregatum terminorum omnium: Vnde parabole sesquitertia est ipsius trianguli.

Vsus Geometrica Progressionis. Quemadmodum igitur vsus Arithmeticæ Progressionis in eo consistit, vt attendamus num in ijs, de quibus agimus huiusmodi Progressio locum habeat, nam ipsius Progressionis symptomata nobis suppeditant quid in re proposita dicendum, pro affectionibus demonstrandis; non dissimiliter de Progressione Geometrica sentiendum; huius enim vsus in eo positus erit, num locum obtineat in re subiecta, nam attendendo eiusdem Progressionis naturam, ac inde consequentia, facilè deprehendemus oblati Theorematis resolutionem. Cæterùm huiusmodi Progressio, quam in infinitum concipimus, quantitati discretæ, & continuæ communis est, ac in continua tripartito continget, iuxtà triplex quantitatis genus, nempè lineam, superficiem, & corpus; in Superficiebus autem, & corporibus attendi figurarum similitudo potest, iuxta quam Progressio ipsa præclara quidem habet symptomata, quorum beneficio multa innotescent in ijs, in quibus Progressio ipsa locum obtinuerit.

Illud etiam addendum, scilicet huiusmodi Progressionem, quamuis tendentem in infinitum, terminari adhuc, neque mirum, quoniam illa tendentia est secundùm partes perpetuo minores; terminatur autem per modum vnius. Ita profectò Progressio illa triangulorum in parabole in ratione quadrupla, terminatur in parabolen; sic de multis, multisque alijs Progressionibus planorum præsertim similium, itemque solidorum.

Nec prætereundum, quod superius innuimus Progressionem ipsam accipiendam esse, vt iam abijt in infinitum.

DE AVCTORIS METHODO PECVLIARI, AC PROPRIA

Per decrescentiam excessûs, atque defectûs in infinitum abeuntem Particularium omnium feracissima, velut illa, qua obscurioribus Theorematibus, facilè, ac expeditò fit satis, præsertim ijs, quæ cum Veteres, tum Recentiores laboriosè demonstrarunt.

ET quòd ferax admodum sit, & quòd valde facilis Methodus, de qua loquimur, magni fieri debet. Neminem tamen admiratio subeat, quòd hanc nobis vendicemus, quamuis ab aliquo alio fuerit non nihil insinuata; propterea quod nec illam generali ratione tractauit, nec firmis demonstrationibus stabiliuit. Vtrunque verò præstitisse nos arbitramur. Si igitur id admittendum, quod cæcinit Lyricus de Poeta loquens. *In Arte Poetica.*

Publica materies priuati iuris erit, si
Nec circa vilem, patulumque moraberis orbem,
Nec verbum verbo curabis reddere fidus
Interpres.

Multo magis nobis materiam hanc assumentibus, id eventurum dixeris.

Primum autem videtur operæ pretium in medium afferre demonstrationem, qua Vir non vulgaris eruditionis est vsus ad Methodum hanc stabiliendam, quam nos, priusquam libellum ipsius datum esset adire, eramus meditati; Postmodū cautiores facti existimauimus, in errorem nos incidisse, cùm autem eadem demonstratione illum vsum, aduerteremus; siquidem auctoritas ipsius apud nos plurimum habebat momenti, suspicari cæpimus nos non allucinatos fuisse in ipsa demonstratione contexenda, sed potius in decernendo, quòd ea minus foret idonea; iterum igitur cùm eandem ad trutinam reuocandam susciperemus, tandem dubitauimus, & nos, & illum fuisse deceptos, ac propterea Methodum hanc longè aliter demonstrationum robore firmandam.

Demon-

Demonstratio verò, quam ille typis commisit, se se habet, vt sequitur.

Datæ sint binæ quantitates A, & B, siue superficies, siue corpora; data sit item ratio quæcunque E ad F.

Si quantitatibus A, & B, aliæ atque aliæ magnitudines sine termino inscribi possint, quæ & eam semper inter se rationem seruent, quam E ad F, & quantitates ipsas A, B, exhauriant, hoc est ab ipsis deficiant defectu quantumuis paruo.

Z X E F
A B
M. N.

Erit quantitas A ad quantitatem B, vt E ad F.

Si non; erit ratio A ad B, maior, aut minor ratione E ad F. Sit primo maior.

Aliqua igitur quantitas Z, minor quàm A, erit ad B, vt E ad F. Inscribantur ipsis A, & B, magnitudines binæ M, N; M quidem ipsi A: N verò ipsi B, eâ lege vt M, minus deficiat ab A, quam Z, ac proinde sit maius quàm Z, & simul rationem talem habeat ad N, quam E ad F; hoc enim totum fieri poterit per hypothesin.

Quoniam igitur M maius est quàm Z, erit M ad B in maiori quàm Z ad B; at Z erat ad B, vt E ad F; ergo M est ad B in maiori quàm E ad F, hoc est, M est ad B, in maiori, quàm M ad N; ergo N magnitudo inscripta ipsi B, maior est quàm B, pars suo toto, quod fieri non potest; non igitur ratio A ad B, maior ratione E ad F.

Quare cum ratio A ad B, neque maior sit ratione E ad F, neque minor, æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

Idem lineis quadrat, si loco figuratum inscriptarum partes eadem lege auferantur.

Corollarium.

Si quantitatibus A, & B, aliæ magnitudines inscribi possint, quæ & semper æquales sint inter se, & quantitates ipsas A, B, exhauriant.

Erit quantitas A, æqualis quantitati B.

Patet ex Propositione: nam ratio E ad F isthic data fuit quæcunque, ac proindeetiam ratio æqualitatis.

Huius demonstrationis Auctor in eo peccasse videtur, & quod Theorema non secundùm generalem rationem condiderit; nihil enim refert quod quantitates sic se habeant, vt vna sit tanquam figura alteri inscripta &c., & quod in ipsa demonstratione ad pauca se restringens defecerit.

Antequam autem nobis datum esset adire huius Auctoris lucubrationes aliquomodo similem demonstrationẽ sequentem excogitauimus; re tamen diligentiùs introspecta, visa est nobis suspecta, vt paulò post dicemus. Postmodum disiectis tenebris veritas enituit.

Non dissimiliter nos ratiocinati eramus.

Sint quantitates A, B, totidem aliæ C, D, minores, quæ per incrementa semper ac semper minus deficiendo ab ipsis A, B, deficere tandem possint defectu minori quacunque data quantitate, perpetuo tamen seruantes eandem rationem, quæ est E ad F. Dico A, ad B, rationem habere, vt E ad F.

G
A B
C D E F

Si non est A, ad B, vt E ad F, habebit A ad B, maiorem, vel minorem rationem, quàm E ad F. Habeat primò maiorem rationem, & fiat vt E ad F, ita G ad B; ergo A maior erit quàm G. Vel ergo C maior est quàm G, vel non maior: sit primò maior. Quoniam igitur C maior est quàm G; ergo C ad B maiorem habebit rationem, quàm E ad F; sed vt E ad F, ita C ad D; ergo C ad B maiorem habebit rationem quàm ad D; ergo D maior erit quàm B, contra hypothesin; supponimus enim B maiorem esse quàm D.

Si verò non fuerit maior quàm G. Quoniam G minor est quam A intelligi poterit C maior quàm G, minor tamen quàm A, simulque rationem habere ad D, quæ est E ad F. Quoniam igitur C maior est quàm G, erit C ad B, in maiori ratione quàm G ad B; erat autem G ad B, vt E ad F; ergo C ad B erit in maiori ratione quàm E ad F, hoc est C ad B erit in maiori ratione quàm ad D; ergo D maior erit quàm B, contra hypothesin; non igitur A ad B maiorem habet rationem quàm E ad F.

Non dissimiliter si ratio A ad B, supponatur esse minor ratione E, ad F.

Hæc demonstratio, vel eo nomine suspecta visa est, vt modo innuimus, quoniam hypothesis vna destruere videtur alteram, quarũ vtraque sit ad demonstrandum. Supponit enim C ad D, esse vt E ad F, & in eadem ratione esse G ad B, facit ex constructione; supponit autem D minorem esse quàm B, quemadmodum C minorem quàm A: deinde C maiorem esse quàm G, hæc tamen suppositio destruit antecedentem, quæ deinde tamen in demonstratione adhibetur, at cùm semel destructa fuerit, nequit amplius vsurpari. Quòd autem hæc suppositio destruat antecedentem apparet. Si enim est, vt C ad D, ita G ad B, & C fuerit maior quàm G, non poterit D supponi minor quàm B, sed maior esse necessariò debet; *Circa superiorem demonstrationem difficultas.*

quamobrem demonstratio non deducit ad inconueniens; si enim fuerit, vt G ad B, ita C ad D, & C fuerit maior, quàm G, nullum erit incommodum, quòd D sit maior, quàm B; in tantum enim inconueniens foret, in quantum D supponeretur minor, quàm B, sed non supponitur amplius minor; quoniam tametsi ab initio ita supponeretur, supponendo tamen C maiorem, quàm G, itemque, vt G ad B, ita C ad D, necessariò consequitur, vt D sit maior, quàm B; quamobrem suppositio prior illa destruitur: vnde non licet illam amplius in ipsa demonstratione adhibere.

In secundo verò casu, quando scilicet C, non est maior, quàm G, intelligi quidem potest magnitudo adaucta, quæ minor sit, quàm A, maior tamen, quàm G, eaque appelletur pariter C: sed hæc intelligi non poterit esse ad aliam D, vt E ad F, nisi pariter D sit maior, quàm B, cùm supponamus esse, vt E ad F, ita G ad B: & vt G ad B, ita C ad D. Dum enim supponebamus D, minorem esse, quàm B: deinde volumus esse, vt E ad F, ita G ad B, & ita C ad D, supponendo C adauctam, quæ pariter nuncupetur C (nihil enim refert quocunque modo appelletur) eamque maiorem esse, quàm G; hæc secunda suppositio destruit antecedentem; non enim fieri poterit, vt sit C ad D, quemadmodum G ad B, & C sit maior, quàm G, at verò D sit minor, quàm B.

Quapropter hæc demonstratio non videbatur deducens ad inconueniēs. Si enim fuerit, vt G ad B, ita C ad D; at verò C sit maior, quàm G, nullum est inconueniens, quòd D sit maior, quàm B: immò necessariò debet esse maior; neque inconueniens est, quia D supponebatur minor, quàm B, quoniā hæc suppositio destructa est per subsequentē, quando enim intelleximus esse, vt E ad F, seu, vt G ad B, ita C ad D, & C maiorē esse, quàm G; nequit enim retineri prior suppositio, quæ erat, vt D, sit minor, quàm B. Quod si videatur inconueniens positum in eo, quòd si A maiorem habet rationem ad B, quàm E ad F, aliqua quantitas minor quàm A, puta G, erit ad B, vt E ad F: atque adeò licebit (& hoc erit inconueniens dicet aliquis) sumere quantitatem C maiorem, quàm G, & minorem, quàm A, & facere, vt E ad F, ita C ad D; atque adeò D maiorē esse, quàm B, contra hypothesin; siquidem supponebatur tàm C, quàm D minor, quàm sit A, & B. Sed hæc est imaginationis deceptio; non enim D, modò est amplius ex quantitatibus inscriptibilibus in infinitum ipsi B, sed potius ex eo, quia factum est, vt E ad F, seu vt G ad B, ita C ad D; factaque est C maior, quàm G, quantitas D est quædam noua quantitas extra infinitam multitudinem earum, quæ in infinitum supponebantur inscriptibiles ipsi B: vnde nullum inconueniens, quòd D maior sit, quàm B.

Diluitur difficultas. Sed ratio E, ad F, est omnium inscriptibilium ipsis A, B: At ex eo quod A ad B, supponit aduersarius maiorem, vel minorem, habere rationem, quam E ad F, sed & non ex noua quadam hypothesi, hæc omnia sequuntur, inter quæ quod D è numero inscriptibilium, sit maior, quàm B.

Obseruanda quadam. Vbi obseruandum, quando nos conteximus demonstrationem ducentem ad inconueniens, quatenus aliquid infert contra hypothesin, tunc destruitur quidem hypothesis per ipsum inconueniens, dummodo huiusmodi hypothesis semper retenta fuerit, atque hunc in modum licet demonstrare destruendo hypothesin; sed non licet illam destruere, & postmodum eam adhibere, veluti non destructam, & deducere ad inconueniens, quatenus quod infertur destruat illam, quæ amplius non est, vtpotè iam destructa per aliam suppositionem.

Supradictorū Epilogus. Itaque summa hæc est, quòd in demonstratione deducente ad inconueniens non hypothesis, sed falsum, quod in demonstrationis progressu offendimus, hypothesin destruit; propterea quòd vt superiùs, docuimus deductio ad impossibile, est assumptio eius, quod quæsito contradicit, tanquàm concessi per consequentia, ad id, quod vero concesso opponitur; in hac enim sumimus id, quod quæsito contradicit, idque supponentes progredimur, donec in aliquod incidamus absurdum, per quod suppositione destructa, confirmetur id, quod à principio quærebatur.

Quoniam hæc nostra Methodus præsertim locum obtinet in figuris circulo inscriptis, & circumscriptis, cuidam propterea videri posset hanc niti resolutioni figuræ, tàm inscriptæ, quàm circumscriptæ circulo in ipsum circulum. Hoc autem incautè si nos explicemus, pugnantia videremur admittere; propterea quod polygona circulo inscribi possunt, & circumscribi, ordinata quidem in infinitum, ita vt non sint tot quin plura. Cum hoc autem progressu in infinitum nequit cohærere desinentia, qua diceret quispiam, polygona ipsa tan-

tandem in circulum desinere. Nec illud est plausibile, quod tamen nonnullis arrisit, nimirum desinentiam esse in polygonum infinitorum laterum, cuiusmodi circulus esse videri posset; hoc enim haud minus repugnat, propterea quòd circulus id sibi vendicat, vt rectæ ductæ à centro ad singula peripheriæ puncta sint inter se æquales: polygonum autem siue constet angulis, & lateribus numero infinitis, siue finitis; hoc profectò habet, vt angulis, lateribusque constet; hoc enim sonat nomen illud polygonum. Si namque constat angulis, anguli continentur lateribus; ergo, & angulis, & lateribus constare debet; quæ quidem figura præcipuum illud habet, quod rectæ omnes à centro ductæ ad vertices singulorum angulorum, sint inter se æquales, & quæ perpendiculares ab eodem centro ad singula latera ducuntur, sint itidem inter se æquales (loquimur enim de polygonis ordinatis); at verò vnaquæque ducta à centro ad verticem anguli maior est eâ, quæ ducitur ab eodem centro perpendicularis ad latus; non itaque omnes illæ ductæ à centro ad polygoni ambitum, sunt inter se æquales; polygoni igitur ambitus esse non poterit circuli circumferentia. Non est itaque circulus polygonum infinitorum laterum.

Circulus non est polygonum infinitorum laterum.

Illud etiam accedit, quòd infinitum huiusmodi, multitudo scilicet angulorum, quibus polygonum constaret, foret in actu; hoc autem infiniti genus nunquam agnouit Natura.

Nostra igitur Methodus, vt robore constet, haud indiget huiusmodi desinentiâ, quasi circulus intrinsecus illius Progressionis in infinitum sit terminus, sed potius terminus quidam extrinsecus, vt polygona per sui incrementa, si fuerint inscripta, & per decrementa, si fuerint circumscripta, multiplicatis angulis, atque lateribus, differre possint semper à circulo minori, quacunque data quantitate.

Theoremata quædam Καθολικά, quibus Auctoris Methodus innititur.

THEOREMA I.

Si quotcunque fuerint quantitates, è quarum singulis partes in eadem ratione cum illis acceptæ sint. Dico has posse, per συνεχεῖς ἐπαυξήσεις, continuata incrementa, *semper ac semper ab illis minus deficiendo, tandem deficere defectu minori quacunque datâ quantitate, rationem eandem inter se perpetuò seruantes.*

Sint duæ quantitates AB, CD, quarum partes AE, CF, in eadem sint ratione cum illis. Dico AE, CF, augeri posse in infinitum eadem ratione retentâ, vt minus, ac minus ab ipsis AB, CD, deficiendo, tandem deficiant defectu minori quacunque datâ quantitate.

Disponantur AB, CD parallelæ; ducaque sit AC, eaque protracta sit ad partes C in infinitum; per E, F, ducta sit EF, quæ protracta ad partes F, occurrat ipsi AC productæ in G: occurret autem cùm CF fuerit minor, quàm AE; agatur GD, quæ producta ad partes D, necessariò transibit per B.

Quoniam igitur inter E, B, infinita cadunt puncta, sumatur H; & per H agatur HG, occurrens FD in I. Manifestum est AH, maiorem esse, quàm AE, atque adeò & CI, quàm CF, & tamen AH, & CI, in eadem esse ratione cum AE ad CF, vel AB ad CD: item AH, minus deficere ab AB, quàm AE; & CI minus deficere ab ipsa CD, quàm CF.

Rursus quoniam inter H, B infinita cadunt puncta, in infinitum hoc modo licebit abire, ita vt minores à maioribus AB, CD semper minus, ac minus deficiendo, tandem deficiant defectu minori quacunque datâ quantitate, rationem eandem inter se perpetuò seruantes, quæ est AE ad CF, vel AB ad CD.

SCHOLION.

Obseruanda.

Obseruandum est autem, quòd expositum Theorema de lineis, cuicunque generi quantitatis aptari potest, vnde concipere licet, vt AB ad CD, ita polygonum ad polygonum, & vt AE ad CF, ita quoque polygonum ad polygonum. Nec dissimiliter de solidis. Quamobrem accepto puncto H, ductaque HG, vt supra, intelligere poterimus polygonum ad polygonum esse, vt AH ad CI, & de ipsismet polygonis ratiocinari non secus, ac de simplicibus longitudinibus.

Aduer-

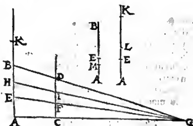
Aduertendum est vlterius, Theorema superius, à nobis conditum fuisse de ratione maioris, vel minoris inæqualitatis; nam de æqualitatis ratione profectò difficultas nulla; quod enim hic ostenditur per lineas coeuntes in puncto, ibi per lineas parallelas demonstraretur.

THEOREMA II.

Si quotcunque fuerint quantitates, à quarum singulis partes acceptæ sint, quæ per συνεχῶς ἐπαυξήσεις, continuata incrementa, *semper ac semper minus deficiendo ab illis, deficiant tandem defectu minori quacunque data quantitate, rationem eandem inter se perpetuò seruantes.*

Dico quantitates illas in eadem esse ratione cum istis.

Sint duæ quantitates AB, CD, dispositę inter se parallelæ; ductaque sit AC protracta ad partes C in infinitum; sintque acceptæ partes AE, CF, quæ per continuata incrementa semper, ac semper minus deficiendo ab ipsis AB, CD, deficere tandem possint defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò seruantes eandem inter se rationem, quæ est AE ad CF. Dico quantitates illas AB, CD, in eadem esse ratione cum ipsis AE, CF.



Hoc Theorema conuersum est præcedentis, atque hunc in modum demonstrabitur.

Si, vt est CF ad AE, non ita est CD ad AB, fit, vt CF, ad AE, ita CD ad aliquam aliam, quæ maior erit, vel minor, quàm AB.

Sit primùm maior, vt AK. Quoniam igitur ex hypothesi AE, CF, per incrementa minus, ac minus deficiendo ab ipsis AB, CD, tandem deficiunt defectu minori quacunque data quantitate, semper eandem rationem seruantes, quæ est AE, ad CF. Idem autem ex hactenus demonstratis a continget in AK, CD, cùm ex constructione sit, vt AE ad CF, ita AK ad CD; ergo AE debebit per continuata incrementa, deficiendo ab ipsis AB, AK, deficere tandem defectu minori quacunque data quantitate, seruando semper eandem rationem, quæ est AE, ad CF, seu AK ad CD; quod est falsum. Idque sic ostendo; Ratio enim AE ad CF, seruari poterit facto incremento ipsi AE, in ordine ad AK, ita vt AE adaucta deficiat ab ipsa AK defectu minori aliquâ datâ quantitate, & non facto incremento ipsi AE, in ordine ad AB, immò facto decremento.

a ex antecedenti.

Supponamus enim rationem AE ad CF esse duplam; supponamus itidem factum esse ipsi AE incrementum vsque ad L, ita vt AL, sit minor, quàm dupla ipsius AE; tunc, ad hoc vt sit, quemadmodum AE ad CF, hoc est in ratione dupla, ita AL ad aliam, necesse est hanc aliam AM, minorem esse ipsâ AE; itaque AE deficiet ab ipsa AK, defectu minori aliquâ datâ quantitate, & quidem per incrementum; & non deficiet ab AB per incrementum, sed per decrementum, etiam seruata ratione AE ad CF. Quod erat probandum.

Non dissimiliter, si ea fuerit minor, quàm AB &c.

THEOREMA III.

Si sint quotcunque fuerint quantitates, è quarum singulis partes in eadem ratione cum illis acceptæ sint. Dico, illas posse per continuata decrementa, semper has minus, ac minus excedendo, tandem excedere excessu minori quacunq; data quantitate, rationem eandem inter se perpetuò seruantes.

THEOREMA IV.

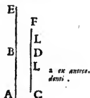
Si quotcunque fuerint quantitates, è quarum singulis partes acceptæ sint, ita vt illæ per continuata decrementa semper minus, ac minus has excedendo, tandem excedere possint excessu

cessu minori quacunque data quantitate, perpetuò seruantes inter se rationem eandem. Dico has in eadem esse ratione cum illis,

THEOREMA V.

Si quotcunque fuerint quantitates, quarum singulis alia maiores accepta sint in eadem ratione cum illis. Dico, has posse per μείωσιν, decrementum, semper ac semper minus illas excedendo, tandem excedere excessu minori quacunque data quantitate, semper eandem inter se rationem seruantes.

Sint quantitates AB, CD, quibus acceptæ sint maiores AE, CF, in eadem ratione cum illis. Dico has per continuata decrementa semper ac semper minus illas, nempè AB, CD excedentes, tandem excedere excessu minori quacunque data quantitate rationem eandem inter se perpetuo seruantes.

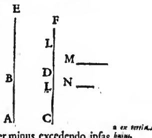


Si non ita, saltem respectu alicuius quantitatis, quæ minor sit, vel maior alterutri ipsarum AB, CD; id fieri poterit. Sit primo respectu CD, nempè CL, siue minor, siue maior. Quoniam igitur AE, CF per continuata decrementa semper minus excedendo ipsas AB, CL, tandem excedere possunt excessu minori quacunque data quantitate, eadem perpetuo seruata ratione, quæ est AE ad CF vel AB ad CD; ergo erit [a] vt AE ad CF atq; adeò vt AB ad CD, ita AB ad CL. Quod est inconueniens.

[a] ex antecedenti.

THEOREMA VI.

Si quotcunque fuerint quantitates, quarum singulis alia maiores accepta sint, qua per μείωσιν, decrementum semper, ac semper minus illas excedendo, tandem excedere possint excessu minori quacunque data quantitate, semper eandem inter se rationem seruantes. Dico quantitates illas in eadem esse ratione.



Sint quantitates AB, CD, quibus aliæ maiores acceptæ sint AE, CF, quæ per decrementum semper, ac semper minus excedendo ipsas AB, CD, rationem eandem inter se perpetuò seruent, quæ est M ad N. Dico AB ad CD esse vt M ad N. Si enim AB non est ad CD, vt M ad N, erit AB ad aliam CL, vel minorem, vel maiorem ipsa CD, in ratione M ad N. Quoniam igitur AB ad CL est, vt M ad N, sed vt M ad N, ita est AE ad CF; ergo vt AE ad CF, ita AB ad CL; ergo AE, CF per continuata decrementa semper minus excedendo ipsas AB, CL, tandem excedere poterunt [a] excessu minori quacunque data quantitate, eâdem perpetuò seruatâ ratione M ad N; sed ex hypothesi AE, & CF, per continuata decrementa semper minus excedendo ipsas AB, CD, tandem excedere possunt excessu minori quacunque data quantitate, semper eâdem seruatâ ratione, quæ est M ad N; ergo eadem CF, per continuata decrementa excedere poterit duas CD, CL, inæquales perpetuo seruata eadem ratione, quæ est M, ad N. Quod est impossibile.

[a] ex tertia huius.

Hoc idem Theorema hunc etiam in modum enunciari potuisset.

Si quantitas prima semper minus excedendo secundam, excedere tandem possit excessu minori quacunque data quantitate, sic tertia respectu quarta, eadem perpetuò seruata ratione inter primam, & tertiam. Dico secundam ad quartam in eadem esse ratione.

THEOREMA VII.

Si quatuor sint quantitates proportionales, ex secunda, & quarta sumi poterunt partes, qua per continuata incrementa, semper minus deficiendo ab ipsis, tandem deficere possint defectu minori quacunque data quantitate, ita vt, qua ratio sit prima ad singulas partes secunda, eadem sit tertia ad singulas partes quarta.

Sint

Sint quantitates A, BG, D, EH, proportionales, & ex BG, secunda, & EH quarta sumptæ sint partes BC, EF, ita vt quæ ratio est A ad BC, ea sit D ad EF. Dico BC, & EF, ab ipsis BG, EH, semper minus in infinitum deficiendo, tandē per cōtinuata incremēta deficere posse defectu minori quacunque data quantitate, ita vt quæ ratio est A ad singulas partes ipsius BG, eadem sit quæ D ad singulas partes ipsius EH.

Si enim BC, & EF ab ipsis EG, EH, semper in infinitum deficiendo tandem deficere non possunt defectu minori quacunque data quantitate, ita tamen, vt quæ ratio est A, ad singulas partes ipsius BG, non eadem sit D, ad singulas partes ipsius EH; ergo saltem quæ ratio est A, ad singulas partes ipsius BG, eadem erit D, ad singulas partes alterius, quæ minor sit ipsâ EH (non enim maior, nam tunc, quæ ratio esset A ad partem ipsius BG eadem esse deberet D ad ipsam EH) sit igitur illa EI, minor, quàm EH. Quoniam igitur, quæ ratio est A ad singulas partes ipsius BG, eadem est D ad singulas partes ipsius EI; ergo vt A ad BG, ita D ad EI, vt mox constabit; * sed vt A ad BG, ex hypothesi ita D ad EH; ergo D ad EI, eam habebit rationem, quam habet ad EH. Quod est inconueniens; nam EI foret æqualis ipsi EH.

* Lemmate sequenti.

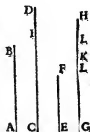
Lemma.

Secuturum autem esse, vt A ad BG, ita D ad aliā EI, &c. sic ostendo. *Si non ita est; erit vt A ad BG, ita D ad aliquam aliam maiorem, vel minorem ipsa EI. Sit primò maior, vt EK. Quoniam igitur inter K, I, infinita cadunt puncta, fieri poterit, A, ad partem ipsius BG, nempè BN, vt D ad aliam, quæ maior sit, quàm EI, minor tamen quàm Ek, ergo vt A ad aliquam partem ipsius BG, ita D ad aliquam partem alterius maioris, quàm EI, quod est contrà hypothesin.*

Si verò sit, vt A ad BG, ita D ad EL, minorem, quàm EI. Quoniam igitur, vt A ad singulas partes ipsius BG, ita D ad singulas partes ipsius EI, & inter L, I, infinita cadunt puncta, erit vt A ad aliquam partem ipsius BG, verbi gratia, BM, ita D ad aliquam partem ipsius EI, quæ maior sit, quàm EL, minor tamen quàm EI, quod est impossibile. Cùm enim sit, vt A ad BG, ita D ad EL, fieri non poterit, vt A ad partem ipsius BG, sit, quemadmodum D ad quantitatem maiorem ipsa EL.

THEOREMA VIII.

Si sint quatuor quantitates proportionales, & per continuata quidem incrementa prima minus deficiendo à quapiam quinta, & tertia à quapiam sexta, semper in infinitum, deficere tandem possint defectu minori quacunque data quantitate, perpetuo tamen eadem seruatâ ratione prima ad secundam, & tertia ad quartam. Dico quintam ad secundam in eadem esse ratione in qua est sexta ad quartam.



Sint quantitates AB, CD, EF, GH, sitque vt AB ad CD, ita EF ad GH, in ratione minoris inæqualitatis; at verò AB, EF, prima, & tertia per continuata quidem incrementa semper minus deficiendo abs CI, & GK, quinta, & sexta deficere tandem possint defectu minori quacunque data quantitate eadem perpetuo tamen seruata ratione AB ad CD, & EF ad GH. Dico esse vt quinta CI, ad secundam CD, ita sextam Gk ad quartam GH.

Si enim non est vt CI ad CD, ita GK ad GH; ergo vel minor, vel maior, quàm GK, erit ad GH, vt CI ad CD. Sit vtcunque, vt GL. Quoniam igitur est vt CI ad CD, ita GL ad GH; ergo permutando erit vt CI ad GL, ita CD ad GH; sed vt CD ad GH, ita ex hypothesi permutando est AB ad EF; ergo, vt CI ad GL, ita AB ad EF; ergo a AB, & EF, per continuata incrementa augeri poterunt in infinitum, ita vt minus deficiendo ab ipsis CI, GL, tandem deficiant defectu minori quacunque datâ quantitate

a per primam huius.

titate

ſtate eidem perpetuò ſeruatâ ratione, ſcilicet AB ad EF, ſeu CI ad GL; ſed eædem AB, & EF, per continuata incrementa deficere poterant ab ipſis CI, GH, perpetuò ſeruatâ eadem ratione AB ad CD, ſeu EF ad GH, ſeu CI ad GL; ergo eadem EF deficere poterit ab ipſis GK, GL, defectu minori quacunque datâ quantitate, ſeruata eadem ratione CI, ad GL. Quod eſt impoſſibile.

THEOREMA IX.

Si ſit, vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam; at verò prima minus ſemper in infinitum excedendo quampiam quantitatem quintam, tandem excedere poſſit exceſſu minori quacunque data quantitate: item tertia reſpectu ſexta, perpetuò tamen ſeruata eadem ratione, primæ ad ſecundam, & tertiæ ad quartam. Dico eſſe, vt quintam ad ſecundam, ita ſextam ad quartam.

Huius demonſtratio ex dictis facilè conſtat &c.

THEOREMA X.

Si ſint quantitates, & quot in vna ſumi poſſunt partes, totidem ſingulis ijs æquales in alia accipere liceat, & ſic in infinitum nouis partibus acceptis, ita vt aggregatum poſteriorum ſemper maius ſit aggregato priorum. Dico propoſitas initio quantitates eſſe inter ſe æquales.

Sint, exempli gratia, hæ duæ propoſitæ quantitates AB, CD, & in AB, ſumptæ ſint partes E,F,G, quibus totidem æquales in CD, acceptæ ſint H,I,K, & ſic in infinitum, ita vt aggregatum poſteriorum maius ſit aggregato priorum. Dico AB, CD, eſſe inter ſe æquales.

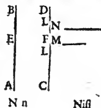
Quoniam enim ſupponuntur E,F,G, partes acceptæ ex AB, quibus in CD, ſint acceptæ partes æquales H,I,k, idque ſupponitur fieri poſſe in infinitum, ita vt aggregatum poſteriorum maius ſemper ſit aggregato priorum; ergo à duobus quantitatibus AB, CD, ſupponimus duas auferri quantitates, nempè partium aggregata, quæ per continuata incrementa, ſemper minùs, ac minùs deficiendo ab ipſis AB, CD, tandem deficere poſſint defectu minori quacunque datâ quantitate, ſemper eadem ſeruata æqualitatis ratione; ergo ex ijs, quæ ſupra demonſtrauimus, [a] quantitates AB, CD, initio propoſitæ erunt inter ſe æquales. Quod erat operæ pretium oſtendere.

Hoc etiam de alijs rationibus, præter eam, quæ eſt æqualitatis, oſtendi poteſt reducitur tamen ad ſecundum. [a] Theoremate ſecundo.

THEOREMA XI.

Si quantitas prima ſemper minus excedendo ſecundam, excedere tandem poſſit exceſſu minori quacunque datâ quantitate, ſic tertia reſpectu quarta: ita tamen vt, cùm tertia ad primam ſit in ſubmultiplici ratione maiori, quàm quædam præfinita ratio ſubmultiplex, & per continuata decrementa ſemper ad illam magis accedat. Dico quartam ad ſecundam eſſe in huiuſmodi præfinita ratione ſubmultiplici.

Sint quantitates AB, AE, CD, CF, & prima quidem AB ſemper minus excedendo ſecundam AE, excedere tandem poſſit exceſſu minori quacunque datâ quantitate; ſic tertia CD reſpectu quartæ CF, ita tamen vt, cùm tertia CD ad primam AB, ſit in ſubmultiplici ratione maiori, quam quædam præfinita ratio ſubmultiplex M ad N, per continuata decrementa magis ad illam accedat. Dico, quartam CF ad ſecundam AE, in eadem, eſſe ſubmultiplici præfinita ratione.



Nisi enim CF ad AE rationem haberet submultiplicem M ad N, sed potiùs CL ad AE; deberent CD, AB, minus, ac minus excedendo CL, AE, in infinitum excedere excessu minori quacunque data quantitate, ita vt cùm tertia CD ad primam AB, foret in submultiplici ratione maiori, quàm M ad N, ratio semper CD ad AB minus excedendo CL, AE, magis accederet ad submultiplicem rationem M ad N; sed hoc ex hypothesi cōtingit respectu AE, CF; ergo deberet contingere respectu AE, CF, & respectu AE, & CL; quare CL, & CF forent æquales, Quod est absurdum.

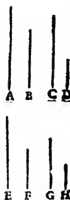
Hæc attulimus Theoremata, non quasi omnia, quæ excogitari possint, tanquàm generalia, quibus huius Methodi demonstrationes innituntur, sed tantum illa, quæ nobis inseruire possunt pro exemplis afferendis, & quorum imitatione reliqua possunt excogitari, prout vsus requiret.

Sic duo sequentia demonstrari possent, quæ suam haberent vtilitatem.

THEOREMA XII.

Si sint quatuor quantitates primi ordinis, totidemque aliæ ordinis secundi, ita vt bina secundi ordinis à binis ordinis primi semper minus deficiendo, deficere tandem possint defectu minori quacunque data quantitate, ita vt ratio duarum secundi ordinis pars eadem perpetuò sit rationis duarum aliarum. Dico rationem duarum primi ordinis, eandem esse partem aliarum duarum eiusdem ordinis.

Sint quantitates A,B,C,D, totidemque sint aliæ E,F,G,H, ita vt E,G, abs A,C, & F,H, abs B,D, semper minus deficiendo deficere tandem possint defectu minori quacunque data quantitate, autem ratio ipsius E ad G, perpetuò sit eadem pars rationis ipsius F ad H. Dico rationem ipsius A ad C, eandem esse partem rationis B ad D.



THEOREMA XIII.

Si quotcunque sint quantitates, sic se habentes respectu alicuius vt hac, quantumuis augeatur, si vna illarum hanc excedat, cateræ omnes excedere debeant, etsi vna illarum ab hac quantumuis diminuta deficiat, cateræ omnes ab eadem deficere debeant. Dico quantitates illas esse inter se æquales.

Lemma.

Similia polygona circulis inscripta sunt inter se, vt à diametris quadrata.

Hoc elementare est, demonstratumque ab Euclide in Libro duodecimo Prop. prima.

THEOREMA.

Exemplum LXXXIX.

Circuli inter se sunt quemadmodum à diametris quadrata.

Quoniam sunt duæ quantitates, nimirum circuli, à quibus partes, videlicet similia polygona, sunt acceptæ, quę per cōtinuata incrementa semper, ac semper minus ab ipsis deficiendo, tandem deficere possunt defectu minori quacunquę data quantitate, perpetuò seruata eadem ratione, quæ est inter diametrorum quadrata (ex eo enim, quod præmissum est lemmate, hæc est ratio inter polygona similia circulis inscripta); ergo ex generali huius Methodi Theoremate secundo, circuli erunt inter se, vt à diametris quadrata.

Hoc idem verificatur de polygonis similibus, quæ sunt circulis circumscripta.

Lemma.

Polygonorum similium circulis inscriptorum ambitus sunt inter se, vt diametri.

Ad

Ad eum modum, quo ostenditur latus vnum polygoni, ad latus homologum alterius polygoni similis esse, vt diameter ad diametrum, ita ostenditur etiam singula ad singula esse, vt diameter ad diametrum; ergo omnia ad omnia erunt, vt diameter ad diametrum; vt enim vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia sed omnia latera sunt ambitus polygoni; ergo ambitus polygonorum similium circulis inscriptorum, erunt inter se vt diametri.

Hoc idem verificatur de polygonis similibus, quæ sunt circulis circumscripta.

THEOREMA.

Exemplum. LXXXX.

Circulorum peripheriæ sunt inter se vt diametri.

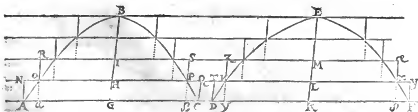
Quoniam sunt quantitates nimirum circulorum peripheriæ, itemque aliæ scilicet similium polygonorum circulis inscriptorum ambitus, qui per continuata incrementa semper, ac semper minus deficiendo ab ipsis peripherijs, tandem deficere possunt defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò seruata eadem ratione diametrorum (ex eo enim quod præmissum est lemmate polygonorum similium circulis inscriptorum ambitus, sunt inter se vt diametri) ergo ex generali huius Methodi Theoremate secundo, circulorum peripheriæ erunt inter se vt diametri.

THEOREMA.

Exemplum. LXXXXI.

Parabolæ æqualium altitudinum sunt inter se, vt bases.

Sint parabolæ ABC, DEF, æqualium altitudinum, seu quod idem est, inter easdem parallelas BE, AF, earumque bases sint AC, DF. Dico esse, vt AC ad DF, ita parabolen ABC, ad parabolen DEF.



Paraboles ABC diameter sit BG, & paraboles DEF, diameter sit EK, diuisaque BG bifariam in I, & vtroque dimidio iterum bifariam, & sic deinceps, vt exempli gratia IG in H, bifariam, & per puncta diuisionum ductæ sint æquidistantes alterutri ipsarum BE, AF, ductisque rectis parallelis ipsis diametris, vt AN, OR &c; CQ, PS &c; insuper DT, VZ &c; præterea FY, X&, &c; per puncta videlicet intersectionis perimetrorum ipsarum parabolarum, cum ijs, quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipsarum BE, AF, adeò vt constitutæ sint figuræ circumscriptæ, & introscriptæ parabolis, constantes parallelogrammis æqualium altitudinum, & numero æqualibus, si circumscriptæ circumscriptis,& introscriptæ introscriptis, comparentur.

Quoniam igitur figuræ hoc modo circumscriptæ parabolæ ABC, ad circumscriptas parabolæ DEF, semper minus excedendo ipsas parabolas ABC, DEF, tandem excedere possunt excessu minori quacunque datâ quantitate, semper seruantes a eandem rationem, quæ est AC, ad DF; ergo parabole ABC ad parabolen DEF, rationem habebit, vt basis AC, ad basin DF.

a Ex Lemate sequenti.

Quod per circumscriptas figuras concludimus minus, ac minus excedentes parabolas ABC, DEF, concludere quoque possumus per inscriptas iisdem parabolis, semper minus, ac minus deficiendo, vt infra dicam.

Lemma.

Quod autem figura circumscripta parabolæ ABC ad figuram circumscriptam parabolæ DEF, sit, vt basis AC ad basim DF, sic ostendo. *Quoniam enim est ob naturam paraboles, vt GB ad BH, ita quadratum AG, ad quadratum OH, atque adeò, vt quadratum AC, ad quadratum OP; vt enim simplum ad simplum, ita quadruplum ad quadruplum; sed vt BG ad BH, ita KE ad EL; ergo vt quadratum AC ad quadratum OP, ita KE, ad EL; sed vt KE ad EL, ita quadratum DF ad quadratum VX, & permutando, vt quadratum AC ad quadratum DF, ita quadratum OP, ad quadratum VX; ergo vt AC, ad DF, ita OP, ad VX. Et sic de reliquis omnibus alijs lineis intra parabolas ratiocinandum est. Omnes itaque in vnâ proportionales sunt omnibus in alia parabola; quare rectangula cùm sint eiusdem altitudinis, quibus componitur figura circumscripta vni parabolæ ABC, proportionalia sunt ijs, quibus componitur figura circumscripta alteri parabolæ DEF; Quare, vt vnum antecedens parallelogrammum AQ, ad vnum consequens parallelogrammum DT, ita omnia antecedentia, nempè figura circumscripta parabolæ ABC, ad omnia consequentia, scilicet figuram circumscriptam parabolæ DEF. Sed vt parallelogrammum AQ ad parallelogrammum DT, ita est basis AC, ad basin DF; ergo vt basis AC, ad basin DF, ita figura circumscripta parabolæ ABC, ad figuram circumscriptam parabolæ DEF.*

Per inscriptas autem hunc in modum.

Quoniam inscripta parabolæ ABC, & inscripta parabolæ DEF, sic se habent, vt per continuata incrementa semper minus deficiendo ab ipsis parabolis, deficere tandem possint defectu minori quacunque data quantitate, seruantes tamen inter se rationem, quæ est AC ad DF, vt mox demonstrabo: propterea parabola ABC ad parabolen DEF, rationem habebit, vt AC ad DF.

Lemma.

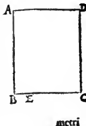
Quod autem inscripta figura parabolæ ABC ad inscriptam parabolæ DEF, sit, vt AC ad DF, sic demonstrabitur.

Quoniam, vt supra ostensum fuit, quemadmodum AC ad DF, ita est OP, ad VX, sed OP, æqualis est αβ, & VX æqualis est γδ; ergo vt AC ad DF, ita erit αβ ad γδ, sed vt αβ ad γδ, ita, vt supra ostensum est de circumscriptis, demonstrabitur inscripta parabolæ ABC, ad inscriptam parabolæ DEF; ergo inscripta parabolæ ABC, ad inscriptam parabolæ DEF, erit, vt AC ad DF. Omnes igitur inscriptæ parabolæ ABC ad omnes inscriptas parabolæ DEF, rationem seruant, quæ est AC, ad DF.

Exemplum LXXXII.

THEOREMA.

Cylindri recti curua superficies ad basin, est vt latus ipsius cylindri ad quartam partem diametri eiusdem baseos.



Esto cylindrus rectus, cui rectangulum per axem sit ABCD, sumptaque BE, quæ sit quarta pars ipsius BC, diametri baseos eiusdem cylindri, Dico cylindri curuam superficiem ad basin, cuius diameter BC, rationem habere, vt AB ad BE.

Intelligatur polygonum circumscriptum circulo, cuius diameter BC, quique cylindri recti basis est, & super hoc intelligatur erectum prisma, cuius altitudo AB, cylindri latus.

Quoniam itaque prismatis superficies (quo nomine facierum aggregatum intelligo, exceptis basibus) ad basin rationem habet, vt mox constabit, quam altitudo prismatis ad quartam partem dia-

metri

metri circuli, cui prismatis basis circumscripta est. Sunt igitur duæ quantitates, nempè superficies prismatis, eiusque basis, quæ minus semper excedendo duas alias quantitates, nempè cylindricam superficiem, cui circumscriptum est prisma, & circulum, nempè cylindri basin, cui prismatis basis est circumscripta, tandem excedere possunt excessu minori quacunque data quantitate, semper seruantes eandem rationem, quam habet altitudo prismatis, seu cylindri ad quartam partem diametri baseos ipsius cylindri. Propterea, ex generali huius Methodi Theoremate quarto Cylindri recti curua superficies, ad basin erit in ratione lateris cylindri ad quartem partem diametri eiusdem baseos.

Lemma.

Quod autem prismatis recti superficies ad basin, sit vt altitudo ipsius prismatis ad quartam partem diametri circuli, cui prismatis basis est circumscripta, sic demonstrabitur.

Intelligatur polygonum, quod est basis prismatis diuisum in tot triangula, quot sunt polygoni latera, & eorum vertices sint in centro circuli, cui polygonum circumscriptum est, bases vero polygoni latera; Qualibet facies prismatis ad sibi respondens triangulum in polygono, rationem habet, vt dupla altitudo prismatis ad eam, qua ex centro ducitur perpendicularis, lateri ipsius polygoni, hoc est ad semidiametrum circuli, cui polygonum circumscriptum est, hoc est vt altitudo prismatis recti ad quartam partem diametri prædictæ; ergo aggregatum ex omnibus faciebus, nempè prismatis recti superficies ad aggregatum omnium triangulorum, hoc est ad polygonum circulo circumscriptum, erit, vt altitudo prismatis ad quartam partem diametri illius circuli, cui polygonum circumscriptum est.

Hinc per modum Corollarij infertur.

THEOREMA.

Exemplum LXXXXIII.

Circulus, cuius radius est medius proportionalis inter cylindri recti latus, baseosque diametrum, æqualis est superficiei cylindricæ.

Archimedes Prop 13. De Sphæra & Cylindro.

Cùm enim circulus sit, cuius radius est medio loco proportionalis inter diametrum baseos cylindri, ac eiusdem altitudinem; ergo circulus, qui basis est cylindri, ad circulum, cuius diameter est media proportionalis &c. est in ratione diametri baseos ad altitudinem cylindri; ergo idem circulus, qui est cylindri basis, ad quadruplum circulum, cuius diameter erat media proportionalis &c. hoc est ad circulum, cuius radius est huiusmodi media proportionalis, erit, vt quarta pars diametri baseos ad altitudinem eiusdem; sed vt quarta pars diametri baseos ad altitudinem cylindri, ita eadem cylindri basis ad cylindricam superficiem; ergo, &c.

Sed aliter.

THEOREMA.

Exemplum LXXXXIV.

Omnis Cylindri recti superficies sine basibus æqualis est circulo, cuius ea, quæ ex centro media proportionalis est inter latus, & cylindri baseos diametrum.

Intelligatur circulo, qui basis est cylindri circumscriptum polygonum ordinatum, cui simile factum sit polygonum circumscriptum circulo, cuius radius est medius proportionalis inter diametrum baseos cylindri, atque eiusdem altitudinem; & super polygonum circumscriptum basi intelligatur erectum prisma eiusdem altitudinis cum cylindro.

Quoniam polygonum circumscriptum circulo cylindri basi, ad polygonum circumscriptum circulo, cuius radius est medius proportionalis &c. est in duplicata ratione rectarum, quarum vna perpendicularis est à centro polygoni circumscripti basi cylindri ad latus, altera à centro polygoni circumscripti circulo, cuius radius est medius proportionalis &c. Sed perpendicularis à cētro polygoni circumscripti basi cylindri, hoc est semidiameter baseos cylindri ad altitudinem duplā eiusdem, hanc eandem habet duplicatam rationem, cùm radius ille sit medio loco proportionalis, &c. ergo polygonum circumscriptum basi cylindri ad po-

ad polygonum circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius &c. erit in ratione ſemidiametri baſeos cylindri ad eiuſdem altitudinem duplam, hoc eſt vt dimidia ſemidiameter, ſeu vt ſemi perpendicularis à centro polygoni ſuper latus, ad cylindri latus, hoc eſt vt polygonum circumſcriptum baſi cylindri, quodque baſis eſt priſmatis ad ſuperficiem priſmatis; ergo ſuperficies priſmatis, exceptis baſibus æquabitur polygono, quod eſt circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum baſeos cylindri, & eiuſdem altitudinem.

Duæ igitur ſunt quantitates, nimirum ſuperficies priſmatis, & polygonum circumſcriptum circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum baſeos ipſius cylindri, & altitudinem eiuſdem, quarum vna cylindricam ſuperficiem, altera circulum, cuius radius eſt medius proportionalis &c. ſemper minus, ac minus excedendo, tandem excedere poſſunt exceſſu minori quacunque data quantitate; perpetuò ſeruata æqualitatis ratione, ergo ex generali huius noſtræ Methodi Theoremate quarto, cylindrica ſuperficies æquabitur circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrum baſeos cylindri, ac eiuſdem altitudinem.

Sed hoc idem aliter adhibitâ reſolutiuâ Methodo, cui noſtram hanc inſeruire conſpicimus.

THEOREMA.

Exemplum LXXXXV.

Omnis cylindri recti ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt circulo, cuius ea, quæ ex centro media proportionalis eſt inter latus, & cylindri baſeos diametrum.

Reſolutio.

QVoniam igitur cylindri recti ſuperficies æqualis eſt circulo, cuius radius media proportionalis eſt inter latus, & ipſius baſeos diametrū; ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin eſt, vt circulus, cuius radius eſt prædicta media proportionalis ad cylindri baſin; ſed vt quadratum illius mediæ proportionalis ad quadratum ſemidiametri baſeos, ita eſt [a] circulus, cuius radius eſt ipſa media proportionalis ad ipſam cylindri baſin; ergo cylindri recti ſuperficies eſt ad baſin, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus cylindri, & diametrum baſeos, ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos. Sed quadratum mediæ proportionalis inter cylindri latus, & diametrum baſeos, æquale eſt [b] rectangulo per axem, ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin eſt, vt rectangulum per axem ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos; ſed vt rectangulum ſub latere, & quarta parte diametri baſeos, ad quadratum eiuſdem quartæ partis, ita eſt [c] rectangulum per axem ad quadratum ſemidiametri ipſius baſeos; vt enim eſt ſimplum ad ſimplum, ita quadruplum ad quadruplum; ergo cylindri recti ſuperficies ad baſin erit, vt rectangulum ſub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiuſdem quartæ partis; ſed vt cylindri latus ad quartam partem diametri baſeos, ita rectangulum ſub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiuſdem partis; ergo cylindri recti ſuperficies eſt ad baſin, vt cylindri latus ad quartam partem diametri ipſius baſeos. Quod ita ſe habet, vt mox demonſtrabo. His præmiſſis.

Lemma I.

Si fuerint duo triangula ſuper eadem baſi conſtituta, erunt in ratione altitudinum. Hoc *conſtat ex Elementis.*

Lemma II.

Si fuerint duo triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & altitudo vnius ſit dupla altitudinis alterius, rectangulum ſuper eadem baſi, altitudinem habens eam, quæ eſt minoris trianguli, æquabitur triangulo maiori.

Conſtat etiam ex Elementis; nam triangulum maius eſt duplum minoris, ex lemmate antecedenti. Sed trianguli minoris duplum eſt rectangulum prædictum; ergo triangulum maius æquabitur huiuſmodi rectangulo.

Lemma

Lemma III.

Si super polygonum regulare erectum sit prisma, cuius altitudo sit quarta pars altitudinis ipsius polygoni, superficies prismatis æqualis erit huiusmodi polygono.

Constat ex lemmate antecedenti; singula enim facies ipsius prismatis æquales sunt singulis triangulis, in quæ polygonum diuiditur. Altitudo enim vniuscuiusque faciei æqualis est dimidio altitudinis cuiuslibet trianguli; ergo integra superficies æquabitur polygono.

Lemma IIII.

Cylindri recti superficies, cuius altitudo est quarta pars diametri baseos, æqualis est ipsi basi.

Intelligatur cylindri prædicti basi circumscriptum polygonum, supra quod erectum sit prisma eiusdem altitudinis cum cylindro, sitque diuisum polygonum in tot triangula, quot sunt numero latera ipsius, eorumque vertices sint in centro. Manifestum est ex lemmate antecedente, superficiem prismatis prædicti æqualem esse polygono, quod est basis eiusdem. Sunt itaque duæ quantitates, nempe superficies prismatis circumscripti, exceptis basibus, & polygonum circumscriptum basi ipsius cylindri, quæ semper minus excedendo cylindri superficiem, eiusque basin, tandem excedere possunt excessu minori, quacunque data quantitate, seruantes semper rationem æqualitatis; ergo ex generali Theoremate, quarto huius Methodi, superficies cylindri, cuius altitudo quarta pars est diametri ipsius baseos, æquabitur ipsi basi.

Itaque Generali Methodo, peculiaris hæc inseruit.

Lemma V.

Cuiuscunque recti cylindri superficies est ad basin, vt cylindri latus ad quartam partem diametri ipsius baseos. *Hoc etiam aliter supra demonstratum est.*

Superficies enim cylindri ad cylindri superficiem eiusdem baseos, est vt altitudo ad altitudinem; ergo superficies cylindri cuiuslibet altitudinis, eiusdem tamen baseos, ad superficiem cylindri, cuius altitudo est quarta pars diametri ipsius baseos, est vt illius altitudo ad quartam partem diametri baseos. Sed superficies cylindri, cuius altitudo est quarta pars diametri baseos, æqualis est [a] ipsi basi; ergo superficies cylindri cuiuslibet altitudinis ad basin est, vt altitudo hoc est, vt latus eiusdem cylindri ad quartam partem diametri baseos.

Compositio.

QVoniam cylindri recti superficies est ad basin, vt cylindri latus ad quartam partem diametri baseos, sed vt cylindri latus ad quartam partem diametri baseos, ita rectangulum sub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiusdem partis; ergo cylindri recti superficies ad basin erit, vt rectangulum sub latere, & quarta parte prædicta ad quadratum eiusdem quartæ partis. Sed vt rectangulum sub latere, & iam dicta quarta parte ad quadratum eiusdem quartæ partis, ita est rectangulum per axem ad quadratum semidiametri ipsius baseos; vt enim est simplum ad simplum, ita quadruplum ad quadruplum; ergo cylindri recti superficies ad basin est, vt rectangulum per axem, ad quadratum semidiametri ipsius baseos. Sed quadratum mediæ proportionalis inter cylindri latus, & diametrum baseos ipsius, æquale est rectangulo per axem; ergo cylindri recti superficies est ad basin, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus cylindri, & diametrum baseos, ad quadratum semidiametri ipsius baseos. Sed vt quadratum illius mediæ proportionalis ad quadratum semidiametri baseos, ita est circulus, cuius radius est ipsa media proportionalis ad ipsam cylindri basin; ergo cylindri recti superficies ad basin est, vt circulus, cuius radius est prædicta media proportionalis, ad cylindri basin; ergo cylindri recti superficies æquabitur circulo, cuius radius media est proportionalis inter latus, & ipsius baseos diametrum. Quod oportebat ostendere.

THEO-

Exemplum LXXXVI.

THEOREMA.

Archimedes prop. 15. de sphæra, & Cylindro.

Coni recti superficies ad basin est, vt latus eiusdem coni ad semidiametrum baseos.

Intelligatur coni basi circumscriptum polygonum, supra quod intelligatur erecta pyramis: intelligatur polygonum prædictum diuisum in triangula per rectas ductas à centro ad angulos ipsius, erunt autem hæc multitudine æqualia faciebus pyramidis. Manifestum est, quod quodlibet triangulum, quod est facies pyramidis, ad suum conterminum triangulum in polygono eam habere rationem, quam habet cathetus ad cathetum, sed cathetus faciei pyramidis est latus coni, cathetus trianguli in polygono est semidiameter baseos ipsius coni; ergo pyramidis facies ad triangulum in polygono rationem habet, quam latus coni ad semidiametrum baseos, & ita omnes facies pyramidis, hoc est superficies pyramidis ad omnia triangula in polygono, hoc est ad ipsum polygonum est, vt latus coni ad semidiametrum baseos, & sic in infinitum, multiplicatis lateribus polygoni, & faciebus pyramidis. Duæ igitur sunt quantitates, nempè superficies pyramidis, & polygonum, quod est basis eiusdem, quæ quidem per continuata decrementa semper minus excedendo conicam superficiem, eiusque basin, tandem excedere possunt excessu minori quacunque data quantitate, perpetuò seruata ratione lateris coni ad semidiametrum baseos ipsius; ergo ex generali huius nostræ Methodi Theoremate quarto, conica superficies ad basin recti coni, est in ratione lateris eiusdem coni ad semidiametrum baseos. Hinc per modum Corollarij.

Exemplum LXXXXVII.

THEOREMA.

Superficies cylindri recti eiusdem altitudinis, ac baseos cum cono, exceptis basibus ad conicam superficiem est, vt latus cylindri ad semilatus coni.

Demonstratum est enim, cylindricam superficiem ad basin rationem habere, quam cylindri latus ad quartam partem diametri, seu ad dimidium semidiametri, hoc est vt duplum latus cylindri ad integram semidiametrum, sed superficies conica ad basin est, vt coni latus ad semidiametrum baseos; ergo cylindrica superficies ad superficiem conicam erit, vt duplum latus cylindri ad latus coni, hoc est vt latus cylindri ad dimidium latus coni. Item,

22. quinti, & corol. 4. quinti.

Exemplum LXXXXIIX.

THEOREMA.

Circulus, cuius radius est medius proportionalis inter coni recti latus, & semidiametrum baseos, æqualis est conicæ superficiei.

Archimedes prop. 14. de Sphæra, & Cylindro.

Quoniam enim conica superficies ad basin est, vt coni recti latus ad semidiametrum baseos, sed vt coni latus ad semidiametrum baseos, ita est circulus, cuius rádius medius proportionalis est inter coni latus, & semidiametrũ baseos ad ipsam coni basin; ergo coni recti superficies æquabitur circulo, cuius radius est medius proportionalis inter coni recti latus, & semidiametrum baseos.

Ex his autem liquet, & illud.

Exemplum LXXXXIX.

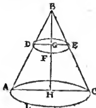
THEOREMA.

Archim prop. 16. de sphæra, & Cylindro.

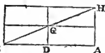
Si conus rectus fuerit sectus plano, quod sit basi parallelum. Dico circulum, cuius radius est medius proportionalis inter partem lateris coni, quæ intercipitur inter duos circulos parallelos, & aggregatum ex radijs vtriusque circuli, æqualem esse parti conicæ superficiei inter prædictos circulos parallelos interceptæ.

Sit conus rectus, cuius triangulum per axem ABC, eius basis sit circulus ALCA, cuius diameter AC, secetur verò conus altero plano parallelo ipsi basi, illudque erit circulus, cuius circumferentia DFED, diameter verò DE: sitque coni axis BH secans diametrum DE in

DE in G, & AC in H. Dico circulum, cuius radius est medius proportionalis inter AD, & aggregatum ex AH, DG, æqualem esse parti conicæ superficiei, comprehensæ inter circulos parallelos DFE, ALC.



Quoniam igitur circulus, cuius radius est medius proportionalis inter AB, AH, æqualis est conicæ superficiei coni recti, cuius latus AB, baseos autem semidiameter AH; præterea circulus, cuius radius est medius proportionalis inter DB, DG æqualis est conicæ superficiei coni recti, cuius latus DB, baseos semidiameter DG; ergo prædictorum circulorum differentia æquabitur differentiæ conicarum superficierum; sed ipsorum circulorum differentia est circulus, cuius radius medius est proportionalis inter AD, & aggregatum ex AH, DG; conicarum verò superficierum differentia est, quæ continetur inter circulos parallelos DFE, ALC; ergo conica superficies comprehensa inter prædictos circulos parallelos, æquabitur circulo, cuius radius est medius proportionalis, inter AD & aggregatum ex AH, & DG.

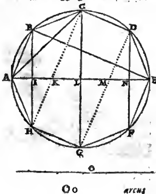


Lemma.

Quod autem circulus, cuius radius est medius proportionalis inter AD, & aggregatum ex DG, AH, æqualis sit differentiæ circulorum, quorum vnus habet radium medium proportionalem inter AB, AH, alter inter DB, DG: sic ostendo.

Cùm enim sit vt DB, ad DG, ita BA ad AH, si intelligantur ex his facta rectangula, cùm sint similia, circa eandem diametrum consistent, ac propterea complementa erunt æqualia, quorum vnum sub DG, & sub AD, differentia inter AH, DB, aliud verò sub DB, & sub differentia inter AH, DG. Sumatur igitur bis illud sub DG, & sub AD; vnà enim cum contento sub AD, & differentia inter AH, DG, æquabitur gnomoni, nempè differentia rectangulorum, quorum vnum continetur sub AH, & AB, aliud verò sub DG, & DB; Idem est autem rectangulum bis sub AD, & DG, vnà cum rectangulo sub eadem AD, & differentia inter AH, & DG, idem est, inquam, ac rectangulum sub AD, & sub aggregato ex AH, DG; ergo rectangulorum differentia, quorum vnum sub AB, & AH, aliud sub DG, & DB, continetur, æquatur rectangulo sub AD, & aggregato ex AH, DG: loco rectangulorum intelligantur quadrata; ergo differentia quadratorum, quorum vnum habet latus medio loco proportionale inter AB, AH, aliud verò habet medium inter BD, DG, æquabitur quadrato, cuius latus medium est proportionale enter AD, & aggregatum ex AH, & DG; sed vt quadrata, ita circuli, quorum radij sunt latera quadratorum; ergo circulus, cuius radius medius proportionalis est inter AD, & aggregatum ex AH, DG, æqualis est differentia circulorum, quorum vnus habet radium medium proportionalem inter AH, AB, alter verò inter DG, DB.

Lemma primum ad sequens Theorema.



Sit polygonum regulare parilaterum, & æquilaterum, ABCD &c., inscriptum circulo ACEG, ductaque sit EB ad terminum lateris diametro proximi; rectæ verò BH, CG, DF, iungant angulos æquidistantes ab A. Dico, rectangulum contentum sub diametro AE, & subtensa BE æquari rectangulo sub quouis latere, AB, vel BC, vel &c. & sub aggregato rectarum BH, CG, DF ductis CH, DG.

Quoniam igitur BH, CG, DF ob æquales interceptos

arcus BC, HG; CD, GF, sunt inter se parallelæ, quemadmodum AB, HC, GD, FE; propterea omnia triangula ABI, IHK, KCL, LGM, MDN, & NFE, sunt æquiangula; ergo vt BI, ad IA, ita HI ad Ik, & vt HI, ad IK, ita CL ad Lk, & ita GL ad LM, & vt GL ad LM, ita DN, ad NM, & vt DN ad NM, ita FN ad NE; quare vt vna antecedentium BI ad vnam consequentium IA, sic omnes antecedentes BI, IH, CL, LG, DN, NF, hoc est aggregatum ex BH, CG, DF, ad omnes consequentes, AI, Ik, kL, LM, MN, NE, hoc est ad diametrum AE. Est autem, vt BI ad IA, ita BE ad BA; ergo aggregatum ex BH, CG, DF, ad diametrum AE erit, vt BE ad BA; quare rectangulum sub aggregato trium BH, CG, DF, & sub AB, æquaaitur rectangulo sub AE, & BE.

Lemma secundum.

Iisdem positis: intelligatur circa AE, veluti axem reuolui polygonum, & circulus, vt describatur superficies constans ex superficiebus conicis sphæræ inscriptis. Dico huiusmodi superficiem æqualem esse circulo, cuius radius medius est proportionalis inter AE, EB.

Quoniam igitur BH, CG, DF, duplæ sunt ipsarum BI, CL, DN, singula singularum; erunt propterea prædicta BH, CG, DF, æquales ipsi BI, CL, DN, bis sumptis; ergo rectangulum sub latere vno polygoni, puta AB, vel BC &c. & sub BH, CG, DF, æquabitur rectangulis sub AB, & BI; sub BC, & composita ex BI, & CL; sub CD, & composita ex CL, & DN; sub DE, & DN; hunc enim in modum dimidia illa BI, CL, DN, bis fuerunt accepta, sed rectangulum sub AB, & aggregato ipsarum BH, CG, DF, æquatur rectangulo sub AE, & BE, seu quadrato O, quæ media sit proportionalis inter AE, BE; ergo quadratum ipsius O, æquabitur rectangulis sub AB, BI; sub BC, & sub composita ex BI, & CL; sub CD, & composita ex CL, DN; sub DE, & DN; loco rectangulorum intelligantur quadrata, nempè inter AB, BI, media sit proportionalis P; & inter BC, & compositam ex CL, & BI, media sit proportionalis Q; inter CD, & compositam ex CL, DN, media sit proportionalis R; & inter DN, DE, media sit proportionalis S; ergo quadratum ipsius O, æquabitur quadratis ipsarum P, Q, R, S; ergo circulus, cuius radius O, æquabitur circulis, quorum radij sunt P, Q, R, S; sed circulus, cuius radius P, æqualis est superficiei conicæ HAB; circulus, cuius radius Q, æqualis est segmento conicæ superficiei BHCG; circulus, cuius radius R, æqualis est segmento conicæ superficiei GCDF; circulus tandem, cuius radius S, æqualis est conicæ superficiei DFE; ergo circulus, cuius radius O, æquabitur vniuersæ superficiei constanti ex conicis superficiebus sphæræ inscriptis.

Nec dissimiliter demonstrabimus, superficiem constantem ex superficiebus conicis segmento spharico DAF, inscriptas, æqualem esse circulo, cuius radius, medius est proportionalis inter AE, AN. Idq; intellige, de quocunque sphæræ segmento, cui figura inscripta sit æquilatera & parilatera dempta basi &c. Exemplum C.

THEOREMA.

Sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli in eadem sphæra describtibilis.

Quoniam igitur circulus, cuius radius est medius proportionalis inter circuli maximi diametrum, & subtensam ductam ad extremum lateris polygoni æquilateri, & parilateri eidem circulo inscripti, ad extremum, inquam lateris, quod est diametro proximum, æqualis est vniuersæ superficiei constanti ex pluribus superficiebus conicis sphæræ quidem inscriptis, & ita semper in infinitum, multiplicatis lateribus polygonorum parilaterorum, æquilaterorum; propterea duæ sunt quantitates, nempè vniuersa superficies constans ex conicis superficiebus iam dictis, & circulus, cuius radius est medius proportionalis inter diametrum, & subtensam iam explicatam, quæ semper minus, ac minus per continuata incrementa deficiendo; illa quidem à superficie sphærica; hic autem à circulo, cuius radius est sphæræ diameter AE, perpetuò seruata æqualitatis ratione; propterea ex generali huius nostræ Methodi Theoremate secundo, sphærica superficies ad circulum, cuius radius est diameter ipsius sphæræ, in eadem erit æqualitatis ratione; sed circulus, cuius radius est diameter sphæræ, est quadruplus circuli, cuius diameter est ipsa diameter sphæræ, hoc est circuli maximi ipsius sphæræ; ergo sphærica superficies quadrupla erit circuli maximi eiusdem sphæræ.

THEO-

THEOREMA.

Sphærica superficies quadrupla est circuli maximi eiusdem sphæræ. Exemplum CI.

Hoc idem Theorema facillimè demonstrabimus hunc in modum.

Quoniam superiùs ostendimus, circulum, cuius radius medius est proportionalis inter AE diametrum, & BE subtensam, æqualem esse vniuersæ superficiei constanti ex pluribus conicis superficiebus sphæræ inscriptis, ortis videlicet ex reuolutione laterum polygoni ABCD &c. ergo dimidium æquabitur dimidio; quare circulus, cuius radius medius est proportionalis inter AL semidiametrum, & BE subtensam (est enim hic circulus dimidium illius; nam rectangulum sub AL,& BE, dimidiū est rectanguli sub AE, & BE, cùm AL dimidia sit ipsius AE quare quadratum æquale rectangulo sub AL,& BE, dimidium erit quadrati æqualis rectangulo sub AE, & BE. Sed vt quadrata, ita circuli sunt inter se, quorum semidiametri sunt latera quadratorum; ergo circulus, cuius radius est latus quadrati æqualis rectangulo sub AL, & BE, hoc est,cuius radius est medius proportionalis inter AL, BE,erit dimidium circuli, cuius radius est latus quadrati æqualis rectangulo sub AE, BE, hoc est, cuius radius est medius proportionalis inter AE, & BE) æquabitur superficiei dimidiæ vniuersæ iam dictæ constanti ex conicis superficiebus sphæræ inscriptis; ergo duæ sunt quantitates, nempè circulus, cuius radius est medius proportionalis inter AL, BE; altera autem dimidium superficiei constantis ex conicis superficiebus, quæ per continuata incrementa semper minus, ac minus deficiendo, illa quidem à circulo, cuius radius sit medius proportionalis inter AL, & AE, & hęc quidem à dimidio sphæricæ superficiei; ergo ex generali huius nostræ Methodi Theoremate secundo, circulus, cuius radius est medius proportionalis inter AL, & AE, hoc est, cuius radius est recta AC, æquabitur dimidio sphæricæ superficiei; sed circulus, cuius radius est AC,media proportionalis inter AL, & AE est æqualis superficiei curuæ cylindri, cuius altitudo est AL, baseos autem diameter AE; ergo curua cylindri recti superficies, cuius altitudo est AL, semidiameter sphæræ, baseos autem diameter est AE, diameter sphæræ, æquabitur dimidio superficiei sphæricæ; ergo cylindri recti curua superficies, cuius altitudo est diameter sphæræ, & baseos diameter est itidem diameter eiusdem sphæræ, æquabitur vniuersæ superficiei sphæricæ; At verò cylindri recti curua superficies ad basin est, vt latus, seu altitudo ad quartam partem diametri baseos; cylindri autem recti, cuius altitudo est diameter sphæræ, baseos verò diameter est diameter itidem sphæræ, habet altitudinem æqualem baseos diametro; ergo huiusmodi cylindri curua superficies erit ad basin, vt baseos diameter ad sui quartam partem, hoc est in ratione quadrupla, ergo curua superficies cylindri recti, cuius altitudo est diameter sphæræ, baseos autem diameter est diameter itidem ipsius sphæræ, hoc est, cuius basis est circulus maximus eiusdem sphæræ, est ad basin, hoc est ad prædictum circulum maximum in ratione quadrupla, sed sphærica superficies erat æqualis prædicti cylindri recti curuæ superficiei; ergo sphærica superficies quadrupla erit circuli maximi eiusdem sphæræ.Quod oportebat ostendere.

THEOREMA.

Exemplum CII.

Circulus æqualis est triangulo rectangulo, cuius latus vnum circa rectum æquale est radio, latus verò alterum, iisdem circa rectum æquale est peripheriæ eiusdem circuli.

Quoniam enim polygonum circulo inscriptum ad quodcunque triangulum rectangu-

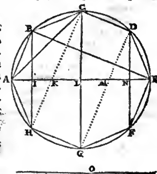
lum rationem habet compositam ex ratione rectæ à centro perpendicularis lateri polygoni ad trianguli latus vnum circa rectum, & ex ratione perimetri ipsius polygoni ad latus alterum eiusdem trianguli circa rectum. At verò recta à centro perpendicularis lateri ipsius polygoni, & perimeter eiusdem, per continuata incrementa semper minus deficiendo à radio, & peripheria circuli, tandem deficere possunt defectu minori quacunque data quantitate, semper eadem iam dictæ rationis compositione seruata; propterea circulus ad idem triangulum rectangulum habebit rationem compositam ex ea, quæ est radij ad trianguli latus, ad quod recta à centro perpendicularis lateri polygoni referebatur, & ex ea, quæ est peripheriæ ad latus alterum; ergo ad triangulum rectangulum, cuius latus vnum circa rectum æquale est radio circuli, & latus alterum æquale est peripheriæ ipsius, circulus rationem habebit compositam ex ratione radij ad se ipsum, & ex ratione peripheriæ ad se ipsam; sed hæc est ratio æqualitatis; ergo circulus æquabitur triangulo rectangulo, cuius latus vnum circa rectum est æquale circuli semidiametro, alterum verò itidem circa rectum æquale est circuli peripheriæ. Quod erat operæ pretium ostendere.

Exemplum CIII.

THEOREMA.

Cuiuscunque portionis sphæricæ superficies æqualis est circulo, cuius radius est recta à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli, qui basis est ipsius portionis.

Intelligatur portioni sphæricæ inscripta figura æquilatera, & parilatera, excepta basi, in orbem acta circa axem ipsius portionis; hunc enim in modum conicæ superficies ipsimet portioni inscriptæ erunt; intelligatur etiam ducta ab extremo diametri ad extremum lateris proximi ipsi diametro. Manifestum est ex hactenus demonstratis, prædictas conicas superficies sphærico segmento inscriptas æquari circulo, cuius radius est medius proportionalis inter subtensam iam dictam, & sphęricę portionis axem, & sic semper in infinitum. Duę igitur sunt quantitates, quarum vna est circulus, cuius radius est medius proportionalis inter subtensam prędictam, & segmenti sphęrici axem, alia est aggregatum ex superficiebus conicis sphęrico segmento inscriptis, quę semper minus deficiendo, illa quidem à circulo, cuius radius est medius proportionalis inter diametrum, & prędictum axem, altera autem à superficie sphęrica, tandem per continuata incrementa deficere possunt defectu minori quacunque datâ quantitate, perpetuò seruata ęqualitatis ratione; ergo circulus, cuius radius est medius proportionalis inter diametrum, & axem prędictum ęquabitur sphęrici segmenti superficiei; sed recta ducta à vertice sphęrici segmenti ad circumferentiam circuli, qui basis est segmenti, est media proportionalis inter diametrum, & prędictum axem segmenti sphęrici, ergo circulus, cuius radius est recta ducta à vertice segmenti sphęrici ad circumferentiam circuli, qui basis est prędicti segmenti, ęquabitur superficiei eiusdem sphęrici segmenti.



Aduertendum est autem, quòd, si polygonum foret ęquilaterum, & parilaterum, vt in adiuncto schemate, circulo quidem inscriptum ACEG, atque segmentum esset DAF, cui inscripta esset figura ęquilatera, & parilatera, vt vides, exceptâ basi, ita vt rectę DE, EF forent ęquales vnicuique laterum prędictę figurę circuli segmento DAF inscriptę; atque adeò inter se, demonstratio institui posset hunc in modum.

Intelligatur ducta BF, quę necessariò transibit per centrum L; ergo angulus BEF rectus erit; ergo vt BE ad EF, ita FN ad NE; ergo rectangulum BEN ęquabitur rectangulo EFN; ergo quadratum medię proportionalis inter BE, EN ęquabitur quadrato medię proportionalis inter EF, FN; ergo circulus, cuius radius est medius inter BE, EN ęquabitur circulo, cuius radius est medius inter EF, FN; sed circulus, cuius radius est medius

dius inter EF, FN, æqualis est superficiei conicæ DEF; ergo circulus, cuius radius est medius inter BE, EN, æquabitur superficiei conicæ DEF. Sed circulus, cuius radius est medius inter BE, AE, æqualis est omnibus superficiebus conicis circulo inscriptis; ablatis æqualibus ab æqualibus; ergo circulus, cuius radius est medius inter BE, AE, minus circulo, cuius radius est medius inter BE, EN, æquabitur superficiebus conicis inscriptis conico segmento DAF. Sed circulus, cuius radius est medius inter BE, AE, minus circulo, cuius radius est medius inter BE, EN, æqualis est circulo, cuius radius est medius inter BE, AN, vt mox constabit; ergo circulus, cuius radius est medius inter BE, AN, æquabitur superficiebus sphærico segmento DAF inscriptis.

Sunt igitur duę quantitates, nempè circulus, cuius radius est medius inter BE, AN, & superficies constans ex conicis superficiebus inscriptis sphærico segmento DAF, quę per continuata incrementa semper, ac semper minus deficiendo, illa quidem à circulo, cuius radius est medius inter AE diametrum, & segmentum AN; altera verò à superficie sphęrici segmenti DAF, tandem deficere possunt defectu minori quacunque datâ quantitate, perpetuò seruata ęqualitatis ratione; ergo circulus, cuius radius est medius inter AE, AN, cuiusmodi est AD, ducta à vertice segmenti DAF, ad circumferentiam circuli, qui basis est dicti segmenti, ęquabitur superficiei sphęrici segmenti DAF.

Lemma.

Quod autem circulus, cuius radius est medius proportionalis inter BE, AE, minus circulo, cuius radius est medius proportionalis inter BE, EN, ęqualis sit circulo, cuius radius medius est proportionalis inter BE, AN, sic ostendo. *Circuli enim inter se sunt, vt quadrata semidiametrorum: quadrata verò ipsa sunt inter se, vt rectangula, quibus illa sunt aqualia; at verò rectangulum BEA, minus rectangulo BEN, ęquale est rectangulo sub BE, & AN, ergo circulus, cuius radius est medius proportionalis inter BE, AE, minus circulo, cuius radius medius est proportionalis inter BE, EN, ęquabitur circulo, cuius radius est medius proportionalis inter BE, AN.*

THEOREMA.

Exemplum CIV.

Cylindri recti sphæra circumscripti superficies aqualis est superficiei sphæra.

Sed hoc etiam obiter suprà demonstratum est.

Demonstratur autem, quoniam huiusmodi cylindri latus ęquale est diametro baseos; sed cylindrica superficies ad basin est, vt cylindri latus ad quartam partem diametri baseos, hoc est in huiusmodi cylindro, vt diameter baseos ad sui quartam partem; ergo cylindrica superficies cylindri sphęrę circumscripti, ad basin, hoc est ad circulum maximum sphęrę, erit in ratione quadrupla, sed in eadem ratione ad circulum maximum est sphęrica superficies; ergo superficies cylindri sphęrę circumscripti ęqualis est superficiei sphęrę.

Aliter etiam hoc idem ostenditur. Circulus, cuius radius est recta à vertice hemisphęrij ad circumferentiam circuli, qui basis est eiusdem hemisphęrij, ęqualis est superficiei eiusdem hemisphęrij. Sed recta prędicta est media proportionalis inter diametrum baseos cylindri circumscripti hemisphęrio, & altitudinem eiusdem: atque adeò circulus, cuius radius est prędicta linea, ęqualis est eidem cylindricę superficiei; ergo curua cylindri superficies circumscriptę hemisphęrio ęquabitur superficiei ipsius hemisphęrij; ergo curua superficies cylindri circumscripti sphęrę ęquabitur superficiei ipsius sphęrę.

THEOREMA.

Exemplum CV.

Si Cylindrus rectus sphæra circumscriptus, ac sphæra secentur planis ad axem rectis, erunt singula superficiei cylindrica segmenta segmentis singulis superficiei sphærica aqualia.

Demonstratio facilis; nam recta ducta à vertice segmenti ad circuli circumferentiam, quę communis est sectio plani cylindricam superficiem secantis, & sphęricam, est media proportio-

portionalis inter diametrum sphęrę, hoc est diametrum baseos segmenti cylindrici, & altitudinem portionis sphęrę, atque adeò eiusdem segmenti cylindrici; circulus igitur, cuius radius est prędicta linea ęquabitur, tùm superficiei portionis sphęricę, tùm superficiei portionis cylindricę; superficies igitur curua segmenti cylindri ęquabitur superficiei portionis sphęricę; quod, cùm de toto, & partibus verum sit, si ab ęqualibus totis auferantur partes ęquales, propterea residua erunt ęqualia, ac ob id cylindrica superficies inter parallela plana interiecta ęquabitur superficiei sphęricę inter eadem plana, etiam constitutę.

Exemplum CVI.

THEOREMA.

Segmenta superficiei sphæricæ parallelis circulis dissectæ, rationem habent inter se, quam segmenta diametri ad prædictos circulos perpendicularis.

Facilè constat; segmenta enim superficiei sphęricę sunt inter se, vt segmenta superficiei cylindri sphęrę circumscripti, sed hęc sunt, vt segmenta axeos; ergo etiam segmenta sphęricę superficiei erunt inter se, vt segmenta diametri ipsius sphęrę, quę est axis cylindri.

Exemplum CVII.

THEOREMA.

Parabole sesquitertia est trianguli eiusdem baseos, ac altitudinis.

Sit parabole ABC, cuius basis AC, diameter BD, & quia idem ferendum iudicium de semiparabole; propterea ducta sit BC.

Ostendendum est semiparabolen DBHKC, ad triangulum DBC, esse in ratione sesquitertia.

Intelligatur DC diuisa in partes æquales in infinitum, vt exempli gratia diuisa sit in quatuor æquales partes DE, EF, FG, GC, & à punctis E,F,G,C ductæ sint parallelæ ipsi DB, quæ occurrant rectæ BL parallelæ ipsi DC: & ex punctis H,I,K, in quibus prædictæ parallelæ occurrunt perimetro semiparaboles, ductæ sint eidem DC parallelæ, & sic in infinitum per vlteriores diuisiones ipsius DC in æquales partes, adeò vt ductis parallelis ipsis DB, vel LC, parallelogrammum DL, semper in æquales partes diuisum sit, à quibus acceptæ sint partes, ductis rectis parallelis ipsi DC à punctis, in quibus parallelæ ipsi DB, occurrunt perimetro BHIkC; hoc idem fieri intelligatur descripto semicirculo super AC, & ex D ducta perpendiculari DN, cui factæ sint parallelæ ex punctis E,F,G,C, quæ occurrant NV ductæ parallelæ ipsi DC, & ex punctis quibus occurrunt periphæriæ circuli, prædictæ parallelæ, nempè O,P,Q, ductæ sint parallelæ ipsi DC. Intelligatur modo circumductus semicirculus, & vnà cum eo rectangulum NDCV, omniaque rectangula quadranti inscripta, ita vt ex reuolutione quadrantis, fiat hemisphærium, & ex reuolutione rectanguli NDCV, fiat cylindrus: & ex reuolutione rectangulorum intra quadrantem fiant totidem cylindri in hemisphærio.

Quoniam igitur est vt parallelogrammum BE ad parallelogrammum HD, ita recta BD ad rectam HE: sed vt BD ad HE, ita est rectangulum ADC ad rectangulum AEC, vt Archimedes ostendit, & nos etiam aliter superius, de parabola tractantes demonstrauimus, & vt rectangulum ADC, ad rectangulum AEC, ita est quadratum DN ad quadratum EO, ex natura circuli; ergo vt quadratum DN ad quadratum EO, ita erit parallelogrammum BE, ad parallelogrammum HD; sed vt quadratum DN ad quadratum EO, ita est cylindrus NE ad cylindrum OD; ergo vt parallelogrammum BE, ad parallelogrammum HD, ita cylindrus NE ad cylindrum OD; & sic de reliquis.

Sunt igitur quatuor quantitates proportionales, quarum prima est figura constans ex parallelogrammis semiparabolæ inscriptis: secunda est parallelogrammum DBLC: tertia est figura constans ex cylindris hemisphærio inscriptis: quarta demum est cylindrus factus ex reuolutione rectanguli DV, circa axem DC: quinta est semiparabolę DBC: & sexta est hemisphę-

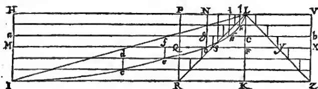
hemisphærium. Quatuor autem proportionales prædictæ sic se habent, vt per continuatã incrementa, prima figura constans ex parallelogrammis semiparabolæ inscriptis, ab ipsa semiparabole quinta; item & tertia figura constans ex cylindris hemisphærio inscriptis, ab ipso hemisphærio sexta, semper in infinitum minus, ac minus deficiendo, deficere randem possint defectu minori quacunque dati quantitate, perpetuò tamen eadem seruata ratione, primę ad secundam, & tertiæ ad quartam; propterea ex generali huius Methodi Theoremate octauo, nempè semiparabole DBC, ad secundam scilicet parallelogrammum DBLC, erit vt sexta hęmisphærium, ad quartam cylindrum. Sed hęmisphærium ad cylindrum est in ratione sub sesquialtera; ergo semiparabole ad parallelogrammum DBLC erit in ratione subsesquialtera; ergo, parallelogrammũ DBLC ad semiparabolen erit in ratione sesquialtera. Itaque si parallelogrammum DL valet 6, semiparabole DBHKC valebit 4; triangulum verò DBC dimidium parallelogrammi valebit 3; ergo semiparabole DBHKC ad triangulum DBC est in ratione sesquitertia; ergo integra parabole ABC ad inscriptum sibi triangulum eiusdem baseos, ac altitudinis erit in ratione sesquitertia.

THEOREMA.

Exemplum CVIII.

Parabole sesquitertia est trianguli eiusdem baseos, ac altitudinis.

Sit semiparabole IOLH, cui inscriptum sit triangulum ILH. Dico semiparabolen ad prædictum triangulum esse in ratione sesquitertia.



Compleatur rectangulum IHLk: mox protracta HL ad partes L in V, ita vt LV, sit æqualis Lk. Compleatur quadratum KLVZ,& in LK sumptis quotcunque punctis æquè inter se distantibus, per ea ducantur parallelæ alterutri ipsarum HV, IZ, ex quibus per F ducta sit MX, & per C ducta sit a b: agatur LZ occurrens FX in Y: fiat LP æqualis LV: agatur PR parallela ipsi LK, factumque sit quadratum RPLK: agatur LR occurrens MF in S: factumque sit triangulum LRZ, transiens per coni axem. Intelligantur ductæ rectæ parallelæ LK, per puncta, in quibus secantur rectæ RL, LZ, ab ijs quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipsarum HV, IZ, ita vt triangulo RLZ, sit circumscripta figura constans ex tot rectangulis æqualis altitudinis, in quot diuisum est rectangulum RPVZ; atque adeo cono RLZ, circumscripta sit figura solida constans ex tot cylindris æqualis altitudinis FC, in quot eiusdem altitudinis diuisus est cylindrus RPVZ: & per punctum O, intersectionis perimetri paraboles cum MX, ducta sit ON, parallela ipsi HI, intersecans a b in g, & ita fiat in reliquis punctis intersectionis perimetri paraboles cum rectis, quæ fuerunt ductæ parallelæ alterutri ipsarum HL, IK: vt hi, kl, &c. vnde trilineo ILK circumscripta sit figura, ductis dc, fe, &c. constans ex tot rectangulis eiusdem altitudinis, in quot diuisum erat rectangulum HK, seu quadratum KV.

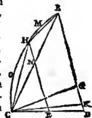
Quoniam igitur, vt est, ex natura paraboles, quadratum HI, ad quadratum NO, hoc est quadratum KL, ad quadratum LF, hoc est quadratum XF, ad quadratum FY, ita HL, ad LN, hoc est IK, ad OF, hoc est MF, ad FO; vt autem quadratum FX, ad quadratum FY, seu quadratum QX ad quadratum SY, hoc est circulus, cuius diameter QX, ad circulum, cuius diameter SY, ita cylindrus basin habens circulum, cuius diameter QX, altitudinem FC, ad cylindrum basin habentem circulum, cuius diameter SY, eiusdem altitudinis FC; & vt MF ad FO, ita rectangulũ sub MF, & FC, ad rectangulũ sub OF, & FC; ergo vt rectangulũ sub MF, & FC, ad rectangulum sub OF, & FC, ita cylindrus basin habens circulũ, cuius diameter QX, altitudinem FC, ad cylindrum habentem basin circulum, cuius diameter

meter SY, altitudinem FC, & ita semper; quare vt rectangulum HIkL, ad figuram circumscriptam trilineo ILK constantem ex rectangulis &c. ita cylindrus RV, ad figuram ex cylindris circumscriptam cono RLZ; contra, & conuertendo &c. Sunt igitur quatuor quantitates proportionales, nempè vt prima circumscripta trilineo ILK, ad secundam rectangulum HIkL, ita tertia circumscripta cono RLZ, ad quartam cylindrum PRZV; & quidem prima semper minus excedendo quintam, puta trilineum ILk, excedere tandem potest excessu minori quacunque data quantitate, ita etiam tertia, nempè circumscripta cono, respectu sextæ scilicet coni, perpetuò tamen eadem seruata ratione primæ circumscriptæ trilineo ILK, ad rectangulum HIKL secundam; quæ est tertiæ circumscriptę cono RLZ; ad quartam cylindrum RPVZ, propterea erit ex generali Theoremate nono huius Methodi, vt quinta trilineum IOLK, ad secundam rectangulum HIkL, ita sexta conus RLZ ad quartam cylindrum RPVZ, & conuertendo &c. Sed cylindrus RPVZ, triplus est coni RLZ; ergo rectangulum HIkL, triplum erit trilinei IOLk. Si igitur rectangulum HIKL, valet 6, trilineum IOLK valebit 2; triangulum autem ILK, seu IHL, valebit 3, & spatium parabolicum IOLI, valebit vnum; quare semiparabole HIOL, valebit 4; sed triangulum IHL, valebat 3; ergo semiparabole HIOL, sesquitertia erit trianguli HIL; ergo integra parabole, sesquitertia erit trianguli eiusdem baseos, ac altitudinis.

Exemplum CIX.

THEOREMA.

Parabola sesquitertia est trianguli eiusdem baseos, ac altitudinis.



Quoniam quod de parabole, & de integro circulo dicitur, illud itidem de semiparabola, & de semicirculo dicendum; propterea esto semiparabole DBC; agatur BC. Dico semiparabolen DBHC ad triangulum DBC esse in ratione sesquitertia. Diuidatur DC bifariam in E; ducatur EH parallela diametro DB; agantur BH, HC. Manifestum est, ex Archimede de Quadratura Paraboles, triangulum DBC, quadruplum esse trianguli BCH; diuidatur DB, in G, ita vt BG tripla sit ipsius GD; agaturque GC; manifestum est ex Prima Sexti, triangulum DGC subtriplum esse trianguli CGB, cuius subtriplum quoque remanet triangulum CBH. Diuidatur GD in K, ita vt GD, ad DK sit in ratione quadrupla; ergo Gk ad kD, erit in ratione tripla; ergo triangulum GCk, ad triangulum CKD, erit in ratione tripla. Inscribantur portiunculis parabolicis BMH, HOC triangula: manifestum est, ex Archimede triangulum CBH, ad aggregatum triangulorum BMH, HOC, esse in ratione quadrupla; ergo si triangulum BCH, valet 4, aggregatum triangulorum BMH, HOC, valebit vnum; sed si triangulum CBH valet 4, triangulum CGB, valebit 12, & triangulum CGK valebit 3; nam CGD subtriplum est ipsius CGB; vnde valet 4. At CDK valet 1, ob id CKG valet 3 proportionalibus autem proportionalia si addantur, proportionalia emergunt; proportionalibus igitur in ratione tripla, triangulis CGB, & CBH additis proportionalibus in eadem ratione, triangulo CkG, & aggregato triangulorum BMH, HOC, fient proportionalia in eadem ratione, nempè triangulum CKB, & triangulum CBH, vnà cum aggregato triangulorum BMH, HOC, & sic semper in infinitum. Duæ igitur sunt quantitates, nempè triangula CGB, & CBH, quæ semper minus deficiendo à duabus alijs quantitatibus, nempè triangulo CDB, & segmento parabolico CBHO, perpetuò seruata ratione tripla; propterea ex generali huius Methodi Theoremate secundo, triangulum CDB ad prædictum segmentum parabolicum CBHO, erit in ratione tripla; ergo componendo semiparabole CDPHO, ad idem erit in ratione quadrupla; ergo eadem semiparabole CDBHO, ad triangulum CDB, erit in ratione sesquitertia.

Exemplum CX.

THEOREMA.

Omnis semiparaboles centrum grauitatis est in ea recta linea quæ diametro æquidistans, ita diuidit basin, vt pars, quæ est ad curuam sit ad reliquam, vt 5 ad 3.

Iisdem

Iisdem positis, & eodem schemmate repetito; taxetur DC, 24, & tam EC, quàm DE, valebit 12: diuidatur DC in F, vt CF ad FD sit, vt 15, ad 9: diuidatur eadem DC in I, vt CI, ad ID sit, vt 16, ad 8, hoc est in ratione dupla; cùm igitur DF valeat 9, DI, valeat 8, IF valebit 1; cùmque FC valeat 15, FE, valebit 3; ergo FE ad FI, est in ratione tripla, hoc est in ratione trianguli CGB, ad triangulum CBH, & sumpta quarta parte trianguli DGC, quadrifariā diuisa basi DG, ac īscriptis triāgulis ī segmētis DMH, HOC,& sic in infinitum, atque adeò in ratione trianguli CDB, ad segmentum parabolicum CBHO. Quoniam autem si diameter DB fuerit perpendicularis horizonti, etiam ei parallela ducta IM, erit horizonti perpendicularis, quæ per centrum grauitatis trianguli CGB transibit, cùm CI, ad ID, sit in ratione dupla, eaque parallela sit basi GB. Item EH, cùm bissecet BC basin trianguli BCH in N, & tendat ad H verticem ipsius trianguli, transibit per centrum grauitatis ipsius, itaque triangulum CGB pendebit ex I, & triangulum CBH pendebit ex E; cùmque reciprocè sit, vt FE ad FI, propterea æquiponderabunt ex puncto F, non dissimiliter in infinitum; itaque triangulum CDB pendens ex puncto I, & segmentum parabolicum CBH pendens ex puncto E, æquiponderabunt ex puncto F; ergo commune centrum grauitatis erit in recta FL ducta parallela diametro DB, atque adeo perpendicularis horizonti; ergo semiparabole æquiponderat ex F, atque adeo eius centrum grauitatis erit in recta FL, aliòquin ex F, non æquiponderaret; sed CF, ad FD, est vt 15, ad 9, seu vt 5, ad 3; ergo &c.

Ad hanc etiam Methodum ex alijs aliquam reduci, ne dum ex hactenus dictis intelligi poterit, sed etiam ex infra dicendis, & primò ex ijs, quæ modo subijciemus, vbi apertè constabit, Theorema demonstratum à Pappo Alexandrino Libro quarto Collect. Math. Prop. 21, eodem etiam adhibito schemate, hac nostra Methodo ostendi posse, ac eius demonstrandi rationem ad hanc reduci; immò simpliciori modo illud idem absolui, vbi facilè constabit difficultatem esse positam in indaganda preparatione idonea, quæ huic Methodo inseruiat, ea siquidem comparata statim patet aditus ad ipsam demonstrationem contexendam. Sit igitur.

THEOREMA.

Exemplum CXL.

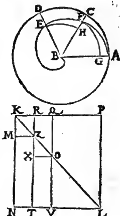
Spatium linea spirali in primā circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis, contentum, tertia pars est circuli primi.

Sit circulus ADC, cuius centrum B, & spiralis BE FA, initium; rectaque BA semidiameter, & reuolutionis principium.

Exponatur rectangulum KL, & LP, accepta AC, circumferentiæ circuli parte quadam, sumptaque linea recta KR, quæ ad KP, eam habeat rationem, quam AC circumferentiæ pars ad integram circumferentiam: agatur BC ex puncto R agatur RT parallela ipsi KN, & ipsi kR, parallela MZ, & centro B, interuallo BF, arcus describatur FG. Quoniam itaque est vt BA, ad AG, seu BC ad CF, ita integra circumferentia ad circumferentiam AC, hoc est PK ad KR, & vt PK ad kR, ita LK ad KZ, seu TR, ad RZ; ergo vt BC ad CF, ita TR ad RZ, & per conuersionem rationis, vt CB ad BF, ità TR ad TZ; quare vt quadratum CB ad quadratum BF, ita quadratum TR ad quadratum TZ, sed vt quadratum CB ad quadratum BF, ita sector ABC, ad sectorem FBG, & vt quadratum RT, ad quadratum TZ, ita cylindrus à parallelogrammo KT, circa axem NT factus ad cylindrum à parallelogrammo MT circa eundem axem; ergo vt sector ABC, ad sectorem FBG, ita cylindrus à parallelogrammo kT, circa axem NT, ad cylindrum à parallelogrammo MT, circa eundem axem.

Non dissimiliter si circumferentiæ AC fiat æqualis CD circumferentia, & rectæ KR fiet æqualis RQ; erit enim vt sector DBC ad sectorem EBH, ita cylindrus à parallelogrammo RV circa axem TV ad cylindrum à parallelogrammo VX, circa eundem axem. Nec dissimiliter de reliquis: vnde erit vt totus circulus ad omnes figuras ex sectoribus inscriptas lineæ spirali, ita cylindrus à parallelogrammo NP, circa axem MN ad omnes figuras ex

cylindris ipsi cono, qui fit à triangulo kNL, circa axem NL inscriptas. Sunt igitur quatuor quantitates proportionales, quarum prima est figura constans ex sectoribus spatio spirali inscriptis, secunda est circulus, tertia est figura constans ex cylindris inscriptis cono, quarta est cylindrus ex rectangulo NkPL reuoluto circa NL; quinta est spatium spirale: sexta est conus; Et quidem prima minus deficiendo à quinta, nempè spatio spirali, & tertia à sexta scilicet à cono, semper in infinitum per continuata incrementa minus deficiendo deficere tandem possunt defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò seruata eadem ratione primæ ad secundam, quæ tertiæ ad quartam; propterea ex generali huius Methodi Theoremate 8. quinta ad secundam in eadem erit ratione, in qua sexta ad quartam, sed sexta ad quartam, nempè conus ad cylindrum est in ratione subtripla; ergo quinta ad secundam, nempè spatium spirale ad circulum erit in ratione subtripla; ergo circulus ad spatium spirale erit in ratione tripla.



Hoc idem perfici potest per circumscriptionem figuræ constantis ex sectoribus respectu spatij spiralis, & ex cylindris respectu coni.

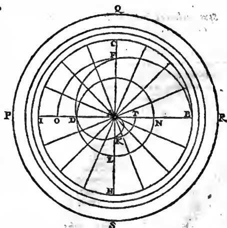
Exemplum CXII.

THEOREMA.

Spatium linea spirali in prima circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis contentum, tertia pars est circuli primi.

Sit circulus, cuius centrum A, semidiameter AB, & in eo linea spiralis AKDFB, atque adeo spirale spatium comprehensum hac linea prædicta, & recta AB. Dico huiusmodi spatium subtriplum esse circuli, cuius centrum A, semidiameter AB. Intelligatur diuisa semidiameter AB, vel IA bifariam in N, vel D. Centro A, interuallo AD, vel AN, descriptus sit semicirculus DLN.

Quoniam igitur AD est ad AI, vt 1, ad 2, erit semicirculus DLN, ad semicirculum ICB, vt 1, ad 4. Intelligatur autem descriptus circulus PQRS, centro quidem A, quem circumscriptum appello, ita vt excedat circulum ICBH, excessu, qui sit æqualis semicirculo ICB. Manifestũ est, si semicirculus DLN, valet 1, semicirculum ICB, valere 4. Deinde dum semicirculus ICB, valet 4, etiam & IHB, valebit 4, quemadmodum excessus circuli PQRS, supra circulum ICBH, valebit 4; at verò aggregatum ex semicirculis DLN, & ICB valebit 5: vnde ad circulum PQRS, 12. aggregatum ex tribus terminis æqualibus, nempè semicirculo ICB, IHB, & excessu circuli PQRS supra circulum ICBH, habebit maiorem rationem, quàm subtriplam. Intelligatur iam ducta CH cum IB ad rectos angulos in A, factique sint sectores ABC, AFO, ADL, & AkT; sitque descriptus centro A, circulus alter, qui excedat circulum IBCH excessu, qui sit æqualis quadranti ABC. Manifestum est, si AT, vel AK, valet vnum, AL, seu AD, valere 2, AO, seu



seu AF, valere 3; quare sector AKT valebit vnum, sector ADL valebit 4, & AFO, valebit 9, & AIC valebit 16, quantum etiam valebit quadrans ABC, & quisque trium reliquorum, itemque excessus circuli prædicti supra circulum ICBH. Aggregatum autem ex sectoribus se habet, vt 30, & aggregatum ex quatuor quadrantibus vnà cum prædicto excessu se habent, vt 80; ratio autem 30, ad 80; hoc est 3, ad 8 magis accedit ad rationem subtriplam, quàm ratio 5, ad 12; decrescit igitur excessus supra rationem subtriplam. Deinde, cùm facti fuerint quatuor sectores, fiant octo, & fiat circulus superans circulum ICBH, excessu, qui sit æqualis octauæ parti circuli ICBH. Deinde sectores fiant sexdecim, factusque sit circulus superans circulum ICBH, excessu, qui sit æqualis decimæ sextæ parti ipsius circuli ICBH; atque hunc in modum intelligatur procedi in infinitum; semper enim illa proportio magis accedet ad subtriplam. Quatuor igitur sunt quantitates, quarum duæ exceeduntur, nempè circulus ICBH, & spatium spirale AKDFBA; duæ autem sunt excedentes, nempè circulus PQRS respectu circuli ICBH, & figura constans ex sectoribus circumscripta spatio spirali respectu ipsius spatij spiralis, quæ quidem per continuata decrementa semper minus excedendo sibi respondentes quantitates, excedere tandem possunt excessu minori quacunque data quantitate, ita tamen vt tertia, nempè figura sectoribus constans spirali spatio circumscripta ad primam, videlicet ad circulum circumscriptum sit in maiori ratione, quàm subtripla, ad hanc semper magis accedens; ergo quarta, nempè spatium spirale ADFBA, ad secundam, videlicet ad circulum ICBH, erit in hac ipsa ratione subtripla.

THEOREMA. Exemplum CXIII.

Linea spiralis æqualis est semicircumferentiæ sui circuli.

Si namque describatur circulus, cuius radius sit recta, quæ est principium reuolutionis, atque peripheria ipsius diuisa sit in partes æquales; à diuisionum autem punctis, ductis rectis ad centrum occurrentibus perimetro spiralis spatij, eodem autem centro descriptis arcubus respondentibus singulis radijs ipsius spiralis, itaut singulis arcubus æqualibus peripheriæ respondeant singuli arcus circumstantes lineam spiralem, atque vnus æqualium sit maximus circumstantium perpetuò decrescentium, atq; adeò desinentium in punctum, erunt quidem æquales multitudine vno plures; at verò alij spiralem circumstantes, erunt in ratione radiorum decrescentium æqualibus defectibus, ergo aggregatum arcuum æqualium, ad aggregatum arcuum circumstantium spiralem, erit in ratione dupla; quod reiteratis diuisionibus in infinitum cum perpetuò contingat; & circuli circumferentia ad ipsam lineam spiralem erit in ratione dupla.

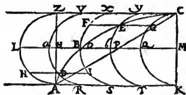
Quod cum aliqui, minus benè intellexerit, crediderunt, non hanc esse rationem inter circuli peripheriam, & spiralem lineam; verum si res attentè perpendatur, Methodo hac nostra vtentes, comperiemus rem sic se habere.

At verò alia lineæ spiralis symptomata, alibi nostra contemplatione persequemur.

THEOREMA. Exemplum CXIV.

Spatium cycloidale ad circulum sui genitorem est in ratione tripla.

Sit semicycloidale spatium ABCK, sitque semicirculus genitor CGK, cuius centrum M; compleatur rectangulum AZCK; & super AZ descripto semicirculo ALZ, per M, ducta sit ML, parallela alterutri ipsarum AK, ZC; diuisaque alterutra earundem AK, ZC, in quotlibuerit partes æquales AR, RS, ST, TK; vel ZV, VX, XY, YC: At verò in recta LM acceptis punctis Q, P, O, ita vt his, tanquàm centris, describantur circuli tangentes rectas AK, ZC, in punctis TY, SX, RV: mox autem per puncta D, & E, accepta in linea cycloidali ABC, æquè remo-



ta à rectis ZC, AK, ducantur rectæ FG, HI, æquè distantes ipsis Ak, ZC; agatur AC.

Quoniam igitur figura HZVD, æqualis est ipsi ETKG, altera verò aVXB, æqualis ipsi BSTb, & figura FXYE æqualis est ipsi DRSI, & sic in infinitum per vlteriores descriptiones circulorum. Sunt igitur duæ quantitates ALZCBA, & ABCGK, à quarum vna tot accipiuntur partes, quot in alia illis æquales sumuntur, & quidem in infinitum, ita vt aggregatum posteriorum semper aggregato priorum in vtraque sit maius; atque adeò minus deficiendo per continuata incrementa, tandem deficere possint ab ipsis ALZCBA, & ABCGK, defectu minori quacunque data quantitate, perpetuò seruatâ æqualitatis ratione; ergo ex generali huius nostræ Methodi Theoremate 10. figura ALZCBA, æquabitur ipsi ABCGk; quare figura ALZCGK, nempè quadrilaterum mixtilineum, dupla erit figuræ ABCGK. Sed prædictum quadrilaterum mixtilineum æquale est rectangulo AZCK; ergo rectangulum AZCK, duplum erit ipsius ABCGK; sed rectangulum AZCK, duplum est trianguli ACK; ergo figura ABCGK æquabitur triangulo ACK. Sed triangulum ACK duplum est semicirculi CGk; ergo figura ABCGK, dupla erit semicirculi CGK; ergo spatium semicycloidale ABCGK, triplum erit semicirculi CGK; ergo integrum spatium cycloidale, cuius semi basis AK, altitudo CK, triplum erit circuli sui genitoris, cuius nimirum diameter est Ck; Omne igitur spatium cycloidale triplum erit circuli sui genitoris. Quod oportebat ostendere. Ostendi etiam potest virtute Theorematis secundi immediatè.

Exemplum CXV.

THEOREMA.

Si sit portio hyperboles, ellipseos, vel circuli dimidiâ figurâ non maior, ad diametrum verò constituatur triangulum verticem habens in centro figuræ, basin verò basi portionis æqualem, & parallelam; at quæ deinceps à vertice ad mediam basin pertingit, possit rectangulum comprehensum lineis, quæ inter portiones, basin, & terminos diametri figuræ interijciuntur.

Dico trianguli verticem, atque adeò centrum figuræ esse centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex portione, & prædicto triangulo.

Circumscribantur parallelogramma portioni, & triangulo, quorum omniũ sit eadem latitudo, & per centrum figuræ, ac trianguli verticẽ intelligatur ducta recta parallela trianguli, vel portionis basi (huiusmodi enim bases ex hypothesi sunt parallelæ) demonstrabitur enim duorum quorumlibet oppositorum parallelogrammorum esse in huiusmodi linea, atque adeò totius magnitudinis, ex duabus figuris vtrinque ordinatè circumscriptis compositæ in prædicta esse linea; at verò cùm in diametro sint centra grauitatis vtriusque figuræ circumscriptæ, in eadem quoque erit eiusdem compositæ magnitudinis centrum grauitatis; ergo centrum grauitatis magnitudinis compositæ debebit esse in puncto, vbi linea prædicta cum diametro se intersecat; sed huismodi punctum est trianguli vertex, figuræque centrum; ergo centrum grauitatis magnitudinis compositæ erit, vbi trianguli vertex, centrumque figuræ.

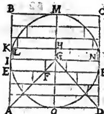
Quoniam autem quantumcunque diminuantur latitudines parallelogrammorum, atque adeò figura circumscripta semper minus, ac minus excedendo portionem, & triangulum, cuius vertex est figuræ centrum, excedere possunt excessu minori quacunque datâ quantitate, eodem perpetuò grauitatis centro retento, hoc est perpetuò seruatâ eadem ratione circumscriptæ ad circumscriptam, quæ est reciprocè distantiæ centri grauitatis vnius à centro figuræ, ad distantiam alterius centri grauitatis ab eodem centro figuræ; ergo ex generali huius Methodi Theoremate 2., triangulum ad portionem erit reciprocè, vt distantia centri grauitatis portionis à centro figuræ, ad distantiam centri grauitatis trianguli ab eodem centro figuræ; ergo ex ipso centro figuræ triangulum, & portio æquiponderabunt; ergo figuræ centrum, vbi vertex trianguli, erit centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex portione, & prædicto triangulo.

Exemplum CXVI.

THEOREMA.

Sphæra ad conum, cuius altitudo est semidiameter, basis verò circulus maximus eiusdem sphæra, est in ratione quadrupla.

Sit



Sit circulus, cuius centrum G, cui circumscriptum sit quadratum ABCD: actisque rectis AG, DG, reuoluatur figura circa axem MO, vt à quadrato procreetur cylindrus, à circulo, sphæra, à triangulo AGD, conus. Dico sphæram quadruplam esse coni prædicti.

Inscribatur hemisphærio figura constans cylindris æquè altis, diuisaque OG in tot partes, in quot GM, & per puncta sectionum transeant plana ad axem erecta, ita vt in solido à triangulo AIG, reuoluto, sit inscripta figura constans tubis cylindricis æquè altis, quorum vnus esto, cuius sectio sit rectangulum IF.

Quoniam igitur cylindrus LN æqualis est tubo cylindrico IF, & ita deinceps de alijs hemisphærij cylindris relatis ad cylindros, quibus constat solidum à triangulo AGI reuoluto, atque figura hemisphærio inscripta vlteriori diuisione per continuata incrementa, & figura cylindris constans inscripta solido à triangulo AIG reuoluto, per continuata itidem incrementa, ab hemisphærio, & à solido ex reuolutione trianguli AIG, tandem deficere possunt defectu minori quacunque datâ quantitate, semper eandem æqualitatis rationem seruantes; propterea ex generali Theoremate nostræ Methodi secundo, hemisphærium erit æquale solido à triangulo AIG reuoluto; sed huiusmodi solidum duplum est coni, cuius triangulum per axem est AGD; ergo hemisphærium duplum erit prædicti coni; ergo sphæra erit quadrupla eiusdem coni.

Lemma.

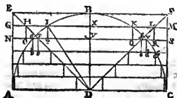
Quod autem cylindrus LN sit æqualis tubo cylindrico IF, sic ostendo. *Est enim cylindrus LN, ad tubum IF, vt quadratum LH, ad rectangulum EFP; namque cylindrus, & tubus cylindricus sunt eiusdē altitudinis; sed quadratum LH, est æquale rectāgulo MHO, & huic est æquale rectangulum EFP, cum EF, sit æqualis AE, seu BK, seu HM, & reliqua HO, æqualis FP, ob æqualitatem inter EP, & MO; ergo & cylindrus LN, æquabitur tubo IF.*

Superius tamen Theorema aliter demonstrabitur, si primùm eadem Methodo ostenderimus illud, nimirùm,

THEOREMA.

Exemplum CXVII.

Si super hemisphærij basi constitutus fuerit cylindrus eiusdem cum hemisphærio altitudinis. Dico excessum huius cylindri supra hemisphærium æqualem esse cono eiusdem baseos, ac altitudinis cum ipso hemisphærio.



Esto hemisphærium ABC, cuius centrum D: cylindrus autem sit huiusmodi hemisphærio circumscriptus, cuius rectangulum per axem sit AEFC. Dico excessum huius cylindri supra hemisphærium æqualem esse cono eiusdem baseos, ac altitudinis cum ipso hemisphærio.

Ex centro D, ductis DE, DF, fiat triangulum EDF, repræsentans illud, quod est communis sectio plani secantis conum per axem: ductaque sit DB perpendicularis ipsi EF, quæ intelligatur diuisa in partes æquales BX, Xy, &c. & per puncta diuisionum intelligantur ductæ GM, NS &c. æquidistantes ipsi EF, vel AC, occurrentes rectis DE, DF, in punctis H, T, &c., & L, f, &c., & occurrentes peripheriæ ABC in punctis I, a, &c. insuper KV &c. Et ex hisce punctis HO, Tc, &c. Item LR, fe, &c. parallelæ ipsi BD, quemadmodum etiam ex punctis I, a, &c. ductæ sint IP, a b &c. Insuper ex punctis K, V &c. ductæ sint kQ, Vd &c. Manifestum est figuris AEB, BFC, futuras esse circumscriptas figuras ex rectangulis, quemadmodum triangulo EDF, circumscriptam esse figuram constantem ex rectangulis. Si igitur concipiatur reuolui circa axem BD rectangu-

ctangulum AEFC; manifestum est, ex reuolutione huiusmodi rectanguli fieri cylindrum; ex reuolutione semicirculi ABC, fieri hemisphærium: & ex reuolutione omnium illorum rectangulorum, fieri cylindros.

Quoniam igitur circulus, cuius radius IX, vnà cum circulo, cuius radius HX, æqualis est circulo, cuius radius GX, vt mox demonstrabo; ergo cylindrus habens basin circulum, cuius radius IX, vnà cum cylindro habente basin circulum, cuius radius HX, æquabitur cylindro habente basin circulum, cuius radius GX; ergo cylindrus habens basin circulum, cuius radius HX, æquabitur cylindro habente basin circulum, cuius radius GX, minus cylindro habente basin circulum, cuius radius IX. Sed cylindrus habens basin circulum, cuius radius GX, minus cylindro habente basin circulum, cuius radius IX, æqualis est annulo, cuius communis sectio, à plano per centrum normaliter cadente, sunt rectangula NGIP, QKMS; ergo cylindrus habens basin circulum, cuius radius HX, æquabitur prædicto annulo,& sic de omnibus alijs. Vnde cylindrus HORL, æquabitur annulo GP, KS &c. Itaque solida figura circumscripta cylindro-cauo-sphærico, constans ex cylindris æquè altis cum ijs, quibus constat figura circumscripta cono, huic æquabitur figuræ. Sunt igitur duę quantitates, quarum vna est figura solida circumscripta cylindro-cauo-sphærico, altera circumscripta cono, quæ per continuata decrementa semper minus excedendo, excedere possunt excessu minori quacunque data quantitate, perpetuò seruatâ æqualitatis ratione. Ergo ex generali huius nostræ Methodi Theoremate 4., cylindro-cauo-sphæricus, hoc est excessus cylindri eiusdem baseos, & altitudinis cum hemisphærio supra ipsum hemisphærium, æquabitur cono, cuius triangulum per axem est EDF: sed huiusmodi conus eiusdem est altitudinis, & baseos cum hemisphærio; ergo excessus prædicti cylindri supra hemisphærium æquabitur prædicto cono.

Lemma.

Quod autem circulus, cuius radius IX, vnà cum circulo, cuius radius HX, æqualis sit circulo, cuius radius GX, sic ostendo. Intelligatur ducta DI.

Quoniam igitur EB, HX, sunt parallela; ergo vt EB ad BD, ita HX, ad XD: sed EB æqualis est BD; ergo HX æquabitur XD; ergo quadratum HX, æquabitur quadrato XD. Sed quadratum ID, æquale est quadratis IX, XD; ergo quadratum ID æquabitur quadratis HX, IX; sed ID æqualis est AD, seu GX, atque adeò quadratum ID æquale erit quadrato GX; ergo quadratum GX æquabitur quadratis HX, IX. Sunt autem circuli, vt quadrata diametrorum, siue semidiametrorum; ergo circulus, cuius radius GX, æquabitur circulis, quorum vnus sit radio HX, alter autem IX; & sic de alijs omnibus &c. Hinc per modum Corollari infertur.

Exemplum CXVIII.

THEOREMA.

Sphæra ad conum, cuius altitudo est semidiameter, basis verò circulus maximus eiusdem sphæræ est in ratione quadrupla.

Ex demonstratis constat, quod superiùs ostendendum suscepimus, nempè sphæram quadruplam esse coni, cuius altitudo est semidiameter sphæræ, basis autem circulus maximus eiusdem; siquidem si cylindrus valet tria, conus valet vnum, ergo excessus cylindri supra hemisphærium eiusdem baseos, ac altitudinis, seu supra hemisphærium, cui cylindrus est circumscriptus, valebit vnum, quare hemisphærium valebit duo; ergo hemisphærium erit duplum prædicti coni eiusdem baseos, ac altitudinis cum hemisphærio; quare integra sphæra, erit eiusdem coni quadrupla. Item.

Exemplum CXIX.

THEOREMA.

Sphæra æqualis est cono, cuius basis est æqualis superficiei sphæræ, altitudo autem radius eiusdem.

Conus

Coni enim eiusdem altitudinis sunt inter se, vt bases, ergo conus cuius basis est æqualis superficiei sphæricæ, altitudo radius eiusdem, ad conum cuius basis est circulus maximus sphæræ; altitudo radius eiusdem, erit quadruplus, sed sphæra est etiam quadrupla ad huiusmodi conum, cuius basis est circulus maximus altitudo radius sphæræ, ergo &c.

Ex dictis etiam, & illud.

THEOREMA.

Exemplum CXX.

Omnis sector sphæræ æqualis est cono, cuius altitudo est radius sphæræ: basis autem æqualis sectoris sphæricæ superficiei.

Conus enim, cuius altitudo est semidiameter sphæræ ad ipsam sphæram, est vt basis, ad sphæræ superficiem, sed basis coni, eadem est, ac sphærica superficies ipsius sectoris; ergo conus, cuius altitudo est radius sphæræ ad ipsam sphæram est, vt sphærica superficies sectoris ad sphæræ superficiem; sed vt sphærica superficies sectoris ad sphæræ superficiem, ita sector ad sphæram, ergo conus, cuius altitudo est radius sphæræ, ad ipsam sphæram est, vt sector ad eandem sphæram: ergo conus, cuius altitudo est radius sphæræ, basis autem sphærica superficies sectoris, æqualis est sectori eiusdem sphæræ &c.

Ex hactenus quoque demonstratis constabit facilè, propositio quæcunque alia de sphæra, & Cylindro; de quibus summa cum Laude Archimedes disseruit.

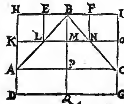
THEOREMA.

Exemplum CXXI.

Cylindrus triplus est coni, eiusdem altitudinis, ac baseos.

Si quis assumat, quod iam demonstratum est, nimirum prisma, triplum esse pyramidis eiusdem baseos, ac altitudinis; statim hoc nostra methodo constabit propositum; si namque nos intelligimus circulo, qui est coni basis circumscriptum polygonum, regulare, ac ordinatum, & super illum erectam prisma, eiusdem altitudinis cum cono, atq; cylindro itemque pyramis circumscripta cono; prisma, & pyramis per continuata quidem decrementa, semper minus excedendo, illam quidem cylindrum, hæc autem conum, tandem excedere poterunt excessu minori quacunque data quantitate, semper seruata eadem ratione tripla: ergo ex generali huius nostræ Methodi Theoremate quarto; cylindrus ad conum erit in ratione tripla.

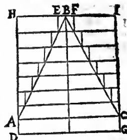
Quod si quis velit non vti eo Theoremate tanquam demonstrato, sed potius generali ratione Theorema contexere complectens, ne dum cylindrum, & conum, sed etiam prisma, & pyramidem &c. procedet ad eum, qui sequitur modum.



Præmittendum est, quod si fuerit parallelogrammum atque triangulum eiusdem altitudinis, ac baseos, vt parallelogrammum AHIC, triangulum verò ABC; fueritque parallelogrammum ipsum diuisum in quotcunque parallelogramma æquè alta lineis parallelis alterutri ipsarum AI, AC: parallelogrammo autem prædicto AHIC, sit alterum additum DACG, vni ipsorum æqualium, æquale, nimirum diuisa BP bifariam in K, & per M ducta KO parallela alterutri AC, HI, & protracta ad Q vt PQ sit æqualis MP, & per Q ducta DG parallela ipsi AC &c.

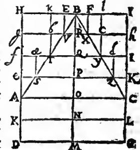
At verò ipsi triangulo ABC circumscripta sit figura constans ex parallelogrammis, cuiusmodi est AE, FC, partibus iam dictis æqualibus rursus bissectis, semper sic procedendo in infinitum, augebitur multitudo parallelogrammorum, in quæ diuisum erat parallelogrammum AHIC, item & eorum quibus constat figura circumscripta triangulo; interim tamen hæc minuetur, quemadmodum parallelogrammum DI in omni bissectione, abiecto dimidio ipsius parallelogrammi DAGC, ita vt parallelogrammum DHIG, & circumscripta AEFC triangulo ABC per continuata decrementa semper minus excedendo parallelogrammum AHIC, & triangulum ABC, tandem excedere possint excessu minori

quacun-



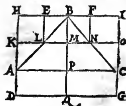
quacunque datâ quantitate, perpetuò tamen seruatâ eadem ratione, quæ est parallelogrammi DHIG, nempè dupla ad circumscriptam AEFC; vnde tandem concluditur parallelogrammum AHIC duplũ esse trianguli ABC. Vbi obserua seriem parallelogrammorum æqualium, vno excedere, seriem eorum, quæ æqualibus excessibus augentur; illud autem respondet O, vel indiuisibili, vnde series crescentium æqualibus excessibus initium ducit.

Quæ vt melius intelligantur sit parallelogrammum AHIC in hoc tertio schemate, itemque triangulum ABC; diuisaque BO bifariam in Q per Q ducta sit fi, parallela ipsi AC, protracta BO ad M, vt OM sit æqualis OQ; per M ducta sit DG parallela ipsi AC: protractisque HA, IC, factumque erit parallelogrammũ DC, additum parallelogrammo AI: per T, & Y, versus rectam HI ductæ sint rectæ Tk, yl, parallelæ ipsi BO, & sic circumscripta erit triangulo ABC, figura constans ex parallelogrammis, vt suprà. Deinde diuisa BQ bifariam in R, & QO bifariam in P, & per R, ducta sit gh, occurrens BA in V, & BC in X; ductis iam dictis ex T, & Y in b, c; mox verò diuisa QO in P bifariam, & per P ducta eK quæ occurrat AB in S, CB in Z: ex S & Z ductæ sint S&, Zd parallelæ ipsi BO, & sic triangulo ABC erit circumscripta figura AEFC ex parallelogrammis constans, vtque OQ diuisa fuit bifariam in P, & QB, in R, ita MO diuidatur bifariam in N, & per N agatur kL parallela ipsi AC, eritque diuisum parallelogrammum DC, vtque parallelogrammum DI, erat duplum prioris figuræ circumscriptæ, ita nunc parallelogrammum KI duplum est figuræ circumscriptæ AEFC.



Contingit autem hoc, vt superius quoque innuimus, quando fuerit series quantitatum iuxtà naturalem numerorum consecutionem continuè crescentium à puncto. vel o, inchoatarum, siue horum multitudo finita, vel infinita fuerit, hoc est siue abitura sit, siue abierit in infinitum, At si fuerit series quantitatum in duplicata ratione terminorum iuxta naturalem numerorum consecutionem, continuè quidem crescentium, à puncto seu o, inchoatorum, infinita tamen, seu pro vt abijt in infinitum erit ad seriem totidem maximo æqualium in ratione subtripla, non tamen si multitudo quantitatum finita fuerit.

Vnde series circulorum, quorum diametri sunt VX, TY, SZ, AC, Arithmeticè proportionales, initio ducto à puncto, seu o, non est subtripla ad totidem circulos maximo, cuius diameter AC, æquales, nempè circuli, quorum diametri sunt gh, fi, eK, AG, kL, neque series cylindrorum, e quibus figura circumscripta cono ABC constat, est in subtripla ratione ad cylindrum DI; nam primo schemate reperito sit parallelogrammũ AHIC eiusdem altitudinis ac baseos cum illo ijsdéque peractis. Manifestũ est, seriem quadratorũ acersito puncto B; ipsarũ LN, AC non propterea subtriplam esse quadratorum ipsarum AC, kO, HI, & quidem quadratorum illorum series ad seriem ipsorum maximo æqualium est in maiori ratione, quàm subtripla, hinc & series cylindrorum æqualibus excessibus se excedentium ad seriem cylindrorũ maximo æqualium est in maiori ratione quàm subtripla. Sit igitur prima quantitas cylindrus DI: secũda cylindrus AI: tertia figura cylindris constans, cono ABC circumscripta quarta idem conus. Cùm itaque prima, cylindrus DI per cõtinuata decremẽta semper minus excedendo secundam cylindrũ AI, tertia figura cylindris constans circumscripta cono ABC minus excedendo conum ABC quartam, excedere tandem possint excessu minori quacunque data quantitate, ita tamen, vt figura cylindris constans circumscripta cono ad primam, scilicet



ad cylindrum DI, sit in ratione maiori, quàm subtripla, per continuata decrementa semper magis ad illam accedens; propterea ex generali Theoremate huius Methodi XI, conus ABC, ad cylindrum AI, erit in ratione subtripla.

Quæ autem de cono, & cylindro, eadem de pyramide, & prismate intelligenda sunt.

THEOREMA.

Exemplum CXXII.

Omne conoides parabolicum dimidium est cylindri eiusdem baseos, ac altitudinis.

Sit conoides parabolicum ABC, cylindrus verò AMNC. Dico conoides parabolicum dimidium esse ipsius cylindri.

Secetur BD, axis in quotcunque partes æquales, quarum infima sit ad basin, GD; factaque sit figura ex cylindris æqualium altitudinum circumscripta prædicto conoidi; cum autem ijs planis parallelis transeuntibus per prædictas sectiones axeos BD, secetur conoides ABC, quibus secatur triangulum per axem ABC; sectiones erunt quidem parallelæ; sit autem circumscripta figura triangulo ABC, constans ex parallelogrammis æqualium altitudinum. At verò cylindrorum, qui sunt circa conoides, & parallelogrammorum, multitudine æqualium circa triangulũ ABC, cylindri quidem duo proximi basi AC, sint AL, EI; at verò parallelogramma totidem illis respondentia inter eadem parallela plana, sint AL, FK. Quoniam itaque ex natura paraboles, vt BG, ad BD, ita quadratum EG, ad quadratum AD, & ita quadratum EH ad quadratum AC, seu circulus, cuius diameter EH, ad circulum, cuius diameter AC, seu cylindrus EI, ad cylindrum AL, ob æquales altitudines; sed vt BG ad BD, ita FG ad AD, seu FO, ad AC, seu parallelogrammum FK, ad parallelogrammum AL; ergo, vt parallelogrammum FK, ad parallelogrammum AL, ita cylindrus EI ad cylindrum AL. Non dissimiliter de reliquis parallelogrammis, quæ sunt circa triangulum ABC, ostendemus, quod proportionalia sint cylindris reliquis, qui sunt circa conoides ABC, bina sumpta; ac propterea componendo erit, vt figura circumscripta triangulo constans ex parallelogrammis, ad parallelogrammum AL, ita figura circumscripta conoidi, ad cylindrum AL; sed vt parallelogrammum AL, ad parallelogrammum AN, ita cylindrus AL, ad cylindrum AN; ergo ex æquali vt figura constans ex parallelogrammis circumscripta triangulo ABC, ad parallelogrammum AN, ita figura constans ex cylindris, ad cylindrum AN, & sic semper in infinitum. Quatuor igitur sunt quantitates, quarum prima est figura circumscripta triangulo ABC; secunda est parallelogrammum AN; tertia est figura circumscripta conoidi ABC; quarta verò cylindrus AN, quæ sic se habent, vt per continuata decrementa, prima minus excedendo quintam, triangulum scilicet ABC, & tertia, figura circumscripta conoidi, per continuata decrementa semper minus excedendo sextam, conoidem ABC, tandem excedere possunt excessu minori quacunque datâ quantitate, perpetuò seruata ratione primæ ad secundam, nempè circumscriptæ triangulo ABC, ad parallelogrammũ AN, & tertiæ ad quartam, nẽpè circumscriptæ conoidi ABC, ad cylindrum AN; propterea ex generali Theoremate nono huius Methodi, vt est quinta ad secundam, nempè triangulum ABC, ad parallelogrammũ AN, ita erit sexta ad quartam, scilicet conoides ABC, ad cylindrum AN; sed triangulum ABC, dimidium est parallelogrammi AN; ergo conoides ABC, dimidium erit cylindri AN.

Sed hoc idem ostendi posset alia ratione. Rectarum enim AC, EH &c. ordinatim applicatarum in parabola quadrata se æqualibus excessibus superant; atque adeò circuli, quorum diametri sunt rectæ prædictæ; at verò circuli, quorum diametri sunt rectæ æquales maximæ omnium ordinatim applicatarum, qui quidem sunt communes sectiones planorum cum superficie cylindri AN, sunt inter se æquales, horumque multitudo vno maior est multitudine illorum; propterea aggregatum omnium illorum circulorum subduplum erit aggregati omnium istorum, sed aggregatum omnium illorum est conoides parabolicum ABC, aggregatum omnium istorum est cylindrus AN; ergo conoides parabolicum ABC, subduplum erit cylindri AN.

Hinc autem infertur per modum Corollarij.

Exemplum CXXIII.

THEOREMA.

Conoides parabolicum ad conum eiusdem baseos, ac altitudinis est in ratione sesquialtera.

Cylindrus enim triplus est coni, itaque si cylindrus valet 3. conoides parabolicum valebit $1\frac{1}{2}$ at verò conus valebit 1; est autem $1\frac{1}{2}$. ad 1. in ratione sesquialtera.

Methodus per Indiuisibilia procedens iterum perpenditur.

Plerunq; expedit Methodum Indiuisibilium accersire.

QVoniam autem haud rarò contingit, vt, vel circumscriptioni, inscriptioniue, quibus in ea, de qua loquimur, Methodo indigemus, nullus ferè sit locus, vel quia non expediat huiusmodi viam calcare; necessè propterea est, tanquàm ἐπίταγμα, alteram nimirùm per Indiuisibilia procedentem accersire, paulò tamen diuersis principijs, quàm à Caualerio stabilitam.

Vsus Indiuisibilium non exposcit continui compositionem ex Indiuisibilibus, tanquàm ex partibus.

Physicè in continuo ad minima quadam deueniendum est.

Non est autem, cur hìc Indiuisibilium osoribus difficultates diluendo, satisfacere studeamus, cum illæ non multum negotij facessant, præsertim ijs, quos opportunus Indiuisibilium vsus non præterit; hic enim haud continui ex Indiuisibilibus, velut ex partibus, compositionem exposcit. Maximè quidem in philosophico puluere exercitati, hanc continui structuram detestantur, existimantes illud diuisibile esse in semper diuisibilia, Geometricè tamen; nam Physicè loquendo, non inconsultò ad minima quædam deueniendum arbitrantur, quibus minora non admittit Natura, vtpotè quæ rebus magnitudinis limites præfiniuit; tamen non propterea tamen Indiuisibilia, quibus, vel continui partes copulentur, vel continuum ipsum finiatur, inficiari licet.

Nihil refert ad concludendam figurarum æqualitatem, quod lineæ actu sint distinctæ in continuo &c.

Hæc tamen haud multum habent momenti, cùm adhuc in Geometricis Indiuisibilium vsus locum obtineat. Nihil enim refert, exempli gratia, ad planarum figurarum concludendam æqualitatem, quòd lineæ actu sint realiter distinctæ in ipsis, dummodò nobis imaginari datum sit, omnes extensiones vnius omnibus extensionibus alterius æquales esse, extensionis nomine intelligendo longitudinem absque latitudine.

THEOREMA I.

Figurarum omnia Indiuisibilia accepta, vt supra, sunt magnitudines inter se rationem habentes.

Continuum ex semper diuisibilibus, tanquàm ex partibus, componitur: ex Indiuisibilibus, tanquàm ex earundem nexibus.

Vel enim omnia Indiuisibilia vnius figuræ sunt æqualia omnibus Indiuisibilibus alterius, vel partìm æqualia, partìm maiora, partìm minora. Vtcunque res se habeat, manifestum est, vnius figuræ Indiuisibilia ad alterius Indiuisibilia rationem habere; nam *λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν*: *rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicata se se mutuò superare.* At sic se habent Indiuisibilia vnius figuræ comparata cum homogeneis Indiuisibilibus alterius; quamobrem necessè est, figurarum omnia quidem Indiuisibilia rationem habere inter se, distributiuè accepta, vnde & collectiuè. Vtcunque igitur accipiantur figurarum Indiuisibilia, sunt magnitudines inter se rationem habentes.

At in dicendorum gratiam.

Partes dantur actu in continuo realiter inter se distinctæ.

Supponendum primò, quod superiùs etiam tetigimus, quodq; apud Philosophos melioris notæ in confesso est, continuum nimirùm ex semper diuisibilibus, tanquàm ex partibus, componi; at ex Indiuisibilibus, veluti ex earundem nexibus, ac etiam terminis, consurgit.

Multitudo ipsarum dicenda est infinita in potentia, nō in actu.

Multitudo partium in continuo nequit dici maxima.

Supponendum secundò, in ipso continuo dari actu partes realiter inter se distinctas, earundemque multitudinem esse dicendam infinitam in potentia, non in actu; propterea quòd dicere de illa tantummodò licet, quod non sit tanta, quin maior esse possit, neque tot sint partes, quin plures; & quidem ex ipsarum partium natura, veluti continui rationem obtinentium, quæ propterea semper diuisibiles existunt, ac ob id earum multitudo per vlteriorem diuisionem capax est incrementi; maxima tamen dici nequit; quoniam hoc ipso, quòd mul-

multitudinem partium continui dico, multitudinem dico, cui per vlteriorem diuisionem partium semper diuisibilium incrementum fieri potest.

Supponendum tertiò, multitudinem Indiuisibilium, scilicet punctorum in linea, linearum in superficie, superficierum in corpore, conditionem eandem cum eius partibus sortiri, quæ, si fuerint potentia infinitæ, sic etiam & Indiuisibilia infinita dicenda sunt.

Multitudo Indiuisibilium in cõtinuo eãdem sortitur conditionem cum eius partibus.

Supponendum quartò, non repugnare dari maius infinito in potentia, quod infinito in actu repugnat; quamobrem, exempli gratia, in linea palmari est multitudo infinita punctorum in potentia, quemadmodum in linea tripalmari, sed in hac, infinita multitudo maior est infinita multitudine, quæ in illa.

Non repugnat dari infinitũ in potentia maius, & minus, quod tamen repugnat infinito in actu.

Supponendum quintò, eandem esse rationem totius quantitatis ad totam, quæ est multitudinis partium proportionalium ad multitudinem partium proportionalium, & quæ est multitudinis Indiuisibilium ad multitudinem Indiuisibilium.

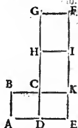
Quæ est ratio totius quantitatis ad totã, ea est multitudinis partiũ proportionaliũ ad multitudinem partium proportionaliũ &c.

Supponendum tandem, mobile moueri motu æquabili super magnitudines ea lege, vt tempus ad tempus sit, quemadmodum spatium ad spatium; & partes proportionales, ac Indiuisibilia temporis, ad proportionales partes, ac Indiuisibilia temporis; & demùm partes proportionales, ac Indiuisibilia spatij, ad partes proportionales, ac Indiuisibilia spatij. His præhabitis, esto.

Mobile, dum mouetur motu æquabili, vt est tempus ad tẽpus, ita spatiũ ad spatiũ, &c.

THEOREMA II.

Figuræ habent inter se rationem eandem, quam earum omnia Indiuisibilia iuxtà quamuis Regulam assumpta.



Sit rectangulum vnum ABCD, aliud autem DGFE, quorum bases AD, DE sint æquales, & vtrunque sit positum ad rectos angulos super planum, cui intelligendum est congruere planum mobile, quod perpetuò seruato parallelismo moueatur motu æquabili, semper faciens angulos rectos cum planis BD, DF. Manifestum est in singulis temporis instantibus, quibus respondent motus mutata esse, contingere plani mobilis communes sectiones cum planis BD, DF, quæ lineæ sunt rectæ, vt ostenditur 11. Elementorum Propositione 3.

Quoniam autem est, vt tempus ad tempus in motu æquabili, ita spatium peractum ad spatium peractum; sed vt tempus ad tempus, ita multitudo partium proportionalium ad multitudinem partium proportionalium, & ita multitudo instantium ad multitudinem instantium temporis; ergo spatium peractum ad spatium peractum à mobili motu æquabili erit, vt multitudo instantium ad multitudinem instantium; sed vt multitudo instantium ad multitudinem instantium, ita multitudo linearum possibilium in spatio, ad multitudinem linearum possibilium in alio spatio, sumptis æqualibus basibus pro Regulis; ergo spatium DK, ad spatium AC, erit, vt multitudo linearum possibilium in spatio AC, iuxtà Regulas DE, & AD; sed multitudo linearum possibilium in spatio DK, dicitur à nobis omnes lineæ ipsius Dk, & multitudo linearum possibilium in spatio AC, dicitur à nobis omnes lineæ ipsius AC; ergo vt sunt omnes lineæ ipsius DK, ad omnes lineas ipsius AC, ita est spatium DK, ad spatium AC.

Si igitur tempus, quo mobile percurrit Dk, æquale fuerit tempori, quo mobile percurrit AC, & omnes lineæ ipsius Dk, æquales erunt omnibus lineis ipsius AC, in ratione discreti.

At etiam in ratione continui, quoniam quælibet ipsarum in DK, æqualis est ipsi DE, & quælibet in AC, æqualis est ipsi AD; atque adeò DE; supponuntur enim AD, DE bases æquales.

Quòd si planum mobile prosequitur motum, atque adeò in maiori tempore conficiat spatium maius, vt exempli gratia DHIE, vel DGFE, erit quoque, vt tempus ad tempus, atque adeò vt partes proportionales temporis, ad partes proportionales temporis, & vt multitudo instantium ad multitudinem instantium, atque demum vt multitudo linearum possibilium in DHIE, seu DGFE, ad multitudinem linearum possibilium in ABCD, iuxtà Regulas DE, AD, seu vt omnes lineæ in DI, vel DF, ad omnes lineas in AC, ita spatium

Qq 2 DI,

DI, vel DF ad ſpatium AC, cùm ſingulæ lineæ, quæ in DF, æquales ſint ipſi DE, ſeu AD, cui ſingulæ, quæ in AC ſunt æquales.

Quòd ſi ſpatia non fuerint rectangula, nihil refert; nam ad rectangula reducuntur per applicationem ad latus; ſi namque fuerit ſpatium æquale rectangulo DK, ipſum tamen rectangulum non extiterit, intelligatur facta applicatio ad latus DE, ortiua magnitudo proueniet DC, tuncque diſcurrendum eſt, vt ſupra. Quæ verò diximus de planis, quibus deſeruint lineæ, intelligenda volumus de ſolidis, quibus deſeruiunt ſuperficies. Atq; in gratiam eorum, quibus demonſtratio ſuperior, vtpotè Phyſico-Geometrica minus probari poſſet, non pigebit Theorema idem aliter oſtendere.

Aliter idem Theorema demonſtratur.

Si figuræ conſtituant primum, & tertium terminum, & omnia Indiuiſibilia primi conſtituant ſecundum, omnia Indiuiſibilia tertij conſtituant quartum; ſumptis æquè multiplicibus primi, & tertij termini, item ſecundi, & quarti, comperiemus, ſi multiplex primi ſuperauerit multiplicem ſecundi, etiam multiplicem tertij debere ſuperare multiplicem quarti, & ſi multiplex primi fuerit æqualis multiplici ſecundi, etiam multiplex tertij debebit eſſe æqualis multiplici quarti, & ſi multiplex primi fuerit minor multiplici ſecundi, etiam multiplex tertij debebit eſſe minor multiplici quarti; vnà igitur excedunt, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà deficiunt; quamobrem erit, vt primus ad ſecundum, ita tertius ad quartum.

Aduerte ſecundum, & quartum termini eiuſdē eſſe naturæ cū primo, & tertio.

Hac autem Methodo multa, præclaraq; demonſtrantur Theoremata, & quidem, ſiue primâ, ſiue ſecundâ, ſiue vtrâq; coniuncta; Iam autem ſuperiùs vtramque nos explicuimus. Reliquum foret hic exempla quædam afferre, in vtriuſque Methodi illuſtrationem; quia tamen videri poſſunt apud Caualerium Auctorem ipſius, prætermittimus.

Per Methodos Indiuiſibiliū multa, præclaraq; Theoremata demonſtrantur.

Solum id breuiter repetam, quod ſuperiùs tetigeram, nempè priorem Methodum vti Indiuiſibilibus collectiuè ſumptis, ita vt loquendo de figuris planis, quam rationem habuerint omnes lineæ vnius figuræ ad lineas omnes alterius, eandem quoque habeant, & ipſæ figuræ, lineis acceptis iuxta Regulas quaſcunque. Similiter de ſolidis; figuræ ſiquidem ſolidæ eam inter ſe rationem habent, quàm omnia plana collectiuè ſumpta vnius ad omnia plana alterius collectiuè pariter ſumpta, acceptis planis iuxtà Regulas quaſcunque &c.

Prior Methodus vtitur Indiuiſibilibus collectiuè ſumptis.

Nihil autem refert, quòd figuræ ſint eiuſdem altitudinis.

Poſterior autem Methodus ijſdem Indiuiſibilibus diſtributiuè ſumptis vtitur, quando figuræ fuerint in ijſdem parallelis; & ſi fuerint figuræ planæ in ijſdem parallelis conſtitutæ, quarum altera ſit Regula, ſingulæ lineæ cum ſingulis lineis in directum exiſtentibus, communique Regulæ parallelis collatæ, rationem aliquam habuerint, & ipſæ quoque figuræ eandem rationem habebunt. Sic de figuris ſolidis in ijſdem oppoſitis tangentibus planis, quorum alterum ſit eorum communis Regula. Iuxtà priorem igitur Methodum oportet perpendere aggregata omnium Indiuiſibilium, ſi iuxtà datam Regulam, aliquam habuerint rationem; nam hanc eandem, & figuræ ipſæ habebunt. Iuxtà poſteriorem autem aduertendum eſt, an in ſingulis Indiuiſibilibus reperiatur quædam communis ratio; etenim eandem habebunt, & ipſæ met figuræ.

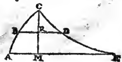
Poſterior vtitur ijſdem Indiuiſibilibus diſtributiuè acceptis.

Itaque horum Methodorum Regulæ ſigillatim ſic ſe habent. Aliquando verò vtraque coniungitur, vt ſi ſingula Indiuiſibilia vnius figuræ collata cum ſingulis Indiuiſibilibus alterius, eiſdem in directum poſitis, reperiantur eandem habere rationem; deinde concludantur omnia Indiuiſibilia ad omnia Indiuiſibilia eſſe, vt vnum ad vnum; vnde inferatur, figuras ipſas eſſe pariter, vt vnum ad vnum ex ipſis Indiuiſibilibus.

Aliquando vtraq; Methodus coniungitur.

Sic enim vtraque Methodus coniungitur; quatenus nempè comparat ſingula ſingulis, eſt ſecunda Methodus, quatenus comparat eadem collectiuè, eſt prior.

Exemplùm aptiſſimum eſt deſumptum ex Prop. 4. Exerc. Caualerij; nam ſi ſint duæ figuræ CAM, CME, in quibus vtcunque ductæ ſint AE, BD parallelæ, reſpectu quarum communis ſit accepta altitudo, & figuris interceptæ portiones ſint AM, BR, in figura CAM, & ME, RD, in figura CME, repertumque ſit, vt AM, ad ME, ita eſſe BR, ad RD, & ſic ſemper, vbicunque in CM fuerit acceptum punctum R, concludere licebit figuram CAM, ad figuram CME eſſe, vt AM, ad ME, vel BR ad



RD &c.

RD &c. Hoc autem bifariam intelligi poteſt; ſi enim nos ita ratiocinemur, vt eſt AM, ad ME, ita BR ad RD, & ſic de reliquis omnibus; ergo ſunt omnes lineæ collectiuè acceptæ in figura CAM, ad omnes lineas collectiuè ſumptas in figura CME, vt vna AM, ad vnam ME; ſed omnes lineæ in figura CAM, eſt ipſa figura, & omnes lineæ in figura CME, eſt ipſa figura; ergo figura CAM, ad figuram CME, erit vt AM, ad ME: & ſic adhibetur prior Indiuiſibilium Methodus.

At ſi dicamus, vtcunque fuerit acceptum punctum R, in recta CM, figurarum altitudine, ac per illud agatur recta parallela ipſi AE, vt eſt BD, parteſque interceptæ parallelarum figuris, partes, inquam, in directum, conſtitutæ ſint in eadem ratione, in qua AM ad ME, erit ſecunda Indiuiſibilium Methodus, quia comparat ſingula Indiuiſibilia figuræ CAM cum ſingulis Indiuiſibilibus figuræ CME, eiſdem in directum poſitis, quorum communis ratio eſt AM ad ME.

Non diſſimiliter demonſtrare licet, parallelogramma in eadem altitudine exiſtentia inter ſe eſſe, vt baſes; & quæ in eadem baſi, vt altitudines, vel vt latera æqualiter baſibus inclinata.

At iuxtà priorem Methodum nullo modo intercedente ſecunda, demonſtratur,

Si in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplum eſſe cuiuſuis triangulorum per ipſam diametrum conſtitutorum; ibi enim non conſiderantur ſingula Indiuiſibilia vnius trianguli collata cum ſingulis alterius, eiſdem in directum poſitis, quorum communis quædam ſit ratio, quod eſt proprium ſecundæ Methodi; ſed conſiderantur collectiuè, nempè demonſtrantur omnia Indiuiſibilia collectiuè vnius trianguli æqualia eſſe omnibus collectiuè ſumptis Indiuiſibilibus alterius trianguli; vnde infertur æqualitatis proportio inter ipſa triangula. Sic etiam de figuris ſolidis &c.

Cæterùm, quod ſupra demonſtrauimus de parabolis inter eaſdem parallelas, quòd ſcilicet ſint in ratione baſium, Indiuiſibilium Methodo, & quidem vtraque, facilè demonſtrari poteſt.

THEOREMA.

Exemplum CXXIV.

Parabolæ inter eaſdem parallelas ſunt inter ſe, vt baſes.

Quodcunque enim punctum fuerit acceptum in diametro vnius, & per illud acta fuerit recta parallela alterutri ipſarum parallelarum, inter quas ſunt parabolæ, hæc ſecabit diametrum alteram; reperiemus autem ſingulas lineas in vna ad ſingulas ſibi in directum conſtitutas in alia, eſſe in communi quadam ratione, nimirùm baſium; ſi itaque vti volumus priori Methodo, dicemus omnes lineas in vna parabola ad omnes lineas in alia, collectiuè loquendo, eſſe, vt vna ad vnam; nempè vt baſis ad baſin; ſed omnes lineæ in vna parabola, eſt ipſa parabole, & omnes lineæ in alia parabola, eſt ipſa parabole; ergo parabole ad parabolen eſt, vt baſis ad baſin.

Si verò vti velimus ſecundâ Methodò, dicemus, vbicunque in diametro fuerit acceptum punctum, & per illud agatur recta parallela alterutri ipſarum parallelarum, quarum vna eſt Regula, lineæ omnes in vna parabola diſtributiuè acceptæ, collatæ cum alijs in alia parabola, diſtributiuè pariter ſumptis, ſunt in communi quadam ratione, nimirùm baſium; ergo parabolæ erunt in ratione baſium.

Sic etiam demonſtrabuntur, & alia innumera.

Obſeruandum eſt autem. *Obſeruanda quædam.*

Si ſint figuræ planæ quæcũque in iiſdem parallelis cõſtitutæ, in quibus ductis quibuſcunque eiſdem parallelis æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcunque rectæ lineæ portiones fuerint æquales, & figuræ ipſæ inter ſe æquales erunt. Sic de figuris ſolidis ſuo modo &c, Obſeruandum eſt, inquam, huiuſmodi figuras diei æqualiter analogas, tùm planas, tùm ſolidas inter ſe comparatas, ac etiam iuxtà Regulas, lineas, ſeu plana parallela, in quibus eſſe ſupponuntur, Sic etiam. *Figuræ æqualiter analogæ quæ dicantur.*

Si ſint figuræ planæ quæcũque in iiſdem parallelis cõſtitutæ, in quibus ductis quibuſcunque eiſdem parallelis æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcunque rectæ lineæ portiones, ſint inter ſe, vt cuiuſlibet alterius in eiſdem figuris conceptæ portiones (homologis

tamen

tamen in eadem figurâ semper existentibus), eandem inter se rationem habebunt, quam dictæ portiones. Sic etiam suo modo de figuris solidis &c. Dicentur autem huiusmodi figuræ proportionaliter analogæ, ac etiam iuxtà Regulas ipsas parallelas, in quibus existunt, si planæ figuræ fuerint; vel iuxtà Regulas, ipsa plana parallela, in quibus existunt, si solidæ figuræ extiterint.

Quænam dicantur figuræ proportionaliter analogæ.

De Maximis, & Minimis.

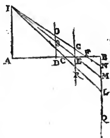
HOc argumentum egregiè admodum ab Apollonio tractatum fuisse, ex eius monumentis, quę recèns iussu a Serenissimi Principis Leopoldi Florentiæ Typis commissa fuerunt, perspicuum est. Hoc autem specialem non habet demonstrandi rationem; modo siquidem in eo deducitur ad inconueniens, plerunque ostensiua demonstratione concluditur apud Veteres; secus autem apud Recentiores, qui beneficio speciosæ Logistices speciali quadam ratione Theoremata de Maximis, & Minimis ostendunt; qua de re nobis in sequenti secundo libro futurus est sermo, Antiqua tamen Methodo procedentes, vnum, vel alterum exemplum rei, de qua agitur, illustrandæ gratia, breuiter hic afferemus in medium, eo vel maximè, quòd hæc Theoremata quædam sunt, quæ nobis olim quidam Geometriæ studiosi resoluenda proposuerunt.

Contemplatio de Maximis, & Minimis, apud Veteres non habebat specialem resolutionis formam, sicut apud Recentiores. Auctor duo resoluit sibi proposita Theoremata de Maximis, & Minimis.

THEOREMA.

Exemplum CXXV.

Sit recta AB, ad cuius extrema A, B, rectæ sint constitutæ AI, BQ, eum ea facientes angulos rectos; sectaque sit bifariam in D; & inter AD, AB, media sit proportionalis AE; & ex quouis puncto I, in recta AI, ducta sit per E, IM, ita vt fiant triangula duo AEI, BEM. Dico istorum triangulorum aggregatum esse omnium minimum.



Si non ita est, sit, si fieri potest summa triangulorum AIF, FBN; & ex puncto E, erigatur perpendicularis EG, quæ deorsum protrahatur, cùm opus fuerit, & ex D excitetur perpendicularis DO. Quoniam igitur DO, secat bifariam AB in D, ita secat bifariam IN, in O, quemadmodum IM in S; & vt AE media proportionalis est inter AB, AD, ita IG, inter IN, IO, sicut IE, inter IM, IS; itaque DO, EG, quæ sunt parallelæ, tàm inter se, quàm rectis ad extremitates A, B, constitutis, secabunt latera trianguli INM, vt dictum est. Cùmque EG, parallela sit rectæ BQ, triangulum IEG, æquiangulum erit triangulo IMN; atque adeò triangulum IMN, ad triangulum IEG, in duplicata erit ratione lateris homologi IN, ad latus homologum IG; sed duplicata ratio IN ad IG, est eadem, quę IN ad IO; ergo triangulum INM, ad triangulum IEG, erit vt IN ad IO; sed IN ad IO, est in ratione dupla; ergo triangulum INM, ad triangulum IEG, in dupla ratione erit; quamobrem trapetium EMNG, æquabitur triangulo IEG. At verò simul accipiendo triangulum AIF, BFN, plus addimus triangulo AIE, quàm subtrahamus ex triangulo EBM; illi enim addimus IEF triangulum, quod maius est, quàm triangulum IEG, atque adeò, quàm EMNG trapetium, ac proinde multò maius, quàm trapetium EMNF, quod ex triangulo EBM, subducimus; ergo triangulorum AIF, FBN aggregatum maius erit aggregato triangulorum AIE, EBM. Idem autem ostendetur euenire in quolibet alio puncto rectæ AB; V.G. C, per quod ducta sit IL, &c; ergo triangulorum AIE, EBM, summa est omnium minima &c. Quod oportebat &c.

Si quis velit idem ostendere de aliquo alio puncto ipsius AB, nempè C, ducat IL, per C, & demonstrationem conficiat, ostendendo plus addi triangulo EMB, addendo trapetium ECLM, quàm subtrahatur ex triangulo AIE, subducendo triangulum ICE. Ad hoc autem oportet protrahere GE, infra AB, vt secet IL, nempè in R.

Lemma

Lemma ad sequens Theorema.

Si quotcunque fuerint triangula vnius ordinis, totidem autem alia alterius ordinis, vtriusque verò ordinis triangulorum omnium bases sint inter se æquales, sed altitudines primi ordinis sint itidem inter se æquales, secundi tamen ordinis vtcumq; at aggregatum triangulorum primi ordinis æquale sit aggregato triangulorum secundi ordinis.

Dico aggregatum altitudinum triangulorum primi ordinis, æquale esse aggregato altitudinum triangulorum secundi ordinis.

Super singulis basibus triangulorum primi ordinis intelligantur constituta rectangula eiusdem altitudinis cum ipsis triangulis, atque adeò erunt æqualium basium, & altitudinum: intelligantur etiam rectangula constituta super singulis triangulorum basibus secundi ordinis, eiusdem altitudinis cum illis, quæ propterea erunt æqualium basium, tùm inter se, tùm cum ijs, quæ sunt primi ordinis, inæqualium tamen altitudinum. At ex rectangulis primi ordinis fit rectangulum vnum, cuius basis est vna ex basibus æqualibus triangulorum, altitudo verò est aggregatum eorundem rectangulorum, seu triangulorum; insuper ex rectangulis triangulorum secundi ordinis fit rectangulum vnum æquale rectangulo iam dicto constanti ex rectangulis triangulorum primi ordinis. Quoniam horum rectangulorum dimidia, nempè aggregatum triangulorum primi ordinis, & secundi ordinis supponuntur æqualia, & huius rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum secundi ordinis, basis, quippe quæ est vna ex basibus triangulorum eiusdem ordinis, quæ tùm inter se, tùm basibus triangulorum primi ordinis supponuntur æquales, æqualis est basi rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum primi ordinis, cùm sit ex basibus triangulorum eiusdem ordinis, quæ supponuntur æquales, tùm inter se, tùm basibus triangulorum secundi ordinis, ergo altitudo rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum secundi ordinis æquabitur [a] *altitudini rectanguli conflati ex rectangulis triangulorum primi ordinis; sed altitudo huius rectanguli æqualis est aggregato altitudinum triangulorum primi ordinis; altitudo verò illius æqualis est aggregato altitudinum triangulorum secundi ordinis; ergo aggregatum altitudinum triangulorum primi ordinis æquale est aggregato altitudinum triangulorum secundi ordinis &c. Quod oportebat ostendere.*

[a] Ex Elementis.

Corollarium.

Hinc colligitur, quòd.

In omni polygono regulari aggregatum rectarum æqualium, quæ ducuntur ex puncto intus accepto perpendiculares ad singula eiusdem latera, æquale est aggregato, ex lineis ductis à centro perpendicularibus ad eadem polygoni latera.

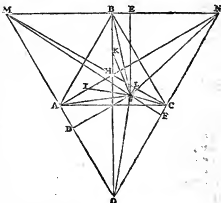
Perspicuè constat ex suprapositó Lemmate; latera enim polygoni regularis erunt bases triangulorum, tàm primi, quàm secundi ordinis: triangula primi ordinis vertices habebunt in centro polygoni, eorundemque altitudines æquales, erunt rectæ æquales, quæ cadunt perpendiculariter à centro ad singula polygoni latera; triangula verò secundi ordinis vertices habebunt in alio quouis puncto accepto intra ambitum polygoni, & eorum altitudines erunt rectæ inæquales cadentes ab huiusmodi puncto perpendiculariter ad latera ipsius polygoni.

THEOREMA. Exemplum CXXVI.

Si à pluribus, quàm duobus punctis, rectæ coëuntes angulos æquales efficiant. Dico prædictarum linearum aggregatum, minimum esse.

Aut

Aut prædictæ lineæ sunt inter se æquales, aut inæquales. Sint primùm æquales, & puncta sunto, A,B,C, à quibus egrediantur rectæ AH, BH, CH, inter se æquales, ita & tres anguli AHB, BHC, AHC, complentes quatuor rectos, sint inter se æquales. Dico aggregatum ex AH, BH, CH, minimum esse omnium ex ijs lineis, quæ duci possunt à punctis A,B,C, terminatæ ad aliquod aliud punctum præter H, vt exempli gratia ad punctum G.



Ducantur rectæ AB, BC, AC, erit autem triangulum ABC, æquilaterum, & ex puncto G, ductæ sint GD, GE, GF, perpendiculares ad rectas, MO, MN, ON, quæ perpendiculares ductæ intelligi debent ad AH, BH, CH, ita ut fiat triangulum OMN æquilaterum. Intelligantur autem ductæ GA, GB, GC. Dico aggregatum rectarum AH, BH, CH, minus esse aggregato rectarum AG, BG, CG, & sic de quocunque alio aggregato. Ductis enim HM, HO, HN, item GM, GO, GN; manifestum est ex Corollario eius, quod præmisimus, Lemmatis, aggregatum altitudinum triangulorum MHO, MHN, OHN, nempè aggregatum rectarum AH, BH, CH æquale esse aggregato altitudinum triangulorum MGO, MGN, OGN, videlicet aggregato rectarum GD, GE, GF; sed aggregatum rectarum GA, GB, GC, maius est aggregato rectarum GD, GE, GF; ergo aggregatum rectarum GA, GB, GC, maius est aggregato rectarum HA, HB, HC. Quoniam verò idem contingit in quolibet alio puncto præter H, dum rectæ scilicet ad illud ductæ sunt ex punctis A, B, C; ob id aggregatum rectarum HA, HB, HC, est omnium minimum &c. Quod erat operæ pretium ostendere.

At verò si rectæ tres illos angulos ad H, constituentes fuerint inter se inæquales, vt HI, Hk, HL. Dico aggregatum ipsarum minimum esse, ex ijs lineis videlicet, quæ à prædictis punctis I, k, L, duci possunt coëuntes ad aliquod aliud punctum præter H, cuiusmodi est, exempli gratia, punctum G. Ductæ GI, GK, GL. Quoniam itaque ostensum est, aggregatum rectarum HA, HB, HC, minus esse aggregato rectarum GA, GB, GC, est autem aggregatum rectarum AI, IG; BK, kG; CL, LG, maius aggregato rectarum GA, GB, GC; ergo eò magis aggregatum rectarum HA, HB, HC, minus erit, quàm aggregatum rectarum AI, IG; BK, KG; CL, LG; demptis communibus AI, BK, CL, remanebit aggregatum rectarum HI, Hk, HL, minus aggregato rectarum GI, GK, GL. Quoniam verò idem contingit in quocunque alio puncto præter H; propterea aggregatum rectarum HI, HK, HL, erit omnium minimum. Quod oportebat ostendere.

DE PROBLEMATVM RESOLVTIONE IVXTA VETERES, SEV De Antiqua Methodo per explicitum Datorum vsum ad Problemata resoluenda.

CAPVT XI.

Antiquiores Geometræ in Problematum resolutionibus plurimum insudarunt.

Antiquiores Geometræ in Problematibus resoluendis laboris plurimum experti sunt, Physicorum vestigia secuti, à principiatis ad principia procedentes; propositum igitur Problema, factum supponentes, quid inde sequeretur, sedulò meditari consueuerunt, vt inde tantum deducerent, quantum ad faciendum satis oblato Problemati requiritur; omneque studium eorum huc sanè spectabat, vt in Geometricis sibi compararent

rent vim, ac facultatem inueniendi Problemata, quæ ipsis proponebantur; immò, teste Pappo, huius tantummodò vtilitatis gratia, resolutionis ratio inuenta est. De resolutione autem generatim superiùs egimus, partitionem eiusdem explicantes. Duplex autem erat genus, quorum vnum contemplatiuum, in quo videlicet, quod quæritur, vt iam existens; & vt verum ponentes, per ea, quæ deinceps consequuntur, tanquàm vera, & ex positione sunt, procedimus ad aliquod concessum, quod si verum extiterit, verum itidem, & quæsitum erit, ac demonstratio, quæ resolutioni ex contraria parte respondet. Quòd si falso euidenti occurramus, falsum etiam, & quæsitum esse, necesse est.

Resolutionis Problematum gratia, Ars Analytica ab Antiquis instituta fuit. Resolutionis duplex genus Theorematicum, seu contemplatiuum vnum, Problematicū alterum.

At problematicum genus, quod propositum est, vt cognitum ponentes per ea, quæ deinceps consequuntur, tanquàm vera, ad aliquod concessum procedimus, quod si fieri, compararique poterit, quod à Mathematicis *Datum* nuncupatur, etiam & illud, quod propositum est, fieri poterit, ac demonstratio ipsa resolutioni ex contraria parte respondens. Verùm si impossibili cuidam euidenti occurramus, quod nimirum fieri non potest, & Problema ipsum erit impossibile, fieriq; non poterit.

Ad Problema verò Determinatio pertinet. Est porrò Determinatio, quæ declarat quando, & qua ratione Problema fieri possit. Iam autem superiùs commemorauimus, quæ nam faciant ad Locum Resolutum, inter quæ principem tenet locum Datorum doctrina, explicata singulari Libro ab Euclide, quem superiùs interpretati sumus. Veteres igitur per hanc viam procedentes Datorum præsidio, vt videre licet, tùm apud Apollonium, tùm præsertim apud Pappum Alexandrinum, & etiam apud alios Problemata resoluebant.

Problematis determinatio quid.

Datorum doctrina apud Veteres ad Problemata resoluenda conducebat.

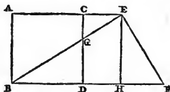
Vtcunque autem Problema fuerit; (communi siquidem Mathematicorum consensu, tripartitum illud est, videlicet, Planum, Solidum, & Lineare, siue Locale, siue non, extiterit) pro sui solutione artificiosam Analysin exposcit; nunc illam, qua Veteres vtebantur, explicabimus: in sequenti Capite in medium allaturi illam, quam nos passim adhibere consueuimus, quæ tametsi non multùm differat ab antiqua, tamen eo saltem nomine videtur ab illa, secreta, quatenus minus implicatā viā procedit, Datis non accersitis explicitè, quorum vsus plerunque haud parùm negotij facessit.

Tripartitum genus Problematum, Planum, Solidū, & Lineare.

Vt autem in arenam descendamus, pauca quædam exempla ab Antiquis accipere iuuabit, eorum siquidem imitatione, operosum non erit oblati Problematis resolutionem Datorum beneficio instituere. Primò occurrit illud apud Pappum Libro septimo Prop. 72; in cuius gratiam, ex eodem, præmittendum est illud.

Lemma.

Sit quadratum AD, & ducatur BGE, atque ipsi ad rectos angulos EF; intelligatur recta linea BGE, secare CD, in puncto G, & AC productam in E: recta verò linea EF secare BD productam in F. Dico quadrata ex CD, GE, quadrato ex DF æqualia esse.



Ducatur per E, ipsi CD, parallela EH; rectus igitur est angulus CEH; est autem & rectus FEG; ergo & angulus CEG, angulo FEH est æqualis, dempto nimirùm communi angulo GEH; reliquus enim CEG, reliquo FEH æqualis est; sed & rectus angulus FHE æqualis erit recto BDG, atque est EH æqualis BD; est enim EH æqualis CD, atque adeo ipsi DB, quod est etiam quadrati latus; æqualis igitur est EF, ipsi BG; cùm enim angulus CEG, sit æqualis angulo FEH, vt ostensum est, sitque ipsi CEG æqualis GBD, erit & GBD, ipsi FEH æqualis; est autem rectus BDG æqualis recto FHE; ergo & reliquus reliquo, & triangulum BDG, triangulo EHF simile; quamobrem vt HE ad EF, ita DB, ad BG, & permutando, vt HE ad BD, ita EF ad BG; est autem HE æqualis BD; ergo & EF ipsi BG æqualis erit. Quoniam autem quadratum ex BF æquale est quadratis ex BE, EF, quorum rectangulum ex BF, BD, æquale est rectangulo EBG; in circulo enim sunt, D,F,E,G, puncta: anguli enim oppositi GDF, FEG, recti sunt; quare & reliqui DGE, EFD, duobus rectis sunt æquales; erit propterea rectangu-

ctangulum BFD, æquale rectangulo BEG, & quadrato ex EF; cùm enim quadratum ex BF æquale sit duobus quadratis ex BE, EF; quadrato autem ex BF æqualia sint vtraque rectangula FBD, BFD, & eadem ratione quadrato ex BE, æqualia sint vtraque rectangula EBG, BEG, erunt rectangula FBD, BFD, æqualia rectangulis EBG, BEG, & quadrato ex EF, quorum rectangulum FBD æquale est rectangulo EBG; reliquum igitur BFD, reliquo BEG, & quadrato ex EF, hoc est quadrato ex BG est æquale. Sed rectangulum BEG, vnà cum quadrato ex BG, est rectangulum EBG, vna cùm quadrato ex EG, hoc est rectangulum ipsum BEG, vnà cum quadrato ex BG, est æquale rectangulo EBG, vna cum quadrato ex EG; siquidem rectangulum BEG æquale est rectangulo BGE, vnà cum quadrato ex EG; propterea rectangulum BEG, vnà cum quadrato ex EG, æquale est rectangulo BGE, vnà cum duobus quadratis ex BG, GE; & similiter rectangulum EBG, vnà cum quadrato ex EG æquale est rectangulo EGE, vnà cum quadratis ex BG, GE; cùm igitur eisdem sint æqualia, & inter se æqualia erunt; rectangulum propterea BFD æquale est rectangulo EBG, hoc est FBD, & quadrato ex GE: commune auferatur rectangulum BDF, ergo reliquum quadratum ex FB, quadratis ex BD, GE, hoc est quadratis ex CD, GE, est æquale.

Problema.

Quadrata existente AD producere AC in E, & facere EF datam, quæ ad punctum B pertineat.

Resolutio.

FActum iam illud sit, & a puncto E ipsi BE ad rectos angulos ducatur EG, quoniam igitur quadrata ex CD, FE æqualia sunt quadrato ex DG, & data sunt quę ex CD, FE quadrata; etenim vtraque ipsarum magnitudine datur; datum igitur est quadratum ex DG, quare & ipsa DG, & tota BG magnitudine data est; sed & positione, ergo semicirculus in
a 12. terti. recta linea BG descriptus positione datur; & [a] transit per punctum E, ergo punctum E posi-
b 25. Dat. tione circumferentiam contingit; sed & positione rectam lineam AE, datum igitur [b] est;
c 26. Dat. sed & B datum, quare recta linea BE positione dabitur [c].

Compositio.

Componetur autem sic.

SIt quadratum quidem AD, data autem recta linea H, & quadratis ex CD, & H æquale sit quadratum ex DG, maior igitur est GD, quam DC, quare & rectangulum GDB maius est quadrato ex DC, & ideò semicirculus in recta linea BG descriptus transibit supra punctum C, describatur, & sit BKEG, producaturque AC ad E, & BE, EG iungantur,
d Ex antecedenti Lemmat. ergo quadrata ex CD, EF æqualia sunt [d] quadrato ex DG, sed quadrato ex DG ponebantur æqualia quadrata ex CD, H, quadrata igitur ex CD, H quadratis ex CD, EF sunt æqualia, & ob id quadratum ex H æquale est quadrato ex EF, & recta linea H rectę EF æqualis, est autem EF data, ergo EF Problema efficit; itaque dico eam solam hoc efficere. Ducatur enim altera quædam linea BL, quæ si Problema efficit erit NL æqualis EF, maior autem est FB, quàm NB, tota igitur BL minor est, quàm BE, quod fieri non potest; est enim BL etiam maior; secet enim BL circuli circumferentiam in puncto M, erit BM maior, quàm BE, ex alibi demonstratis; ergo BL, quàm BE multò maior erit; non igitur BL Problema efficit, sed sola BE.

Vt autem cognoscamus vtra ipsarum maior sit, demonstrabimus hoc pacto.

Quoniam maior est BL quàm BE, & BF maior quàm BN, erit reliqua NL maior quàm FE, est enim quadratum ex BL æquale duobus quadratis ex BA, AL, quadratum autem ex BE æquale quadratis ex BA, AE, & cum quadratum ex AL sit maius quadrato ex AE,

quòd

quòd AL maior sit quàm AE, erit quadratum ex BL maius quadrato ex BE, & ideò BL quàm BE maior. Rursus quadratum ex BF æquale est duobus quadratis ex BD, DF, & quadratum ex BN itidem æquale quadratis ex BD, DN, quòd cùm DF sit maior quàm DN, erit quadratum ex BF maius quadrato ex BN, & ipsa BF quàm BN maior; similiter & in alijs idem contingere demonstrabitur. Cùm itaque BL sit maior, quàm BE, & BF, maior, quàm BN, sequitur NL multo maiorem esse, quàm FE; & manifestum est eam, quę puncto C propinquior est, remotiore semper minorem esse.

Sit exemplum alterum ex eodem.

Problema.

Circuli portione data in recta linea AB inflectere ACB in data proportione.

Resolutio.

FActum iam sit, & a puncto C ducatur recta linea contingens, quæ sit CD, a centro enim circuli, cuius portio est ACB ducatur recta linea in C, atque ipsi ad rectos angulos agatur CD, erit CD circulum contingens, vt igitur quadratum ex AC ad quadratum ex CB, ita est AD ad DB; cùm enim CD circulum contingat, & CB secet, erit angulus DCB æqualis angulo CAB, sed angulus CDB est communis vtrique triangulo ACD, CBD, ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum triangulo simile; vt igitur AD ad DC, ita CD ad DB, & vt AD ad CD, ita AC ad BC, vt enim AD ad AC, ita DC ad BC, ergo permutando vt AD ad DC, ita AC ad BC, ob id ex coroll. 20. Sexti; prima AD ad tertiam DB (erant enim AD, CD, BD proportionales) erit vt, quadratum primæ AD ad quadratum secundæ DC, hoc est vt quadratum ipsius AC ad quadratum CB, proportio autem quadrati AC ad quadratum CB est data, ergo & proportio AD ad DB data erit; cùm enim detur proportio AC ad CB, dabitur etiam proportio quadrati ex AC ad quadratum ex CB, atque est datum punctum B, ergo & D, & linea DB, quare & ipsa AD data erit,

Compositio.

Componetur autem sic.

SIt portio quidem circuli ACB, data autem proportio, quam habet E ad F; fiat vt quadratum ex E ad quadratum ex F, ita AD ad DB;

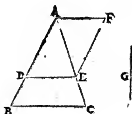
Si enim fiat vt excessus, quo quadratum ex E excedit quadratum ex F, ad quadratum ex F, ita AB ad BD; erit componendo vt excessus, quo quadratum ex E excedit quadratum ex F vnà cum quadrato ex F, hoc est vt quadratum ex E ad quadratum ex F, ità AD ad DB, ducaturque contingens DC, & AC, CB iungantur. Dico rectas lineas AC, CB Problema efficere. Quoniam enim vt quadratum ex E ad quadratum ex F ità est AD ad DB, vt autem AD ad DB, ità quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, vt supra ostensum est, propterea quod CD circulum contingit, erit vt quadratum ex E ad quadratum ex F, ita quadratum ex AC ad id, quod fit ex CB quadratum; quare & vt E ad F, ità AC ad CB, ergo ACB Problema efficit.

Aliud ex eodem sit exemplum.

Problema.

Rectis lineis AB, AC positione datis; ducere DE parallelam recta linea positione data, & facere ipsam DE datam, hoc est recta linea magnitudine data aequalem.

Resolutio.



FActum iam sit, & per A ipsi DE parallela ducatur AF, ergo AF parallela est actæ lineæ positione datæ, atque est datum punctum A, positione igitur
a 28.Dat. est a AF. Ducatur per E linea EF parallela ipsi AB,
b 28.Dat. ergo AF est æqualis DE; data autem est DE, quare
& AF, data est b magnitudine, sed & positione; & datū
c 27.Dat. est punctum A, datum igitur est c & F; itaque per datum punctum F ducta est FE parallela ipsi AB positione datæ; positione igitur est FE, sed & positione AC,
d 25.Dat. ergo & punctum E est d datum, & per ipsum ducta est DE lineæ positione datæ parallela, quare & DE positione datur.

Compositio.

Componetur autem sic.

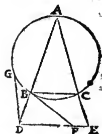
SInt duæ rectæ lineæ AB, AC positione datæ; data autem magnitudine sit recta linea in qua G cui autem parallelæ ducantur, sit AF, & ponatur AF ipsi G æqualis, & per F quidem ducatur FE parallela AB, per E verò ducatur ED parallela EF. Dico ipsam DE Problema efficere. Quoniam enim DE æqualis est ipsi AF, & AF æqualis ipsi G, videlicet lineæ datæ; erit & DE datæ lineæ G æqualis; ergo DE Problema efficit; manifestum autem est ipsam solam hoc efficere, namque propinquior ipsi A semper remotiore est minor.

Exemplum alterum ex eodem.

Problema.

Circulo positione dato ABC, & datis duobus punctis D, E inflectere DAE, & facere BC ipsi DE parallelam.

Resolutio.



FActum iam sit, & a puncto B ducatur contingens BF, itaq; quoniam contingit quidem BF, secat autem BC erit angulus FBC, hoc est DFB æqualis angulo A, in circulo igitur sunt A,B,E,F, puncta; quoniam enim angulus DFB est æqualis angulo A, & sunt anguli DFB, BFE æquales duobus rectis, erunt & quadrilateri ABFE anguli BAE, BFE oppositi æquales
a conuerſa 22. tertij. duobus rectis, puncta igitur A,B,F,E in circulo a erunt, & ideò rectangulum ADB rectangulo EDF est æquale; datum autem est ADB rectangulum, quòd æquale sit quadrato contingentis, nempè ductæ ex puncto D, quæ circulum positione datum ABC contingit in G, vti est recta DG, quare & rectangulum EDF est datum, & data DE, ergo & DF, sed & positione, & datum punctum D, datum igitur & F, a dato, igitur puncto F
b 34.Dat. ad circulum positione datum contingens ducta est FB, ergo FB positione est b data, & da-
c 26.Dat. tum punctum B, sed & D datum, positione igitur c est BD, quod cum circulus ABC posi-
d 25.Dat. tione sit, datum erit d & punctum A, est autem & C datum, vtraque igitur istarum DA,
e 26.Dat. AE positione data erit e.

Compositio.

Componetur autem sic.

SIt circulus ABC, data verò puncta D,E, & quadrato contingentis nempè DG, æquale ponatur rectangulum EDF, atque a puncto F ducatur recta linea FB, quæ circulum ABC contingat; iunctaque DB ad A producatur, & iungantur AE, BC. Dico BC ipsi DE paralle-

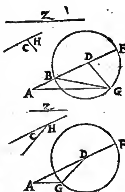
parallelam esse. Quoniam enim rectangulum EDF æquale est quadrato contingentis, & eidem æquale est rectangulum ADB, erit rectangulum ADB rectangulo EDF æquale, in circulo igitur sunt puncta A,B,F,E; ideoque angulus A, hoc est CBF est æqualis angulo BFD, etenim BF circulum contingit, & BC secat, & sunt anguli alterni, ergo BC ipsi DE est parallela, ex 27. lib. primi Elem.

Sed ne dum experiri placet nostram resoluendi rationem in ijs, quæ fuerunt ab Antiquis, Problematibus, resoluta, sed etiam in alijs, quæ Recentiores resoluenda sumpserunt, huiusmodi sunt sequentia, quibus Marinus Ghetaldus antiqua methodo satisfacere sibi proposuit. *Problemata, quæ Ghetaldus resoluenda sibi proposuit.*

Problema.

Data base trianguli, differentia laterum, & angulo verticis inuenire triangulum.

Resolutio.



DAta sit trianguli basis Z, differentia laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C, sitque reperiendum triangulum.

Supponamus illud factum, esseque triangulum DAG, cuius basis AG sit æqualis Z, angulus ADG ad verticem æqualis angulo C dato; tandem differentia laterum DA, DG sit AB, quæ positione, & magnitudine data sit.

Quoniam igitur AB est differentia laterum AD, DG; ergo BD, DG erunt æquales; propterea centro D, interuallo DB, vel DG, describatur circulus secans AD protractam in F; ducaturque BG. Quoniam igitur datus est angulus ADG; ergo dabitur angulus FDG, tanquàm reliquus ad duos rectos, ergo dabitur etiam angulus FBG, dimidius ipsius FDG; ille enim est ad circumferentiam, hic autem ad centrum; est autem positione data BD, quemadmodum & positione punctum B; ergo [a] positione dabitur quoque recta BG; quoniam autem in ipsam BG à dato puncto A ducta est AG magnitudine data: propterea & ipsa AG dabitur [b] positione; quare & punctum G positione datum erit [c]. Sed datur etiam angulus DGB, cum sit æqualis angulo DBG, ob æquales rectas DB, DG; ergo positione dabitur [d] recta GD; quamobrem dabitur [e] positione quoque punctum D; quoniam itaque positione sunt datæ extremitates A,D,G, positione datarum AD, DG, ipsæ quoque magnitudine erunt [f] datæ.

a 29 Dat.
b 31. Dat.
c 25. Dat.
d 29 Dat.
e 25. Dat.
f 26. Dat.

Compositio.

Componetur autem hoc modo.

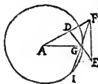
PRoducatur AB in F, & fiat angulus FBG æqualis dimidio anguli H, reliqui ad duos rectos, & in BG ponatur AG æqualis Z: angulo vero GBD constituatur angulus æqualis BGD: erunt igitur æquales BD, DG; quamobrem differentia laterum DA, DG, trianguli DAG erit ipsa AB data.

Centro autem D ad interuallum DG, vel DB, describatur circulus, quem secet AF, in F, ergo angulus FDG ad centrum duplus erit anguli FBG ad circumferentiam; sed eiusdem anguli FBG duplus est quoque & angulus H; ex constructione; ergo angulus FDG angulo H æqualis erit; vnde & angulus ADG ad verticem trianguli æqualis erit angulo C; est autem & basis AG æqualis datæ Z ex constructione. Ergo constructum est triangulum DAG, quale oportebat.

Lemma

Lemma ad sequens Problema.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, basis verò semidiameter, & ducatur linea recta, non ex centro circuli, sed ab altera extremitate aggregati laterum, constituens cum eo angulum æqualem dimidio, qui est ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.

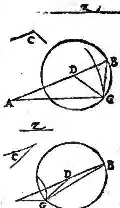


Sit triangulum DAG, cuius basis AG, & centro A, interuallo AG, describatur circulus, & producatur AD in F; vt DF sit æqualis DG; aggregatum igitur laterum AD, DG; erit AF; à puncto F, ducatur FI, faciens angulum AFI, æqualem dimidio anguli ADG: Dico ipsam FI, in circulum incidere. Si non incidit, cadat extra, vt FE; Continuetur igitur DG, donec secet ipsam FE, in E; Quoniam itaq; externus angulus ADE, trianguli DFE, æqualis est duobus internis DFE, DEF; quorum vnus nempè DFE, ponitur dimidius ipsius ADE; erit & reliquus DEF, ipsius ADE, dimidius; ergo æquales erunt anguli DFE, DEF; atque adeo æquales erunt recta DF, DE; quod est absurdum; nam DF, ponitur æqualis DG; Recta igitur FI, in circulum incidet. Quod &c.

Problema.

Data base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Resolutio.



Sit data trianguli basis Z; laterum aggregatum AB; angulus ad verticem, æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.

Ponatur iam factum; sitque triangulum DAG, cuius basis AG, sit æqualis datæ Z; aggregatum verò laterum AD, DG sit æquale ipsi AB, magnitudine, ac positione datæ; angulus autem, ADG ad verticem, æqualis sit angulo C, iungatur BG.

Quoniam igitur composita ex AD, DG, æqualis est ipsi AB, ablata communi AD, reliqua DG, reliquæ DB æqualis erit; quare circulus centro D ad interuallum DG descriptus transibit per B; describatur; ergo angulus ADG ad centrum, & duplus erit anguli B ad circumferentiã, sed datur angulus ADG; ergo dabitur & angulus B; est autem positione data AB; ergo [a] & BG positione data erit, sed in ipsam BG à dato puncto A ducta est AG magnitudine data; ergo [b] & ipsa AG positione quoque dabitur, datumque [c] erit punctum G, & data [d] quoque erit GD positione; datur enim angulus DGB, quoniam æqualis est dato DBG, ob æquales rectas DB, DG, quamobrem & punctum D dabitur. Cùm itaque datæ sint A,D,G extremitates datarum positione AD, DG, ipsæ quoque magnitudine datæ erunt.

a 29. Datorũ.
b 31. Dat.
c 25. Dat.
d 29. Dat.

Compositio.

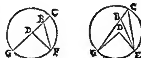
Componetur autem sic.

Centro A ad interuallum datæ Z, æquale, describatur circulus, & fiat angulus ABG æqualis dimidio anguli C; ergo ex eo, quod præmissum est Lemmate recta BG incidet in circulum sub A centro descriptum; incidat in G, & iungatur AG: fiat verò angulo B æqualis angulus BGD; erit propterea DG æqualis DB; addita communi AD; composita ex AD,

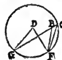
ex AD, DG, erit æqualis AB. Centro autem D interuallo DB, vel DG, describatur circulus BG; ergo angulus ADG ad centrum duplus erit anguli B ad circumferentiam; est autem C duplus anguli B, ex constructione; ergo angulus ADG, angulo C æqualis erit, est autem basis AG, æqualis datæ Z, ex constructione. Constructum igitur triangulum erit DAG, quale construendum proponebatur.

Lemma ad sequens Problema.

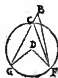
Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ circuli insisterint, duplus autem fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.



Duo anguli GDF, GBF, eidem circuli circumferentia GF insistant; sitque angulus GDF ad centrum circuli, atque duplus anguli GBF. Dico angulum GBF ad circumferentiam esse. Si enim non est ad circumferentiam erit intra vel extra circulum. Sit si fieri potest primum intra circulum, & producatur GB ad circumferentiam vsque in C, iungatur FC; erit igitur angulus GDF ad centrum duplus anguli GCF ad circumferentiam; sed duplus est etiam anguli GBF ex hypothesi; ergo angulus GBF, angulo GCF æqualis erit, externus interno quod est absurdum; angulus igitur GBF non cadit intra circulum.



Deinde sit angulus GBF extra circulum; ergo vel vtraque rectarum GB, FB, vel saltem vna circulum ipsum secabit. Secet illum GB recta in puncto C, & iungatur FC; erit igitur angulus GDF ad centrum duplus anguli GCF ad circumferentiam sed est duplus anguli B ex hypothesi; ergo angulus GCF, angulo B æqualis erit, externus interno quod est absurdum. Non est igitur angulus GBF extra circulum; non intra, vt suprà demonstratum est; ergo erit ad circumferentiam.



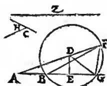




Problema.

Data differentia segmentorum baseos trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Resolutio.



Data sit differentia segmentorum baseos trianguli AB, laterum aggregatum sit Z, angulus ad verticem sit æqualis angulo C: oportet reperire triangulum.

Sit iam factum, & triangulum ipsum esto DAG, in quo quidem perpendicularis DE; centro autem D, interuallo DG, quod sit minus latus, describatur circulus secans latus AD productum in F, basin autem AG, in B. Erunt [a] igitur BE, EG æquales, quamobrem differentia segmentorum AE, EG, erit AB. Sit igitur AB, positione, ac magnitudine data, composita autem ex lateribus AD, DG, hoc est ipsa AF, sit æqualis Z. At angulus ADG ad verticem sit æqualis angulo C: iungantur BF, FG.

[a] 3. tertij.

Quoniam itaque datur angulus ADG, dabitur etiam & angulus FDG, vtpotè reliquus ad duos

ad duos rectos, dabitur quoque angulus FBG, vtpotè dimidius anguli FDG; siquidem
b 19.Dat. angulus FDG ad centrum duplus est anguli FBG ad circumferentiam; positione igitur b
data erit BF, quoniam positione datur & AB, & quia datum est punctum A, a quo in BF
c 31.Dat. ducta est AF; magnitudine data; propterea dabitur c ipsa AF positione quoque: vnde &
d 25.Dat. positione dabitur d punctum F; quoniam verò datus est angulus ADG ad centrum, datus
e 29.Dat. erit & angulus AFG ad circumferentiam, vt eius dimidius, atque data erit e positione FG;
f 25.Dat. quare datum erit f & punctum G: eritque g data quoque positione GD, quoniam datus est
g 29.Dat. angulus DGF, cùm hic ob æqualia latera DG, DF sit æqualis angulo DFG; quamobrem
h 25.Dat. datum erit h & punctum D. Cùm itaque datæ sint extremitates A,D,G datarum positione
AD, DG, AG, ipsæ quoque & magnitudine datæ erunt.

Compositio.

Componetur autem sic.

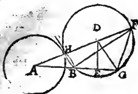
Producatur AB in G, & fiat angulus GBF æqualis dimidio anguli H, quem relinquit è duobus rectis angulus C: & in BF ponatur AF æqualis Z: fiat autem angulus AFG æqualis dimidio anguli C: angulus verò FGD æqualis angulo AFG; erunt igitur æquales DG, DF: communi addita AD, composita quidem ex lateribus AD, DG trianguli DAG æqualis erit ipsi AE, hoc est Z datæ.

Mox verò centro D, interuallo DG, vel DF describatur circulus BGF. Quoniam igitur angulus C duplus est anguli AFG ex constructione, similiter & angulus ADG ad centrum duplus est anguli AFG ad circumferentiam; erit propterea angulus ADG ad verticem, dato angulo C æqualis; quamobrem & angulus FDG angulo H; est autem angulus H duplus anguli FBG, ex constructione; proinde & angulus FDG eiusdem anguli FBG duplus erit; est autem angulus FDG ad centrum insistens circumferentiæ FG, cui pariter angulus FBG insistit; ergo ex eo, quod præmissum est Lemmate, angulus FBG ad circumferentiam erit:
a 3 tertij. agatur ipsi AG perpendicularis LE: propterea æquales erunt a BE, EG: quamobrem differentia segmentorum AE, EG erit ipsa AB data. Constructum est ergo triangulum DAG quale oportebat.

Lemma primum ad sequens Problema.

Si angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia verò laterum semidiameter, & ducatur linea recta non ex centro circuli, sed ab altera extremitate differentiæ segmentorum baseos constituens cum ea angulum æqualem dimidio, qui est ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea circulum secabit.

Sit triangulum DAG, in quo perpendicularis DE, secet basin AC in E: centro autem D, interuallo minoris lateris DG, describatur circulus secans latus AD productum in punctis H, F, basin verò AG in B; laterum igitur DA, DG differentia erit AH, differentia verò segmentorum AE, EG, erit EB, iungantur autem BH, FG.



Quoniam igitur quadrilaterum FGBH est in circulo, anguli HBG, HFG sunt ex aduerso duobus rectis æquales; sed & anguli HBG, HBA sunt æquales duobus rectis; ergo anguli HBG, HFG angulis HBG, HBA æquales erunt; dempto igitur communi angulo HBG, reliquus HFG, reliquo HBA æqualis erit; sed angulus HFG ad circumferentiam dimidius est anguli HDG ad centrum; ergo & angulus HBA eiusdem anguli ADG dimidius erit. Dico igitur circulum sub A centro, interuallo AH descriptum, secari ab ipsa BH. Manifestum est autem ipsam BH, in eum incidere, quoniam punctum H est in circumferentia, si igitur eum non secat, tangit. Tangat si fieri potest, & contactus erit in H: iungatur autem BF; ergo
a 18. tertij. *rectus erit a angulus AHB, & ideo æqualis recto HBF, qui est in semicirculo: quare pa-*
b 27 primi. *rallelæ erunt b AF, BF, quod est absurdum: conueniunt enim in F. Non igitur BH tangit circulum, cuius centrum A sed secat. Quod erat demonstrandum.*

Lemma

Lemma secundum ad idem.

Secet circulum sub A centro recta linea BHL in punctis H, L & per punctum H, quod sit propius ad B, ducatur altera recta AHI. Dico angulum IHB, minorem esse recto.

Diuidatur enim HL bifariam in E, & iungatur AE; rectus igitur erit angulus AEH; ac proinde angulus EHA recto minor, cùm tres anguli cuiuslibet trianguli, atque adeo trianguli AEH, sint æquales duobus rectis; sed angulus EHA æqualis est angulo IHB, cùm sint ad verticem; ergo & angulus IHB recto minor erit.

Problema .

Data differentia segmentorum baseos trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Resolutio.

Data sit differentia segmentorum baseos trianguli AB, differentia laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.

Factum iam sit, atque triangulum illud esto triangulum DAG, in quo perpendicularis DE; centro autem D, interuallo minoris lateris DG, describatur circulus secans latus DA, in H, & basin AG in B; baseos igitur segmentorum AE, EG, differentia erit AB, laterum autem DA, DG erit AH. Sit igitur AB positione atque magnitudine data, at ipsa AH esto æqualis datæ Z, angulus autem ADG ad verticem æqualis angulo C: protrahatur AD vsque ad circumferentiam in F, & iungantur HB, BF, FG.

Quoniam igitur quadrilaterum FGBH est in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerso duobus rectis æquales erunt; sed & anguli HBG, HBA duobus rectis sunt æquales; ergo anguli HBG, HFG, angulis HBG, HBA æquales erunt: auferatur vtrinque angulus HBG: reliquus igitur HFG, reliquo HBA æqualis erit; sed angulus ADG ad centrum duplus est anguli AFG ad circumferentiam; ergo & anguli HBA duplus erit angulus ADG, sed datur angulus ADG; dabitur etiam & angulus HBA; quare dabitur [a] BH positione. Quoniam autem à dato puncto A in ipsam BH ducta est AH magnitudine data, dabitur [b] AH quoque positione, & ob angulum datum HBF (est enim rectus in semicirculo) data [c] erit BF positione, & datum [d] quoque erit punctum F, quamobrem, & data [e] magnitudine quoque erit HF; Quoniam autem æquales sunt HD, DF dabitur punctum D, sed datur, & punctum G; ergo dabitur [f] DG positione, & magnitudine, sed datur, & punctum A; ergo & AD, AE positione [g] & magnitudine datæ erunt.

a 19 Dat.
b 31. Dat.
c 29. Dat.
d 25. Dat.
e 26. Dat.
f 26. Dat.
g 26. Dat.

Compositio.

Componetur autem sic. Centro A interuallo rectæ Z æquali, describatur circulus, & fiat angulus ABH æqualis dimidio anguli C: ex eo autem quod primo loco præmissum est lemmate recta BH circulum ipsum secabit; secet autem in punctis H, L: per punctum

Ss vero

verò H, quod propius sit ad B; recta ducatur linea AHI ipsi vero BH ducatur perpendicularis BF.

Quoniam igitur ex eo, quod secundo loco præmissum est Lemmate angulus IHB minor est recto, & angulus FBH rectus, erunt ambo simul duobus rectis minores, ac proinde coibunt rectæ lineæ AI, BF, coeant in F: secetur autem HF bifariam in D: & centro D, interuallo DH, vel DF, circulus describatur, cuius circumferentia transibit necessariò per B, ob rectum angulum HBF: mox autem protrahatur AB donec circulum secet FBH in G, & iungantur DG, FG: ipsi autem AG ducatur perpendicularis DE, erunt igitur æquales BE, EG, & ideo differentia segmentorum AE, EG erit ipsa AB data. Non dissimiliter quoniam æquales sunt DH, DG, vt semidiametri: differentia quidem laterum AD, DG erit AH, cui æqualis est Z data ex constructione. Superest ostendendum, quòd angulus ADG ad verticem trianguli DAG, æquetur angulo C, idque sic demonstrabitur. Quoniam etenim quadrilaterum FG BH est in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerso duobus rectis erunt æquales: sed & anguli HBG, HBA sunt æquales duobus rectis: ergo anguli HBG, HFG, angulis HBG, HBA æquales erunt: dempto communi quidem angulo HBG reliquus HFG relliquo HBA æqualis erit, sed anguli HFG ad circumferentiam duplus est angulus HDG ad centrum: ergo & anguli HBA duplus erit angulus ADG: sed & angulus C duplus est anguli HBA ex constructione: ergo angulus ADG, angulo C æqualis erit. Quod erat operæ pretium ostendere. Constructum est igitur triangulum DAG quale oportebat.

DE METHODO, PER IMPLICITVM DATORVM VSVM, QVAM Auctor in locum Antiquæ iam explicatæ subrogauit, & in Problematum Resolutionibus adhibere consueuit.

CAPVT XII.

Datorũ vsus in Problematum resolutionibus instituendis plerisque non arridet.

QVamuis Antiqua Methodus beneficio Datorum ad Problemata resoluenda commendabilis sit, magnique facienda, tamen non defuerunt, nec desunt, quibus illa minus probetur, cùm arbitrentur inde potius mentem confundi, & expeditius Problematibus satisfieri neglecto Datorum vsu. Cùm hac de re iampridem Ioannes Antonius Roccha Regiensis felicis memoriæ, & ego differeremus Ferrariæ commorantes, vbi is pro Serenissimo Francisco Mutinæ Duce, Mathematici, & Ioannes Fontana Architecti partes sustinerent; ego autem pro Innocentio X. P. M. in negotijs Vallium Comacli; Mathematici personam gererem, & Ioannes Azzonius Architecti munere fungeretur aduerti plurimum eum esse propensum in detestationem vsus ipsorum Datorum, dicentem, nihil inde vtilitatis auriri; tunc autem cæpi (eius enim auctoritas apud me non parum habebat momenti, cum eũ ingenij alacritate summa, in his disciplinis pollere cognouissem) cæpi inquam perpendere num loco illius Resolutionis ab Antiquis vsurpatæ, quæ nimirum Datorum vsu perficitur, alia quædam substitui posset non inferioris vtilitatis; atque tandem mihi licuit hanc ipsam exeogitare, per implicitum Datorum vsum, quam hic paucis subijciam, In eo porrò consistit, vt,

Præceptum. *Consideremus ex hypothesi quòd Problema ipsum sit factum, quid inde consequatur; nam hunc in modum ratiocinando peruenimus ad ea, quæ data sunt, ac nota: vnde quod quæritur, datum redditur, & ex datis licet perficere.*

Sed vt rectiùs, atque clariùs hoc explicemus, non nulla in medium afferemus exempla, & primo illa, quorum Antiqui beneficio Datorum resolutiones instituerunt; deinde verò alia, quæ nobis proposita resoluenda fuerunt.

Hæc autem resoluendi ratio desinit, vbi Theorema, sed Theorema in verum, quatenus huiusmodi atq; in θεωρητὸν Problema in verum prout aliquod factibile atq; in πρακτὸν.

Illud porrò commemorandum videtur, nimirum ad quamlibet Analysin instituendam, opus quadam esse præparatione, ad suppositum accersita quod cuique perspectum fiet, si Problematum antiquas resolutiones aduerterit, in quibus præmittitur constructionis quoddam rudimentum; mox ex Analysi ritè celebrata, numeris omnibus absoluta constructio deduci-

deducitur; quod plus, minusue faciendum, prout oblati Problematis exposcit natura: quamobrem non mirandum, si nos itidem ante ipsius Analyseos institutionem, aliqua prælibemus ad Geometricam effectionem spectantia; Nam id quoque Veteres facere consueuerunt, quodque in præhabita decenti præparatione, necessitate coacti adhibuerunt in effectione ex instituta Analysi, deprompta, postmodum inculcarunt. Sic apud harum Disciplinarum Proceres Pappum Alexandrinum, Archimedem, Apollonium, obseruare licet; cum non semel primo Analyseos vestibulo præcipiatur, vt recta ducatur circulum contingens; quædam agantur lineæ; circulus ex dato puncto, tanquam centro dato quidem interuallo describatur, & id genus alia, quæ deinceps Analysi instituta in effectione inde deducta, repetuntur; propterea quamsæpissimè quædam effectionis adumbratio, vel si mauis rudimentum, non præmittendum ex arte sed ingenij potius, qua quis pollet alacritate solertiaque, nemini profectò licet inficias ire.

Methodum autem hanc, vt sanè decet, prius in Problematibus ab alijs antiqua Methodo scilicet Datorum vsu resolutis; postmodum in alijs, quæ nobis huius æui præclarissimi Geometræ resoluenda proposuerunt experiri iuuabit.

Problema.

Exemplum I.

Quadrato existente AD, producere AC in E, & facere F datam, quæ ad punctum B pertineat.

Resolutio.

Sit iam factum, sitque recta H, cui EF æqualis esse debeat. Quoniam igitur H recta linea data æqualis est rectæ EF, erit etiam quadratum ex H æquale quadrato EF; vtrinque addito communi quadrato CD; ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadratis CD, & EF, sed ex Lemmate quadrata CD, & EF, æqualia sunt quadrato DG; ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadrato DG, hinc;

Compositio.

Protrahatur BD in G, ita vt quadrato ex DG æqualia sint quadrata ex DC & H, & super BG descripto semicirculo BEG, qui, vt supra ostensum est transibit super punctum C: protrahatur AC donec occurrat eius peripheriæ in E, & agatur EB. Erit enim EF æqualis H. Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Fiat vt dictum est.

Quoniam igitur quadrata ex CD, & H, per constructionem æqualia sunt quadrato DG, sed quadratum D ex antecedenti Lemmate æquale est quadratis CD, & EF; ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadratis CD, & EF; vtrinque sublato quadrato CD; ergo quadratum H æquabitur quadrato EF; ergo & H æquabitur EF; quod facere oportebat.

Cætera verò patent ex supradictis.

Problema.

Exemplum II.

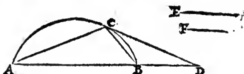
Circuli portione data in recta linea AB, inflectere ACB, in data proportione E ad F.

Resolutio.

Sit iam factum, & à puncto C ducta intelligatur recta contingens CD.

 Quoniam

Quoniam igitur est vt E ad F, ita AC ad BC; ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AC ad quadratum BC, sed vt quadratum AC ad quadratum BC, ita quadratum AD ad quadratum DC, cùm fit vt AC ad BC, ita AD ad DC; ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AD ad quadratum DC, sed vt quadratum AD, ad quadratum DC, ita est AD ad DB, cùm AD, DC, DB, sint proportionales; ergo vt AD ad DB, ita quadratum E ad quadratum F.



Compositio.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Recta AB data addatur BD, ita vt data AB cum adiuncta BD, ad eandem adiunctam BD, rationem habeat, quam quadratum E ad quadratum F; ductaque tangente DC, agantur CA, CB; erit enim vt E ad F, ita AC ad BC.

Quoniam igitur est vt AD ad DB, ita quadratum E ad quadratum F; sed vt AD ad DB, ita quadratum AD ad quadratum DC, cùm AD, DC, DB sint proportionales: ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AD ad quadratum DC: sed vt quadratum AC ad quadratum BC, ita quadratum AD ad quadratum DC, cùm sit vt AC ad BC, ita AD ad DC: ergo vt quadratum E ad quadratum F, ita quadratum AC ad quadratum BC: ergo vt E ad F, ita AC ad BC.

Problema.

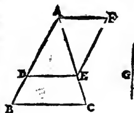
Exemplum III.

Rectis lineis AB, AC positione datis, ducere DE parallelam rectæ lineæ positione datæ, & facere ipsam DE datam, hoc est rectæ lineæ magnitudine datæ æqualem.

Resolutio.

Sit iam factum, & recta G sit data, cui æqualis ducta sit DE parallela rectæ AF. Considerandum est quid inde sequatur.

Quoniam igitur DE, est æqualis G, & parallela ipsi AF, ergo ducta EF parallela ipsi AB erit AD EF parallelogrammum: ergo AF cui parallela est DE, erit æqualis G.



Compositio.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Ducatur AF faciens angulum quemcunque cum ipsa BA, & fiat æqualis G: mox agatur FE parallela ipsi BA; ducaturque ED parallela ipsi AF: nam DE problemati satisfaciet.

Quoniam igitur AF, cui parallela ducta est DE, est æqualis G; ergo ducta EF parallela ipsi AB, erit AD EF parallelogrammum, atque adeò DE æqualis AF: ergo DE est æqualis G, & parallela AF.

Exemplum IV.

Problema.

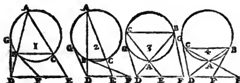
Circulo positione dato ABC, & datis duobus punctis D, E, inflectere DAE, & facere BC ipsi DE parallelam.

Resolutio.

Resolutio.

SVpponatur iam factum, ita vt ductis DA, EA occurrentibus peripheriæ circuli in punctis B, C, ducta BC sit parallela DE; ex D agatur circulum contingens DG, & ex B contingens BF. Quoniam igitur BC est parallela rectæ DE; ergo BF circulum tangens in puncto B, cadit

Pro prima, & secunda figura.



super BC, DE, faciēs āgulos alternos DFB, FBC æquales; sed BF tāgit, & BC secat circulū; ergo in prima, & secunda figura angulus FBC æquabitur angulo DAE, sed angulus DFB erat æqualis angulo FBC; ergo angulus DFB æquabitur eidem angulo DAE; sed angulus ad D communis est vtrique triangulo BDF, & ADE; ergo & hæc ipsa triangula erunt æquiangula, & inter se similia; ergo vt AD ad DE, ita DF ad DB; ergo rectangulum ADB æquabitur rectangulo EDF; sed rectangulum ADB æquale est quadrato DG; ergo rectangulum EDF æquabitur quadrato DG, ergo erit vt ED ad DG, ita DG ad DF.

Compositio.

Ducta DG tangente fiat vt DE ad DG, ita DG ad DF, & ex F ducatur recta FB, tangens circulum, & per B agatur DA: mox verò ducatur EA: agaturque BC; hæc enim erit parallela ipsi DE.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Quoniam igitur est vt ED ad DG, ita DG ad DF; ergo rectangulum EDF æquabitur quadrato DG; sed rectangulum ADB æquale est quadrato DG; ergo rectangulum ADB æquabitur rectangulo EDF; ergo vt AD ad DE, ita DF ad DB; ergo hæc ipsa triangula erunt æquiangula, & inter se similia, sed angulus ad D communis est vtrique triangulo BDF, & ADE; ergo angulus DFB æquabitur angulo DAE, & angulus DEA, æquabitur angulo DBF; sed BF tangit, BC verò secat circulum; ergo in prima, & secunda figura angulus FBC æqualis erit angulo DAE; ergo angulus DFB æquabitur angulo FBC, ergo BF circulum tangens in puncto B, cadit super BC, DE faciens angulos alternos æquales; ergo recta BC erit parallela rectæ DE.

Resolutio.

QVoniam igitur BC est parallela rectæ DE, ergo CE cadit super BC, DE, angulos BCE, DEC, alternos æquales faciens; sed in tertia, & quarta figura angulus DBF, æquatur angulo BCE, cum BF tangat, & BD secet circulum; ergo angulus DBF, æquabitur angulo DEC, sed angulus ad D, communis est vtrique triangulo DBF, DAE; ergo hæc ipsa triangula erunt æquiangula, & inter se similia, ergo vt AD ad DE, ita DF, ad DB; ergo rectangulum ADB, æquabitur rectangulo EDF; sed rectangulum ADB, æquale est quadrato DG, ergo rectangulum EDF, æquabitur quadrato DG; ergo vt ED ad DG, ita DG ad DF.

Pro tertia, & quarta figura.

Compositio.

QVoniam igitur est, vt ED, ad DG, ita DG ad DF, ergo rectangulum EDF, æquabitur quadrato DG; sed rectangulum ADB, æquale est quadrato DG; ergo rectangulum

ADB,

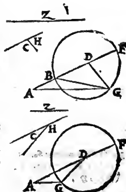
AdB, æquabitur rectangulo EdF; ergo vt Ad ad dE, ita DF, ad dB, ergo hæc ipsa triangula erunt æquiangula, & inter se similia; sed angulus ad d communis est vtriq; triangulo dBF,& DAE ergo angulus dFB, æquabitur angulo dAE,& angulus dEC, æquabitur angulo dBF; sed angulus dBF est æqualis angulo BCE; cùm BF, tangat, Bd, secet circulum: ergo in tertia, & quarta figura CE, cadit super BC, dE, angulos BCE, dEC, alternos æquales faciens; ergo BC, est parallela rectæ dE. Quod &c.

Exemplum V.

Problema.

Data base trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Resolutio.



Data sit trianguli basis Z, differentia laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C, sitque reperiendum triangulum.

Sit iam factum, illudque sit triangulum ADG, ita vt differentia laterum AD, DG sit AB; basis autem AG sit æqualis Z, datæ, & angulus ADG ad verticem sit æqualis angulo C. Intelligatur ex B extremo defferentiæ datę AB, ducta quidem BG.

Quoniam igitur angulus ADG æqualis est angulo C; ergo reliquus angulus FDG æquabitur reliquo angulo H; sed angulus FDG, æqualis est duobus angulis DBG, DGB ergo angulus H æqualis erit aggregato è duobus angulis DBG, DGB; sed AB existente differentia laterum AD, DG, sunt quidem æquales DB, DG, atque adeò anguli DBG, DGB sunt inter se æquales, propterea que angulus DBG dimidius est aggregati angulorum DBG, DGB; ergo angulus DBG est dimidius anguli H,

Compositio.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Recta AB differentia laterum protrahatur ad alterutram partem verbi gratia B, & ad punctum B, fiat angulus GBD æqualis dimidio anguli H: mox verò in BG aptetur AG æqualis Z. Deinde ad punctum G fiat angulus BGD æqualis angulo GBD; triangulum enim ADG, erit, quod quæritur.

Quoniam igitur angulus DBG, dimidius est anguli H, sed AB existente differentia laterum AD, DG, sunt quidem DB, DG æquales, atque adeò anguli DBG, DGB sunt inter se æquales, propterea que angulus vnus DBG dimidius est aggregati angulorum DBG, DGB; ergo angulus H æqualis erit aggregato è duobus angulis DBG, DGB, sed angulus FDG æqualis est duobus angulis DBG, DGB; ergo angulus FDG æquabitur angulo H; ergo reliquus angulus ADG æquabitur reliquo angulo C,

Exemplum VI.

Problema.

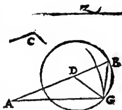
Data base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Resolutio.

Sit data trianguli basis Z, laterum aggregatum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.

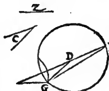
Pona-

Ponatur iam factum, sitque triangulum DAG, cuius basis AG sit æqualis datæ Z, aggregatum verò laterum AD, DG, sit æquale ipsi AB. Manifestum est ducta BG, quod angulus ADG æqualis erit duobus angulis DBG, & DGB.



Quoniam angulus ADG æqualis est angulo C, sed angulus ADG æqualis est aggregato angulorum DBG, & DGB; ergo angulus C æquabitur aggregato angulorum DGB, & DBG, sed angulorum DBG, DGB aggregatum duplum est vnius anguli DBG; ergo angulus C duplus erit anguli DBG, seu ABG.

Compositio.



Ad B extremum aggregati laterum fiat angulus ABG æqualis dimidio anguli C, & centro A internallo data recta Z describatur circulus, in cuius circumferentiam necessariò incidet BG, vt ostensum est supra: mox ad punctum G constituatur angulus DGB, æqualis angulo DBG; triangulum enim ADG erit, quod quæritur. *Effectio Geometrica ex Analysi deducta.*

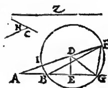
Quoniam igitur angulus C duplus est anguli ABG, seu DBG, sed ipsius anguli DBG duplum est aggregatum angulorum DBG, & DGB; ergo angulus C æquabitur prædicto aggregato angulorum DBG, & DGB, sed angulus ADG æqualis est aggregato angulorum DBG, & DGB; ergo angulus ADG æqualis erit angulo C.

Problema.

Exemplum VII.

Data differentia segmentorum baseos trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Factum iam sit, atq; triangulum illud esto DAG, in quo perpendicularis DE; & centro D, interuallo minoris lateris DG, describatur circulus, secans latus AD, protractum in F, & basin AG, in B: erunt BE, EG æquales; vnde AB, erit differentia segmentorum baseos AG: ducantur BF, FG; itaq; nedum habetur factum triangulum, sed triangulum vnà cum circulo prædicto. Quid inde sequatur videndum.



Intelligatur erecta perpendicularis EI & ducta ID.

Resolutio.

Quoniam igitur in triangulo ADG, aggregatum laterum AD, DG, æquale est rectæ Z; sed AF æqualis est aggregato laterum AD, DG, cùm DG, DF, sint æquales; vnde additâ communi AD, fit AF, æqualis aggregato ipsarum AD, DG; ergo AF, æquabitur Z.

Et quoniam angulus ADG, æqualis est angulo C; sed angulus ADG ad centrum, duplus est anguli AFG, ad circumferentiam; ergo angulus C, duplus erit anguli AFG.

Et quoniam angulus FBG, est ad circumferentiam, insistens circumferentiæ FG, cui insistit angulus FDG, ad centrum; sed angulus FDG, duplus est anguli FBG; ergo angulus H, duplus erit anguli FBG, cùm angulus FDG, supponatur æqualis angulo H.

Compo-

Compositio.

Effectio Geometrica, ex Analysi deducta.

Sit AB, differentia segmentorum baseos trianguli; protrahatur ad partes B; & fiat angulus FBG, aequalis dimidio anguli H; mox vero ex A, in BF, aptetur AF, aequalis Z; deinde ad punctum F, fiat angulus AFG, aequalis dimidio anguli C; & ad punctum G, fiat angulus FGD, aequalis angulo DFG: erit enim triangulum ADG, quod quaeritur.

Centro D, ad interuallum DG, vel DF, sunt enim aequales describatur circulus; ducaturq; BF.

Quoniam AF, est aequalis Z; sed AF, est aequalis aggregato laterum AD, DG, cùm DG, DF, sint aequales; vnde additâ communi AD, aggregatum ipsarum AD, DG, aequabitur ipsi AF; ergo aggregatum ipsarum AD, DG, aequabitur ipsi Z.

Et quoniam ex constructione angulus C, duplus est anguli AFG; sed angulus ADG ad centrum, duplus est anguli AFG, ad circumferentiam; ergo angulus ADG, aequabitur angulo C;

Et quoniam angulus H, per constructionem duplus est anguli FBG; ergo angulus FDG, cum angulus C sit ostensus aequalis angulo ADG, atq; adeo FDG aequalis angulo H, duplus erit anguli FBG; sed angulus FDG, est ad centrum, insistens circumferentiae FG, cui etiam insistit angulus FBG; ergo angulus FBG, ad circumferentiam erit.

Ductâ igitur DE, quae sit perpendicularis ipsi BG, erunt BE, EG, inter se aequales; ergo differentia segmentorum AE, EG, erit ipsa AB, data.

Constructum est igitur triangulum ADG, habens angulum ADG ad verticem, aequalem dato angulo C; & aggregatum laterum AD, DG, aequale datae rectae Z, atq; tandem AB datam, differentiam segmentorum AE, EG.

Aliter.

Resolutio.

Ex B, erigatur recta perpendicularis BI, & agatur FG: ducatur BD.

QVoniam igitur angulus ADG; aequalis est angulo C; sed angulus AFG: dimidius est anguli ADG, sunt enim DF, DG aequales; ergo angulus AFG dimidius erit anguli C: Cumq; AB, sit differentia segmentorum baseos, si DE perpendicularis cadat super EG, bifariam diuidet BG in E; ergo BD, DG, DF erunt aequales; quare puncta B, G, F, pertinebunt ad circulum; ergo angulus FBG ad circumferentiam dimidius erit anguli FDG ad centrum: sed angulus H est aequalis angulo FDG, ergo angulus FBG dimidius erit anguli H, sed angulus IBF, est rectus; ergo anguli IBG, IFG, erunt aequales duobus H, & C. Sed anguli H, & C sunt aequales duobus rectis, ergo anguli IBG, IFG, erunt aequales duobus rectis, ergo quadrilaterum IBGF; erit in circulo.

Compositio.

Effectio Geometrica, ex Analysi deducta.

Differentia data AB, protrahatur ad partes B; & fiat angulus FBG, aequalis dimidio anguli H, ex A, in BF, aptetur AF, aequalis Z; mox verò ex B, erigatur perpendicularis BI; diuisaq; IF, bifariam in D, centro D, interuallo DI, vel DF, describatur circulus, qui necessariò transibit per punctum B, secans AB protractam in G; agatur FG; ducaturq; DG: erit triangulum ADG, quod quaeritur.

Quoniam DG, est aequalis DF, ergo additâ communi AD, aggregatum laterum AD, DG, aequabitur ipsi AF; sed AF, facta est aequalis Z; ergo aggregatum laterum AD, DG, aequabitur Z.

Ducta autem perpendiculari DE.

Quoniam circulus, centro D, descriptus transit per puncta B, G, erit BE, aequalis EG; quare differentia segmentorum AE, EG, erit data AB.

Superest ostendendum angulum ADG, aequalem esse angulo C.

Quoniam enim quadrilaterum IBGF, est in circulo; ergo anguli IBG, IFG, erunt aequales duobus rectis; sed anguli quoq; H, & C, sunt aequales duobus rectis; ergo anguli IBG, IFG,

erunt

erunt æquales duobus angulis H, & C; sed angulus IBF, est rectus, & angulus FBG, per constructionem, dimidius est anguli H; ergo angulus AFG, dimidius erit angulo C; sed angulus AFG, dimidius est etiam anguli ADG, ergo angulus ADG, æquabitur angulo C. Quod oportebat ostendere.

Constructum est igitur triangulum, &c.

Problema.

Exemplum VIII.

Data differentia segmentorum baseos trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Resolutio.

DAta sit differentia segmentorum baseos trianguli AB; differentia laterum Z angulus ad verticem æqualis angulo C, oporteat reperire triangulum.

Sit iam factum, illudq; sit triangulum ADG, in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo minoris lateris DG, describatur circulus secans latus DA in H, basin AG in B. Itaq; diff. segmentorum baseos AE, EG, erit AB, defferentia verò laterum DA, DG, erit AH. Intelligantur ductæ BH, BF, FG.

In schemate intelligantur ducta recta GF, BH.

Quoniam igitur angulus ADG æqualis est angulo C; ergo dimidius anguli ADG æquabitur dimidio anguli C; sed angulus AFG dimidius est anguli ADC; hic enim ad circumferentiam, ille autem ad centrum; ergo angulus AFG æquabitur dimidio anguli C; sed angulus ABH æqualis est angulo AFG, vt mox constabit; ergo angulus ABH æquabitur dimidio anguli C. Quod facere datum est,

Lemma.

Quod autem angulus ABH sit æqualis angulo AFG, sic ostendo. *Quadrilaterum enim HGBF est in circulo; quare anguli HBG, HFG ex aduerso duobus rectis sunt æquales; sed etiam anguli HBG, HBA sunt æquales duobus rectis, ergo anguli HBG, HFG, erunt æquales duobus angulis HBG, HBA: dempto communi angulo HBG, remanebit angulus HFG, seu AFG æqualis angulo ABH.*

Compositio.

Differentia segmentorum baseos AB, protrahatur ad partes B; fiat autem angulus ABH æqualis dimidio anguli C; mox verò ex A in angulo ABH, aptetur AH, aqualis Z, & protrahatur ad partes H, deinde ipsi HB, fiat perpendicularis BF, qua necessariò cohibit cum AH; producta; deinde diuisa HF bifariam in D; centro D, interuallo DF, vel DH; describatur circulus, cuius circumferentia omninò transibit per B secans AB protractam ad partes B in G; agatur DG; cadat autem perpendicularis DE; erit enim triangulum ADG, quod quaeritur.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Differentia enim segmentorum baseos erit data AB, & differentia laterum erit AH, protracta enim AD ad F circumferentiæ punctum, erit AF, æqualis aggregato laterum AD, DG, sed DF, est æqualis minori lateri DG, differentia verò inter DF, AD est AH Superest ostendendum angulum ADG æqualem esse angulo C, quod ita manifestũ fiet. Ducatur FG.

Quoniam igitur angulus ABH æqualis est dimidio anguli C, ex constructione; sed angulus ABH æqualis est angulo AFG, vt ostensum est; ergo angulus AFG æquabitur dimidio anguli C; sed angulus AFG dimidius est anguli ADG; ille enim ad circumferentiam, hic autem ad centrum; ergo angulus dimidius anguli ADG, æquabitur dimidio anguli C; ergo angulus integer ADG, æquabitur integro angulo C, Quod erat operæ pretium ostendere. Constructum est ergo &c.

SCHOLION.

Vt ad Analyseos calcem, si Theorema fuerit, solemne illud adiungitur. Quod ita se habet; *propterea quòd Theorematis resolutio desinit in verum vt* θεωρητὸν speculabile; *Ita Problematis Analysis absoluitur dicendo*, Quod fieri potest, *vel* Quod datum est, *vel* Quod fieri nihil prohibet, *aut consimili, æquipollentiq; formula; siquidem hæc de qua loquimur Resolutio desinit in verum vt* πρακτὸν operabile. *Nostra igitur hæc Methodus, prout in Problematibus est occupata, ita perficitur, vt sistere tunc debeat Analysta, cùm primùm inciderit in aliquod verum, quod ipse potest operari. Ita quidem in primo Exemplo cùm in resoluendo peruenerit ad illud*, ergo quadrata CD, & H æqualia erunt quadrato DG. *Sistere debet potest enim tunc operari; siquidem nihil prohibet BD produci ad partes D vsque ad G, ita vt quadratum DG æquale sit quadratis rectarum H, & CD. Elementare enim est duarum rectarum quadratis æquale quadratum exhibere. Sic etiam in secundo Exemplo cùm ad illud peruenerit*, ergo vt AD ad DB, ita quadratum E ad quadratum F, *sistat; id enim fieri potest, nam conceditur rectæ AB adiungere BD, ita ut data cum adiuncta ad adiunctam rationem habeat datam, quæ est quadrati E ad quadratum F; vt siquidem data est ratio E ad F, ita data est ratio quadrati E ad quadratum F; sed ordinatum est iam, quo pacto proposito lateri, latus sit adiungendum, ita vt aggregatum ex dato, & adiuncto, ad adiunctum rationem habeat datam. Sic in tertio Exemplo, quod facilè cernitur. Sic & in quarto, cùm peruenerit ad illud*, ergo vt ED ad DG, ita DG ad DF, *sistat Analysta, nam cùm punctum sit datum D, datusque positione circulus ABC, recta contingens DG, ignorari nequit, dataque erit; estque etiam data DE, cùm eius extrema D, & E data sint; ergo etiam & DF dabitur. Ordinatum est enim in Elementis quo pacto datis duabus rectis lineis, tertia proportionalis reperiatur. Et in Exemplo quinto cùm ad illud peruenerit*, ergo angulus DBG est dimidius anguli H; *sistendum est; angulum enim H bifariam diuidere Elementare est; sic de alijs exemplis.*

Hæc autem Problemata sunt ex ijs, quæ Lugduni Batauorum ad nos Florentiam nouus Ignobilis Geometra resoluenda transmisit.

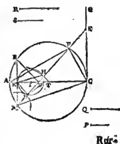
Problema.

Exemplum IX.

Dato in semicirculo ABC, puncto quidem B, quæritur in diametro punctum reflexionis, puta D, ita vt ducta incidente BD reflectatur in E punctum in linea tangente CE; at intercepta FE ad tangentem EC rationem habeat, vt S ad R.

Resolutio.

Sit iam factum, ita vt angulus ADB sit æqualis angulo CDE, & segmentum FE ad EC, sit vt S ad R: intelligatur protracta ED ad M, & ducta BM, intelligatur esse ML ad Mk, vt S ad R; & kH parallela MC; & per puncta K, H, L descriptus circulus. Item intelligantur ductæ KL, LT, AF, CF.



Quoniam igitur angulus KDB æqualis est angulo CDE, sed angulus KDM æqualis est angulo CDE; sunt enim ad verticem; ergo angulus KDB æquabitur angulo KDM; in triangulis igitur BKD, MKD, latus BK æquabitur lateri kM, vt constat ex Elementis; ergo BM diuisa est bifariam in K; ergo BM ad rectos angulos in k à diametro AC secatur.

Rur-

Rursus. Quoniam igitur est vt S ad R, ita FE ad EC, estque etiam vt S ad R, ita LM ad MK, & est angulus kMD æqualis angulo CED; ergo triangula MkL, ECF erunt æquiangula, atque adeò angulus MLK æquabitur angulo CFE; ergo angulus KLD æquabitur angulo CFD; sunt enim reliqui ad duos rectos; sed anguli ad verticem D sunt æquales; ergo triangula LKD, FCD, sunt æquiangula; ergo angulus LKD æqualis est angulo FCD; ergo angulus LkT in triangulo KLT æquabitur angulo FCA in triangulo CFA, sed angulus AFC æqualis est angulo kLT; vterque enim est rectus;circuli siquidem kLT, centrum I in diametro AC facilè demostrabitur, atq; adeò angulus kLT est in semicirculo, vt angulus AFC, ergo ductis FA, LT, angulus KTL æquabitur angulo CAF; ergo circuli segmentum kHL simile erit segmento CMF; ergo angulus KHM æquabitur angulo CME, & angulus MKH æquabitur angulo ECM; Quod fieri potest.

Compositio.

Ducatur Bk perpendicularis ipsi AC, & protrahatur vsque ad M: deinde fiat vt R ad S, ita KM ad aliam P: mox fiat vt P ad MK, ita MK ad aliam Q: ducaturque MC, & ad punctum K fiat kH parallela ipsi MC; centro autem M, interuallo æquali rectæ iam inuentæ Q, nempè MH, describatur arcus secans kH, in H; ex puncto M per punctum H ducatur ME secans CG in E, & AC in D: ducatur BD. *Effectio Geometrica ex Analysi deducta.*

Dico BD reflecti in DE, ita vt angulus ADB sit æqualis angulo CDE, & FE ad EC rationem habeat, quam S ad R.

Agatur CF, & secetur ML æqualis P, ducatur LK, per puncta verò L, k, H, describatur circulus LKH; & agatur LT: itemque FA.

Quoniam igitur BM ad rectos angulos secatur in K à diametro quidem AC; ergo BM diuisa erit bifariam in k; ergo latus BK æquale erit lateri kM; ergo in triangulis BkD, MkD, latera BK, KD æqualia sunt lateribus KM, KD vtrunque vtrique; sed angulus BkD æqualis est angulo MkD, vterque siquidem est rectus; ergo angulus KDB æquabitur angulo KDM; sed angulus KDM æqualis est angulo EDC; sunt enim ad verticem; ergo angulus kDB æquabitur angulo CDE.

Superest igitur ostendendum FE ad EC rationem habere, vt S ad R.

Quoniam itaq; in triangulis MkH, ECM anguli sunt æquales (angulus enim KMD æqualis est angulo CED, eo quòd KM, EC sint parallelæ) & angulus MKH æqualis est angulo ECM per constructionem (anguli enim ECA, & MkT sunt æquales, vtpotè recti: his porrò additi sunt æquales ACM, & HKT) ergo reliquus KHM æquabitur reliquo CME; ergo circuli segmentum KHL simile erit segmento CMF; ergo ductis FA, LT, erit angulus kTL æqualis angulo CAF: sed angulus AFC est æqualis angulo kLT, vterque enim est rectus: vt dictum est; ergo reliquus LKT æquabitur reliquo FCA: ergo in triangulis LKD, & FCD, angulus LkD æqualis est angulo FCD, sed anguli ad verticem D sunt æquales: ergo angulus KLD æquabitur angulo CFD, atque adeò kLM reliquus ad duos rectos æquabitur reliquo CFE: sed angulus KML æqualis est angulo CEF, vt vidimus ob parallelas BM, CE: ergo reliquus angulus MKL æquabitur reliquo ECF: ergo triangula MKL, ECF sunt æquiangula, atque similia: ergo vt LM ad MK, ita FE ad EC, sed LM ad MK, est vt S ad R per constructionem: ergo vt S ad R, ita FE ad EC. Quod facere oportebat.

Problema.

Exemplum X.

Data trianguli base, & aggregato laterum vnà cum ratione segmentorum baseos reperire triangulum.

Data sit basis AC, laterum autem aggregatum CE: at verò ratio, quam habent ad inuicem segmenta baseos sit, vt S ad R. Oporteat reperire triangulum.

Resolutio.

Sit iam factum, illudque triangulum esto ABC; ex puncto autem B cadat perpendicularis BG, ita vt segmentum baseos AG ad segmentum GC, sit in ratione S ad R, &

aggregatum laterum AB, BC, æquale sit rectæ CE datæ. Manifestum, si centro C, & interuallo CE describatur circulus EFH, & puncto B, trianguli ABC vertice, interuallo BA minoris lateris describatur circulus AFD, quod hic priorem tanget in puncto quo latus CB protractum ad partes B, perueniet; est enim punctum illud, puta F, extremum semidiametri circuli maioris, cuius centrum C,& extremum semidiametri circuli minoris, cuius centrum B, ad quod indagandum præhabendum est punctum F: sic enim comparabitur punctum B, circuli centrum, & quæsiti trianguli vertex; sed ad inquirendum punctum F describendus est circulus transiens per A,D, tangens alterum in F &c. vt constituta sint triangula similia FAD, FLM.

Sit iam factum &c. & ducatur Lk tangens circulum in L, occurrens in K diametro EH protractæ ad partes H.

Quoniam igitur circulus transiens per puncta F,A,D, tangit circulum HFIE intus in puncto F: sed si fuerint duo circuli, quorum vnus tangat intus alium, triangula, quorum vertex est in illo puncto, circulis prædictis inscripta, sunt inter se similia ergo triangulum FAD, simile est triangulo FLM: ergo angulus FAD æquabitur angulo FLM: angulo ad F communi existente vtrique triangulo ADF, MLF: ergo angulus ADF æquabitur angulo LMF: sed ducta tangente KL, angulus ALk comprehensus à secante, & tangente æqualis est [a] angulo LMF: ergo angulus ALk æquabitur angulo ADF: ergo triangula KAL, FAD similia erunt: ergo circa æquales angulos KAL, FAD latera erunt proportionalia: ergo vt kA ad AL, ita FA ad AD: ergo vt KA ad FA, ita AL ad AD: ergo rectangulum KAD æquabitur rectangulo FAL, hoc est HAE: ergo vt AD ad AE, ita AH ad AK. Quod fieri potest,

[a] 32. tertij.

Compositio.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Protrahatur igitur AC ad partes C in E, ad partes A in infinitum; fiat autem vt AD ad AE; ita AH ad AK: at verò ex puncto k ducatur KL tangens circulum HFE, in puncto L, à puncto autem L, per A ducatur LF, & à puncto F per D, agatur FM, ducaturque LM: mox autem per centrum C ab eodem F agatur FN secans perpendicularem GI in B.

Quoniam igitur facimus hunc in modum triangula illa similia, habito puncto F, ex hoc ducta per C centrum, quæ rectam excitatam GI perpendicularem secet in B, comparabitur trianguli vertex circuli centrum, cuius circumferentia tangit circumferentiam circuli FHE transiens per punctum A.

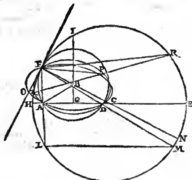
Centro C, interuallo CE describatur circulus EFH: deinde secetur AC in G, ita vt AG sit ad GC in ratione vt S ad R: ex puncto G excitetur GI ad rectos angulos, & ex maiori segmento GC abscindatur GD æquale minori AG: Deinde in recta GI reperiatur punctum B, quo tanquam centro, si circulus describatur transiens per puncta A, D, simul tangat circulum FIEH, verbi gratia in F, agaturque AB: erit enim triangulum ABC, quod quæritur: nam basis eius est data AC, insuper laterum AB, BC aggregatum æquale est ipsi FC; siquidem AB,FB sunt æquales,BC verò communis,atque adeò æquale illud erit ipsi CF, seu CE laterum aggregato. Insuper segmenta AG, GC, seruant inter se rationem ex constructione vt S ad R. Superest ostendendum, quo nam pacto punctum B sit centrũ &c.

Quoniam igitur fecimus vt AD ad AE, ita AH ad AK, erit rectangulum KAD æquale rectangulo HAE,hoc est FAL. Cùm igitur rectangulum KAD æquale sit rectangulo FAL, erit vt KA ad FA, ita AL ad AD, & permutando vt KA ad AL, ita FA ad AD: quamobrem circa æquales angulos KAL, FAD, latera sunt proportionalia, proinde triangula

KAL.

KAL, FAD erunt similia, ob id angulus ALk æquabitur angulo ADF: sed angulus ALK comprehensus à secante, & tangente æqualis est angulo LMF in alterno segmento: ergo angulus ADF æquabitur angulo LMF: angulus verò ad F communis est vtrique triangulo ADF, LMF: ob id reliquus FAD, reliquo FLM æqualis erit: propterea triangulum FAD simile erit triangulo FLM: sed si fuerint duo triangula similia, quorum vertex sit communis, circulus circumscriptus triangulo minori tangit in puncto verticis, circulum circumscriptum triangulo maiori vt infra constabit ergo circulus transiens per puncta F, A, D, necessariò tanget circulum HFIE, intus quidem in puncto F. Dico autem huiusmodi circuli centrum necessariò esse punctum B; ita vt punctum istud intersectionis diametri FN, cum perpendiculari GI centrum sit illius circuli, qui transiens per puncta A, D, tangit interius circulum HFIE in puncto F. Quoniam enim circulus transiens per puncta F, A, D, necessariò intus tangit maiorem circulum in F, recta quæ ducitur à contactus puncto F per C, circuli maioris centrum, necessariò transibit etiam per centrum circuli minoris FAD. Et quoniam GI secat bifariam, & ad rectos angulos rectam AD, necesse est, vt centrum circuli transeuntis per puncta A, D, cuius recta AD est chorda, necesse est inquam, vt centrum ipsius circuli sit in recta GI: debebat autem esse in diametro FN: ergo in puncto B, in quo se mutuò secant GI, FN centrum supradictum erit &c.

Quòd autem circulus AFD, tangat interius in puncto F, circulum HFIE, hunc qui sequitur in modum ostendemus.



Intelligatur recta OF tangens circulum LFM in puncto F, hæc autem cùm tangat circulum sectum ab FL constituet cum ipsa FL angulum æqualem angulo FML, atque adeo æqualem angulo FDA demõstratum est enim triangulum FAD, simile esse triangulo FLM; sed OF tangens circulum LFM in puncto F, ducta est ad extremitatem lineæ AF, circulum AFD secans in F, facitque angulum OFA æqualem angulo ADF in alterno circuli segmento AFD; ergo tangit circulum AFD in puncto F; sed tangebat etiam circulum LMF in eodem puncto F; ergo circulus AFD, tangetin F, circulum LFM.

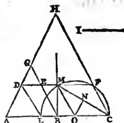
Quòd autem si recta OF tangit circulum LFM in puncto F, & in eodem etiam circulum AFD, necessariò circulus vnus in eodem puncto F ab alio tangi debeat. Sic ostenditur.

Si circulus circulum non tangit, aut circulus AFD secat circulum LFM, in F, ita vt vltra tangentem OF excurrat eam secando, vt in O, & tunc OF non tanget circulum AFD; quod est falsum; ostendimus enim tangere. Si verò peripheria circuli AFD non excurrit vltra tangentem, sed inter rectam OF, & curuam LF contineatur, ita vt secet circulum LMF in F, tunc necessariò, cùm in eodem sint plano circuli, debebit ipse circulus AFD secare etiam in alio puncto, vt in Z, circulum LMF: ducatur ZF: agaturque ZP: est autem P punctum peripheriæ circuli, qui supponitur secare circumferentiam circuli LFM in punctis F, Z, transiens per puncta A, D, & protrahatur ad R, agaturque FR, ergo angulus OFZ factus à tangente, & secante æquabitur angulo ZPF in alterno circuli segmento ZPF; sed etiam angulus ZRF est in alterno circuli ZRF segmento; propterea angulus OFZ æquabitur angulo ZRF; erat autem æqualis angulo ZPF, ergo angulus ZPF æquabitur angulo ZRF, externus interno & opposito trianguli FPR. Quod fieri non potest.

Problema. — Exemplum XL.

Datum sit triangulum AHC, cuius basis AC diuisa sit bifariam in B; ex B verò acta sit BG; Oportet ducere DF parallelam ipsi AC, quæ abs BG secetur in E, ita vt rectangulum DEF æquale sit quadrato datæ rectæ I.

Hoc Problema tres habet casus, aut enim BG parallela est ipsi CH, vel non est parallela; si hoc secundum, vel BG protracta ad partes G coit cum CH protracta ad easdem partes



tes, vt in K, vel ipsa GB protracta ad partes B, coit cum ipsa HC ad easdem partes protracta, vt in K.

Determinatum autem est; non enim recta I debet esse maior eâ quæ possit rectangulum ABC.

Resolutio primi casus.

Sit iam factum, & ducta linea sit DF, parallela ipsi AC occurrens BG in E; ductaque sit DL parallela ipsi BG, & erecta intelligatur BM perpendicularis ad AC æqualis I.

Quoniam igitur rectangulum DEF æquale est quadrato I, sed quadratum BM æquale est quadrato rectæ I, cùm BM sit æqualis ipsi I; ergo rectangulum DEF æquale est quadrato BM; sed rectangulum LBC æquale est rectangulo DEF, vt mox constabit; ergo rectangulum LBC æquabitur quadrato BM. Quod facere datum est.

Lemma.

Quod autem rectangulum LBC æquale sit rectangulo DEF, sic ostendo.

Sunt enim DB, BC parallelogramma, atque adeo opposita latera erunt parallela: vnde DE æquabitur LB, & EF æquabitur BC; ergo rectangulum LBC æquabitur rectangulo DEF.

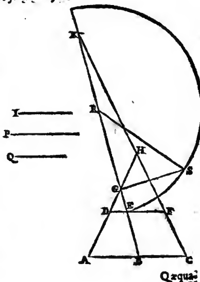
Compositio.

Effectio Geometrica, ex Analysi deducta. *Componetur autem sic; ex puncto B perpendicularis excitetur BM æqualis data rectæ I: agaturque MC, quæ bifariam secetur in N, ipsi MC agatur perpendicularis NO, occurrens ipsi AC in O. Cùm itaque sint duo triangula ONM, ONC, in quibus duo latera ON, NM æqualia sunt duobus lateribus ON, NC, vtrunque vtrique, angulus verò ONM æqualis est angulo ONC, vterque enim est rectus, quare basis OC æquabitur basi OM, atque adeo circulus centro O, & internallo OC descriptus transibit per punctum M: describatur igitur huiusmodi circulus, qui secet AC in L, & ex L agatur LD parallela ipsi BG, ducaturq; DF parallela ipsi AC occurrens BG in E. Erit enim rectangulum DEF æquale quadrato rectæ I.*

Quoniam igitur rectangulum LBC æquale est quadrato BM; sed rectangulum LBC æquale est rectangulo DEF vt superius ostensum est; ergo rectangulum DEF æquabitur quadrato BM; sed quadratum BM æquale est quadrato I; ergo rectangulum DEF æquabitur quadrato I.

Resolutio secundi casus.

Sit iam factum: ductaque sit DF parallela AC, occurrens BG in E, & rectangulum DEF æquale sit quadrato I; intelligatur BG protracta ad partes G, vt coeat cum CH producta, in puncto K. Quoniam autem rectangulum DEF supponitur æquale quadrato I, ergo rectangulum ABC, hoc est quadratum AB ad rectangulum DEF, erit vt ad quadratum I; ratio igitur quadrati AB ad vtrunque ex ijsdem rationibus componitur BC, ad EF, & AB ad DE, hoc est KB ad KE, & GB ad GE, hoc est rectanguli KBG ad rectangulum KEG; igitur quadratum AB ad rectangulum DEF, seu quadratum I, est vt rectangulum KBG ad rectangulum KEG, eaque sit ratio KG ad P. Sed si sit vt rectangulum KBG ad rectangulum KEG, nempè vt quadratū AB ad quadratum I, ita KG ad P, & ita quadratū GB ad quadratū Q. rectangulum PGB, plus quadrato



Q æqua-

Q æquabitur rectangulo KEG, hoc est quadrato GS, quæ possit huiusmodi rectangulum; perinde igitur est quadratum GS, ac rectangulum PGB, plus quadrato Q; ex quadrato igitur GS, innotescit rectangulum KEG.

Quoniam igitur rectangulum DEF, æquale est quadrato I; ergo quadratum AB ad quadratum I, eandem habet rationem, quam habet ad rectangulum DEF; sed quadratum AB, hoc est rectangulum ABC, cùm AB, BC, sint æquales, ad rectangulum DEF, rationem habet cōpositam ex BC, ad EF, & AB, ad DE; ergo quadratum AB ad quadratum I, rationem habet compositam ex ratione BC, ad EF, & AB, ad DE; sed rectangulum KBG, ad rectangulum KEG, rationem habet compositam ex ratione BC, ad EF, hoc est ex KB, ad KE, & ex ratione AB, ad DE, hoc est GB ad EG; ergo rectangulum KBG, ad rectangulum KEG, rationem habebit, vt quadratum AB, ad quadratum I; sed vt KG ad P, ita quadratum AB, ad quadratum I; ergo rectangulum KBG ad rectangulum KEG, rationem habebit, vt KG ad P; ergo conuertendo, rectangulum KEG, hoc est quadratum GS, hoc est rectangulum PGB, plus quadrato Q, ad rectangulum KEG, hoc est ad rectangulum KGB, plus quadrato GB, erit, vt P, ad KG, hoc est vt rectangulum PGB ad rectangulum KGB; ergo vt rectangulum PGB, ad rectangulum KGB, ita quadratum Q, ad quadratum GB. Hoc est vt P ad KG seu vt quadratum I ad quadratum AB, ita quadratum Q ad quadratum GB, & conuertendo &c. Quod fieri nihil prohibet.

Compositio.

Secetur kB in E, inter GB, ita vt rectangulum ABG ad rectangulum KEG, in ea sit ratione, quam habet quadratum AB ad quadratum data recta I: nempè fiat vt quadratum AB ad quadratum I, ita kG ad aliam vocatam P: mox verò fiat itidem, vt KG, ad P, hoc est vt quadratum AB ad quadratum I, ita quadratum GB, ad quadratum Q; deinde rectangulo sub GB, & P, addatur quadratum inuentum Q, bissecetur autem KG in R, & ad quadratum RG addatur aggregatum ex rectangulo sub P in GB, & quadrato Q, videlicet ex puncto G excitetur perpendicularis GS, quæ possit aggregatum prædictum; & ex R agatur RS, centro verò R, interuallo RS, describatur circulus secans KB, in E, & per E agatur DF parallela ipsi AC. Dico punctum E Problemati satisfacere, ita vt rectangulum kBG ad rectangulum kEG in ea sit ratione, quam habet kG ad P, atque adeò quadratum AB ad quadratum I vnde rectangulum DEF, æquale sit quadrato I. *Effectio Geometrica ex Analysi deducta.*

Quoniam igitur est vt quadratum I ad quadratum AB, seu vt P ad KG, ita quadratum Q ad quadratum GB, hoc est, vt rectangulum PGB ad rectangulum KGB, ita quadratum Q ad quadratum GB; ergo per 12. quinti, vt rectangulum PGB plus quadrato Q, hoc est quadratum GS, hoc est rectangulum KEG, ad rectangulum KGB, plus quadrato GB, hoc est rectangulum KBG, erit vt rectangulum PGB ad rectangulum KGB, hoc est vt P ad KG; ergo conuertendo rectangulum KBG ad rectangulum kEG erit, vt KG ad P; sed vt KG ad P ita quadratum AB ad quadratum I; ergo rectangulum kBG ad rectangulum KEG, rationem habebit vt quadratum AB ad quadratum I; sed rectangulum KBG ad rectangulum kEG rationem habet compositam ex ratione KB ad KE, hoc est BC ad EF & ex ratione GB ad EG, hoc est AB ad DE; ergo quadratum AB ad quadratum I rationem habebit compositam ex ratione BC ad EF, & AB ad DE; sed ex iisdem rationibus BC ad EF, & AB ad DE componitur ratio rectanguli ABC, hoc est quadrati AB, cum AB, & BC sint æquales ad rectangulum DEF; ergo quadratum AB ad quadratum I, eandem habet rationem quam habet ad rectangulum DEF; ergo rectangulum DEF æquabitur quadrato I.

Resolutio tertij casus.

Sit iam factum, ductaque sit DF parallela AC, rectangulum DEF æquale sit quadrato I, coeunte GB protracta ad partes B, cum HC protracta ad partes C, in puncto K; perpendendum autem quid inde sequatur, vt prodeat præparatio, ac insinuatio ad Analysin quod ex dictis in secundo casu facile constat. Interim.

Quoniam igitur rectangulum DEF æquale est quadrato I; ergo quadratum AB ad re-

ctangulum DEF eandem habet rationem, quam habet ad quadratum I; sed ratio rectanguli GBK ad rectangulum GEK componitur ex ratione BC ad EF, hoc est BK ad EK, & ex ratione AB ad DE, seu BG ad EG, ex quibus componitur ratio rectanguli ABC, seu quadrati AB; est enim AB æqualis BC, ad rectangulum DEF; ergo rectangulum GBK ad rectangulū GEK, erit vt quadratū AB ad quadratū I, eaq; sit ratio BK, ad P; sed rectāgulū GEK, æquale est rectāgulo PGB vt facilè ostendi potest; ergo vt BK ad P, ita rectāgulū GBK ad rectāgulum PGB; ergo per conuersionem rationis erit, vt BK ad BK minus P, ita rectangulum GBK ad rectangulum GBK minus rectangulo PGB; ergo rectangulum GBK minus rectangulo EBK, plus rectangulo EBG minus quadrato EB, æquabitur rectangulo PGB; ergo rectangulum EBK minus rectangulo EBG plus quadrato EB, plus rectangulo PGB æquabitur rectangulo GBK; ergo vtrinque subtracto rectangulo PGB, rectangulum EBK, minus rectangulo EBG plus quadrato BE, æquabitur rectangulo GBK, minus rectangulo PGB; nempè differentiæ rectangulorum quorum vnum GBK, alterum PGB; sed rectangulum EBK, minus rectangulo EBG, plus quadrato EB, idem est quod rectangulum EBL, plus quadrato EB, ergo differentia rectangulorum, quorum vnum GBK, aliud PGB æqualis est rectangulo EBL, plus quadrato EB, sed rectangulum EBL plus quadrato EB, idem est quod rectangulum BEL; ergo rectangulum BEL æquabitur rectangulorum prædictorum differentiæ; sed rectangulum EBM æquale est quadrato BS differentiæ rectangulorum quorum vnum GBK, aliud verò PGB; ergo rectangulum EBM æquabitur rectangulo BEL; ergo &c. Quod fieri potest.

Compositio.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Secetur KG in E inter B, G ea lege vt rectangulum kBG ad rectangulum kEG, rationem habeat, quam quadratum AB ad datum quadratum I, nempè fiat Bk ad P, vt quadratum AB ad quadratum I; proinde secetur LK æqualis BG, atque differentia BL diuidatur bifariam in R, & ex B excitetur BS, quæ possit differentiam rectangulorum sub BK, & BG, & sub P, & BG: agatur RS; centro autem R, interuallo RS describatur circulus secans GK in E; punctum enim E Problemati satisfaciet; nam rectangulum kBG ad rectangulum KEG rationem habebit vt Bk ad P, siue vt quadratum AB ad quadratum I, atque adeo rectangulum DEF æquabitur quadrato I.

Quoniam igitur ER est æqualis RM, & BR æqualis est RL; ergo reliqua EB æquabitur reliquę LM; ergo EL æquabitur BM; ergo rectangulum EBM æquabitur rectangulo BEL; sed rectangulum EBM æquale est quadrato BS, hoc est differentiæ rectangulorum, quorum vnum sub BK, & BG, aliud sub P, & BG continetur; ergo rectangulum BEL æquabitur rectangulorum prædictorum differentiæ; sed rectangulum BEL, idem est quod rectangulum EBL plus quadrato EB; ergo rectangulum EBL, plus quadrato EB æquabitur differentiæ rectangulorum, quorum vnum sub BG, & BK, aliud verò sub P, & BG continetur, sed rectangulum EBL, plus quadrato EB, idem est quod rectangulum sub BK, & EB, minus rectangulo

ctangulo sub EB, & GB plus quadrato BE; hæc igitur æqualia erunt prædictorum rectangulorum differentiæ, hoc est rectangulo sub GB, & BK minus rectangulo ex P in GB: vtrinque addatur rectangulum ex P in GB, fiet rectangulum, ex BK in EB, minus rectangulo ex BG in EB, plus quadrato EB plus rectangulo ex P in GB æquale rectangulo ex BG in BK; ergo rectangulum ex BG in BK minus rectangulo ex BK in EB, plus rectangulo ex EB in GB minus quadrato EB æquabitur rectangulo ex P in GB.

Quoniam verò est vt BK ad BK minus P, ita rectangulum GBK ad rectangulum GBK minus rectangulo ex P in GB; ergo per conuersionem rationis est, a vt BK ad P, ita rectangulum GBK ad rectangulum ex P in GB; sed rectangulum GEK æquale est rectangulo PGB; ergo rectangulum GBK ad rectangulum GEK erit, vt BK ad P, hoc est vt quadratum AB ad quadratum I. Proportio autem rectanguli GBK ad rectangulum GEK componitur ex ratione BK ad EK, seu BC ad EF, & BG ad EG, hoc est AB ad DE, ex quibus rationibus, nempè BC ad EF & AB ad DE, componitur ratio rectanguli ABC, seu quadrati AB, est enim AB æqualis BC, ad rectangulum DEF; ergo quadratum AB ad rectangulum DEF, eam habet rationem, quam habet ad quadratum I; ergo rectangulum DEF æquabitur quadrato I.

a Coral. 19. quinti.

Problema.

Exemplum XII.

Dato vno è lateribus trianguli, angulum verticis ambientibus, dato verticis angulo, dataque demùm ratione, quam habet rectangulum sub lateribus ad rectangulum sub baseos segmentis factis à rectà diuidente verticis angulum bifariam, reperire triangulum.

Hoc autem perinde est ac si dicamus; esto datus angulus ABC bifariã sectus à recta BK, iniunctum verò sit inter rectas AB, BC, aptare rectam quandam, verbi gratia, DC, ex dato puncto D, quæ ita diuidatur ab illa recta BK in puncto I, ita vt rectangulum sub DB, BC ad rectangulum DIC datam habeat rationem, vt R ad S.

Resolutio.

Sit iam factum; sitque recta aptata DC, sic diuisa ab ipsa BK in puncto I, ita vt rectangulum sub DB, BC, ad rectangulum DIC rationem habeat, datam vt R ad S; secetur BL æqualis BD, ducaturque DL, occurrens BK in H. Centro D, interuallo DI, circulus intelligatur descriptus secans AB, in F, & A; & BK, in I, & G: ductaque intelligatur GL.

Primò autem præhabendum, quod rectangulum DBC çquale est quadrato BI, plus rectangulo DIC; in cuius gratiam hæc instituitur *Resolutio lemmatica.*

Quoniam igitur rectangulum DBC çquale est quadrato BI, plus rectangulo DIC; ergo quadratum DB ad quadratum BI, plus rectangulo DIC est, a in eadem ratione, in qua est ad rectangulum DBC; sed vt DB ad BC, ita b quadratum DB ad rectangulum DBC; ergo & quadratũ DB ad quadratum BI, plus rectangulo DIC, erit c vt DB, ad BC; sed vt DB ad BC, ita d DI ad IC, & vt DI ad IC, ita e quadratum DI ad rectangulum DIC; ergo, vt quadratum DB, seu quod idem est, vt f rectangulum ABF, plus quadrato DI, seu quadrato DF, ad quadratum BI plus rectangulo DIC, ita g quadratum DI, ad rectangulum DIC; ergo vt rectangulum ABF ad quadratum BI, ita h quadratum DI ad rectangulum DIC; sed vt DI ad IC, ita, sumpta communi altitudine DI, est i quadratum DI ad rectãgulum DIC, & vt Bo ad BI, sumpta communi

a 7. quinti.
b 1. sexti.
c 11. quinti.
d 3. sexti.
e 1. sexti.
f 6 secundi.
g 11. quinti.
h 19. quinti.
i 1. sexti.

communi altitudine BI, ita [K] rectangulum ABF, hoc est rectangulũ [L] GBI ad quadratum BI; ergo vt BG ad BI, ita [M] DI ad IC; ergo permutãdo vt BG ad DI, ita [N] BI ad IC; sed BG ad GL, est [O] vt BI ad IC; ergo BG ad GL, est [P] vt BG ad DI; ergo basis GL est [Q] ęqualis basi DI; sed angulus DHI æqualis est [R] angulo LHG; ergo latera DH, HI æqualia sunt [S] lateribus LH, HG. Quod ita se habet.

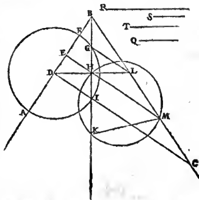
k 30. tertij, 1. ax. pri; 1. sexti, & 7. quĩti. L 30. tertij, et 1. ax. pri. M 11. quinti. N 16. quĩti. O ex Lemmate sequenti. P 11. quinti. Q 9. quinti. R 15. primi. S 29 pri. & 26. eiusdem.

Lemma.

Quod autem BG ad GL sit vt BI ad IC, sic ostendo. *Quoniam GH est [a] æqualis HI, & DH æqualis [b] HL, & anguli ad verticem H sunt æquales, vtpotè recti; ergo angulus IGL æquabitur [c] angulo GID; ergo GL erit [d] parallela DC, ergo vt BG ad GL, ita [e] BI ad IC.*

a 3. tertij. b 4 primi. c 4 primi. d 27. primi. e 29. primi, & 4. sexti.

Compositio.



Quoniam ergo latera DH, HI, æqualia sunt [α] lateribus LH, HG, sed angulus DHI æqualis est [β] angulo LHG; ergo basis GL ęquabitur [γ] basi DI; ergo vt BG ad GL, ita [δ] BG ad DI, sed vt BG ad GL, ita BI ad IC; ergo vt BG ad DI, ita [ε] BI ad IC; & permutando erit [ζ] vt BG ad BI, ita DI ad IC; sed vt BG ad BI, sumptâ communi altitudine BI, ita [η] rectangulum GBI, hoc est [θ] rectangulũ ABF, ad quadratum BI; estque etiam vt DI ad IC, ita, sumpta communi altitudine DI, [ι] quadratum DI ad rectangulum DIC; ergo erit, [κ] vt rectangulum ABF ad quadratum BI, ita quadratum DI ad rectangulum DIC. Cùmque sint [λ] omnia antecedẽtia ad omnia consequentia, vt est vnum antecedentium ad vnum consequentium; ergo vt rectangulum ABF plus quadrato DI, seu quadrato DF, vel quod idem est, [μ] quadratum DB ad quadratum BI plus rectangulo DIC, ita quadratum DI, ad rectangulum DIC; sed vt quadratum DI, ad rectangulum DIC, ita [ν] DI ad IC; & vt DI ad IC, ita [ξ] DB ad BC; ergo vt quadratum DB ad quadratum BI, plus rectangulo DIC, [ο] ita DB ad BC: sed vt DB ad BC, sumpta DB communi altitudine, ita [π] quadratum DB ad rectangulum DBC; ergo vt quadratum DB ad quadratum BI plus rectangulo DIC, ita [ρ] quadratum DB ad rectangulum DBC; ergo rectangulum DBC æquabitur [σ] quadrato BI, plus rectangulo DIC. Quod ostendendum erat.

α 3. tertij, & 4. primi. β 15. primi. γ 4. primi. δ 7 quinti. ε 11. quinti. ζ 16 quinti. η 1. sexti. θ 30 tertij, et 1. ax. pri. ι 1. sexti. κ 11. quinti. λ 12. quinti. μ 6. secundi. ν 1. sexti. ξ 3. sexti. ο 11. quinti. π 1 sexti. ρ 11. quinti. σ 9 quinti.

Resolutio.

DEinde demonstrandum principale intentum, quod nempè rectangulum DBC ad rectangulum DIC, rationem habeat, quam R ad S, & quidem præmissa decenti præparatione; scilicet inter R minus S, & S, media reperiatur T, & vt R minus S ad T, ita fiat BH ad Q, & vt BH ad Q, ita Q ad HK.

Quoniam igitur rectangulum DBC ad rectangulum DIC rationem habet, vt R ad S, sed quadratum BI, vna cum rectangulo DIC æquale est rectangulo DBC, vt ostensum est; ergo quadratum BI vna cum rectangulo DIC ad rectangulum DIC rationem habebit, [a] vt R ad S; ergo diuidendo [b] quadratum BI ad rectangulum DIC, atque adeo quadratum BH ad rectangulum EHM (ex ijsdem enim rationibus componuntur) habebit eandem proportionem, quam habet R minus S ad S; factum est autem vt R minus S ad T, ita T ad S; & vt R minus S ad T, ita BH ad Q: vnde quadratum BH ad quadratum Q rationem habet, [c] vt R minus S ad S; ergo quadratum BH ad quadratum Q eandem habebit [d] rationem, quam habet ad rectangulum EHM; sed rectangulum BHK æquale est [e] quadrato Q, (cum factum sit, vt BH ad Q, ita Q ad HK) ergo rectangulum EHM æquabitur [f] rectangulo BHK; ergo vt EH ad HK, ita [g] BH ad HM; & permutando vt EH ad HB, ita [h] KH ad HM, ergo æquiangula sunt triãgula EHB, KHM, atque adeo ãgulus EBH æqualis erit angulo HMK, æqualibus existentibus ad verticem BHE, MHK; vnde reliquus [i] æqualis reliquo. Quod fieri potest.

a 7. quinti. b 17. quinti. c coroll. 20. sexti; 22. eiusdẽ, et 11. quĩti. d 11. quinti. e 17. sexti. f 7. quinti, et 1. ax. pri. g 16. sexti. h 16. quinti. i 5. sexti.

In hoc igitur verum, veluti in απρακτον, incidimus, & hinc effectionem addiscimus.

Compo-

Compositio.

Secentur æquales BD, BL, ductaque DL, quæ erit perpendicularis ad BK. Inter R minus S, & S, media reperiatur T, & vt R minus S ad T, ita fiat BH ad Q; fiat verò vt BH ad Q, ita Q ad HK; & super HK descripto circuli segmento HMK, quod capiat angulum æqualem angulo ABK. Ducta MH, & protracta ad E; ductaque MK, & rectæ EM ex puncto D parallela ducatur DC, occurrens rectæ BK in I. Dico rectangulum sub DB, BC, ad rectangulum DIC, rationem habere datam, vt R ad S. Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Centro D ad interuallum DI describatur circulus secans AB in F, secans BK in G, agatur GL.

Et quoniam angulus EBH æqualis est angulo HMK ex constructione; anguli autem ad H sunt æquales, vtpotè ad verticem, & reliquus æqualis ᵅ reliquo; ergo triangula EHB, KHM, sunt æquiangula; ergo vt EH ad HB, ita ᵝ KH ad HM, & permutando ᵞ vt EH ad HK, ita BH ad HM; ergo rectangulum EHM æquabitur ᵟ rectangulo BHK; sed rectangulum BHK æquale est ᵋ quadrato Q (factū est enim vt BH ad Q, ita Q ad HK); ergo eadē est ζ ratio quadrati BH ad quadratum Q, quæ est ad rectangulum EHM; sed quadratum BH ad quadratum Q, rationem habet ᵑ vt R minus S, ad S (factum est enim vt R minus S ad T, ita T ad S; & vt R minus S ad T, ita BH ad Q) ergo quadratum BH ad rectangulum EHM, atque adeò quadratum BI ad rectangulum DIC (ex iisdem enim rationibus componuntur) eandem habebit ϑ rationem, quam habet R minus S ad S; ergo componendo ι quadratum BI plus rectangulo DIC, ad rectangulum DIC, erit vt R ad S; sed quadratum BI, plus rectangulo DIC, vt ostendimus, æquatur rectangulo DBC; ergo rectangulum DBC ad rectangulum DIC erit, ϰ vt R ad S. Quod facere oportebat.

α 32. primi. β 4. sexti. γ 16. quinti. δ 16. sexti. ε 17. sexti. ζ 7. quinti. η cor. 20. sexti, 22. eiusdē, & 11. quinti. θ 11. quinti. ι 18. quinti. κ 7. quinti.

AD AVCTORIS METHODVM, EAM, QVA ARCHIMEDES IN PROblematum resolutionibus vtebatur, reuocari ostenditur.

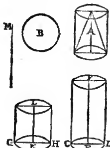
SI quis autem nostram hanc Methodum pro resoluendis Problematibus cum ea, qua vsus est Archimedes, contulerit, facilè deprehendet tantam inter ipsas esse affinitatem, vt illam ad nostram reduci facilè dixerit. Quod vt probè intelligas, iuuabit vnum, vel alterum Problema nostra hac Methodo resoluendum assumere, quibus suā iampridem Archimedes satisfecit. *Auctoris Methodo Archimedis Problemata demonstrantur.*

Problema.

Dato cono, vel cylindro, sphæram inuenire cono, vel cylindro æqualem. Exemplum XIII.

Resolutio.

SVpponatur iàm factum itaut sphæra B, sit æqualis cono, vel cylindro A. Fiat cylindrus CFD coni vel cylindri A sesquialter, atque adeo ipsius sphæræ B; fiat etiam eidem sphæræ B sesquialter cylindrus GLH, nempè cylindrus, cuius basis est circulus sphæræ maximus, & altitudo æqualis diametro eiusdem & vt CD ad GH, sic GH ad M.



Quoniam igitur sphæra B est æqualis cono, vel cylindro A: sed cylindrus CFD est sesquialter coni vel cylindri A atque adeo sphæræ B & cylindrus GLH sesquialter est ipsius sphæræ B; ergo cylindri CFD, GLH, erunt inter se æquales; ergo vt basis CD ad basin GH, hoc est vt quadratum CD ad quadratum GH, sic ᵃ altitudo KL, vel eius æqualis GH ad altitudinem EF; sed vt prima CD, ad tertiam M, ita quadratum primæ CD ad qua- a 15. duodecimi.

ad quadratum secundæ GH; ergo vt CD ad M, ita GH ad EF; ergo permutando vt CD ad GH, ita M ad EF; sed vt CD ad GH, ita ex constructione est GH ad M; ergo vt CD ad GH, sic GH ad M, & sic M ad EF. Quod fieri potest,

Et hoc est verum πρακτὸν, quo tendit Analysis, nempè vt inter CD, & EF duæ reperiantur mediæ proportionales GH, & M in continua ratione, quod fieri potest.

Compositio.

Effectio Geometrica ex Analysi deducta.

Fiat cylindrus CFD sesquialter, coni vel cylindri A, & inter CD, FE duæ mediæ reperiantur proportionales GH, & M; mox verò diametro GH describatur circulus pro basi cylindri GLH, cuius altitudo KL sit æqualis eidem GH; fitque demum sphæra B, cuius diameter sit itidem æqualis ipsi GH.

Quoniam igitur est vt CD ad GH, ita GH ad M, & ita M ad EF, nempè vt GH ad M, ita M ad EF, & vt CD ad GH, ita GH ad M ex constructione; ergo vt CD ad GH, ita M ad EF; ergo permutando vt CD ad M, ita GH ad EF; sed vt [a] prima CD ad tertiam M, ita quadratum primæ CD, ad quadratum secundæ GH; ergo vt quadratum CD ad quadratum GH, hoc est vt basis CD ad basin GH, ita GH vel ei æqualis KL altitudo, ad altitudinem EF; ergo cylindri CFD, GLH erunt [α] inter se æquales; sed cylindrus CFD est sesquialter coni, vel cylindri A; & cylindrus GLH sesquialter est [β] eiusdem sphæræ B; ergo sphæra B est æqualis cono, vel cylindro A. Quod faciendum erat &c.

a 16. quinti.

α 15. duodecimi.

β Men. 2. 1. de sphæra, & cylind. Archimedis.

Problema.

Datam sphæram plano secare, ita vt superficies segmentorum rationem inter se inuicem habeant eandem, quæ sit alia data.

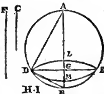
Theorema XIV.

Sit sphæra ADBE secanda plano DLEM, perpendiculari ad axem ita vt superficies segmenti DAE ad superficiem segmenti DBE, sit vt F ad C; huic autem Problemati vt satisfiat, supponitur iam factū; nempè superficiem segmenti DAE ad superficiem segmenti DBE, esse in ratione F ad C; præcipitur autem obseruandum esse quid inde sequatur, & ex hypothesi quod planum DLEM, secet sphæram modo iam dicto, obseruandum sequuturum, axeos segmentum AG ad segmentum GB, esse vt F ad C, idque, tanquàm Theorema, demonstrat Archimedes.

Nos autem supponentes illud iam esse factum, hunc in modum ratiocinamur Methodo, qua passim vti consueuimus.

Resolutio.

Ducantur AD, DB, & radio DA describatur circulus H, & radio DB, circulus I, & hæc ad præparationem pertinent.



Quoniam igitur sphæra ADBE secta est plano DLEM, prout Problema iubet, videlicet vt superficies segmenti DAE ad superficiem segmenti DBE sit vt F ad C, sed superficies segmenti DAE ad superficiem segmenti DBE, est [a] vt circulus H ad circulum I, hoc est vt circulus, cuius radius DA ad circulū, cuius radius DB, cùm circulus, cuius radius DA æqualis sit superficiei segmenti DAE, & circulus cuius radius DB æqualis sit superficiei segmenti DBE; ergo circulus, cuius radius DA ad circulū, cuius radius DB, erit vt F ad C; sed circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, est vt quadratum DA ad quadratum DB; ergo vt F ad C, ita quadratum DA ad quadratum DB; sed quadratum DA ad quadratum DB, est vt AG ad GB; ergo vt F ad C, ita AG ad GB.

a Archimed. lib. 1. de sphær. & cylīd. prop. 37, & 38.

Et hoc est illud verum πρακτὸν faciendum, quod ex Analysi præhabita deducitur, cuius præsidio Geometrica effectio comparatur.

Compositio.

Compositio.

Diuidatur AB sphæræ axis in puncto G, ita vt segmentum AG ad segmentum GB, sit vt F ad C, per punctum autem G ducta intelligatur DE ad rectos angulos cum AB: & per rectam DE planum intelligatur transiens perpendiculare ad axem, faciens cum superficie sphærica circuli circumferentiam DLEM. Erit enim superficies segmenti DAE ad superficiem segmenti DBE, vt F ad C.

Effectio Geometrica.

Intelligantur ducta AD, DB, & radio AD descriptus circulus H, & radio DB, circulus I.

Quoniam igitur est vt F ad C, ita AG ad GB, sed vt quadratum DA ad quadratum DB, ita est AG ad GB; ergo vt F ad C, ita quadratum DA ad quadratum DB; sed circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, est vt quadratum DA ad quadratum DB; ergo circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, erit vt F ad C; sed superficies segmenti DAE, ad superficiem segmenti DBE a est vt circulus, cuius radius DA ad circulum, cuius radius DB, cùm circulus, cuius radius DA æqualis sit superficiei segmenti DAE, & circulus, cuius radius DB, æqualis sit superficiei segmenti DBE, vt superiùs ostendimus; ergo superficies segmenti DAE ad superficiem segmenti DBE, erit vt F ad C.

a Archimedes lib. 1. de sphæra, & cylind. pro. 37. & 38.

De Deductione.

Deductio communis quidem est, tàm Theorematі, quàm Problemati, quamobrem de ipsa nobis agendum supra fuisset, cum de Theorematum resolutione tractaremus; quia tamen frequentior est in Problematibus; propterea de ipsa disserere huc transferendum duximus.

Deductio communis est Theoremati atq; Problemati.

Iuuat quammaxime Analystam sedulò perpendere, num oblato Problemati per Deductionem ad aliud satisfieri possit.

Deductio quid sit, & in quo consistat iam superiùs fuit à nobis explicatum. Tunc autem Problema aliquod nos ad aliud deducere dicimur, quando ratiocinando ad id peruenimus, quo facto propositum ipsum Problema solutum redditur, est enim Deductio transitus ab vno Problemate, vel Theoremate ad aliud; vtriq; siquidem communis est, vt dicebamus; Ita quidem olim quærentes Cubi duplicationem, Problema ad aliud deduxerunt, quod hoc consequitur, nempè in duarum mediarum, inuentionem, quæ sint in continua ratione; sic intueri licet apud Pappum Alexandrinum Libro septimo Prop. 89; ipse siquidem instituta quidem Analysi, vt oblato Problemati satisfaceret ratiocinando Datorum præsidio, deuenit tandem ad tres datas rectas lineas, ita vt Problema deductum sit ad determinatam sectionem, Datis tribus rectis lineis, earum vnam secare in puncto, & facere proportionem rectanguli ad rectangulum, æqualis ad æquale, quæ quidem apud ipsum videri possunt.

Deductio quid.

Problema de cubi duplicatione. Veteres ad illud quod est de duabus medijs continuè proportionalibus deduxerunt.

Non dissimiliter sequens Problema deduci potest ad determinatam additionem, vt mox videbimus. Quod autem Problema sequitur celebre est, non tantum eo nomine quòd ab Apollonio Magno Geometra propositum fuerit, sed etiam quoniam diuersorum Geometrarum exercuit ingenia, quorum imitatione nostras quoque vires, etsi tenuissimas experiri voluimus. Si quis igitur Analysin instituat nostra qua vtimur Methodo, videlicet explicito Datorum vsu neglecto, eo Problema deducet, vt punctis connexis recta linea, huic fiat additio, ita vt data cum adiuncta ad adiunctam propositam rationem obtineat; quod vt planum fiat sit.

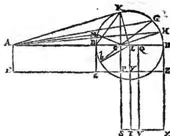
Problema alterũ quod ad aliud deduci potest.

Problema.

Exemplum XV.

Datis duabus rectis lineis in plano, punctisque datis, & data proportione inæqualium linearum, potest in plano circulus describi, ita vt lineæ à datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatæ proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Data



Data sint duo puncta A,C, & oporteat facere quod imperatum est. Fiat vt AB ad BC, ita AD ad CD, hoc est ducatur AC, eique addatur CD eâ lege, vt data AC cum adiuncta CD, nempè AD ad CD, sit vt AB ad BC, hoc est AC diuidatur in duas partes, AB, BC ita vt vna sit ad alteram, quemadmodum R ad S; mox vt AB minus BC ad BC, ita fiat AC ad CD; erit enim vt AB ad BC, ita AD ad DC: quo facto BD bissecetur in L, & centro L, interuallo alterutro, describatur circulus BMKGHD. Dico si à punctis A,C agantur rectæ ad peripheriam vt sunt AM, MC; AK, KC; AG, GC; AH, HC &c. habere inter se eandem rationem, quam habent AB, BC.

Primò autem id ostendam de duabus AK, kC, quarum vna KC perpendicularis est ad BD. Ducantur LK, KB.

Quoniam ex constructione vt est AB ad BC, ita AD ad CD, erit rectangulum sub AB, & CD æquale rectangulo sub BC, & AD. Protrahatur KC vsque ad S, vt CS sit æqualis AB, eiq; ducatur parallela, & æqualis DX: agatur SX, erit quidem rectangulum CX comprehensum sub rectis AB, CD; fiat autem rectangulum ED, vt latus AE, sit æquale BC, siue, quod idem est, ad rectam AD rectangulum applicetur, cuius latus alterum æquale sit BC; ducaturque Ba parallela ipsi AE, vel DZ; fiat LQ æqualis CL: & agatur QV parallela alterutri ipsarum CS, DX: ducatur etiam LT his parallela. Quoniam autem CL, LQ sunt æquales; item BL, & LD, reliqua BC, reliquæ QD æqualis erit; atque adeo rectangulum QX comprehenditur sub AB, & BC. Cùm igitur rectangulum ED, æquale sit rectangulo CX, & EB æquale sit rectangulo QX, remanebit CV æquale reliquo BZ; cùmque LZ sit dimidiū ipsius BZ; est enim basis LD, subdupla baseos BD & CT, dimidiū ipsius CV cùm basis CL subdupla sit baseos CQ proinde CT æquabitur LZ. At verò CS æquatur AB, ob id CT rectangulum comprehensum erit sub AB, & CL, insuper LY est æqualis CP, siue BC, ob id LZ erit comprehensum sub LD, & BC; quare rectangulum sub AB & CL, æquabitur rectangulo sub BC, & LD, seu rectangulo CBL; quapropter erit vt AB ad BC, ita DL ad
a 18. quinti. LC; & cōponēdo erit a vt AB, plus BC, hoc est vt AC ad BC, ita DL plus LC, hoc est DC ad
b 16. sexti. CL. Ergo rectangulum ACL æquale erit b rectangulo BCD; sed rectangulo BCD æquale
c 17. quinti. est quadratum ex CK; ergo eidem quadrato æquabitur rectangulum ACL; proinde c vt AC ad CK, ita CK ad CL; ergo tria puncta A,K,L sunt in circumferentia, adeò vt si supra AL describatur semicirculus, necessariò transeat per K, quo fit, vt duæ rectæ Ak, KL angulum efficiant AKL rectum. At quia anguli CBk, BKC sunt æquales recto (est enim BCK rectus, & tres anguli cuiuscunque trianguli sunt æquales duobus rectis) si BkC subtrahatur ab AkL recto, remanebit ipse CBk: at si auferatur ab eodem AKL, angulus idem BKC, remanebunt anguli AKB, CKL, qui simul sumpti æquales erunt angulo KBC, qui æqualis est angulo BKL; siquidem latera LB, Lk sunt æqualia; ergo AkB, CKL simul sunt æquales duobus BKC, CkL: communi sublato CKL remanebit AKB æqualis angulo BKC; ergo per tertiam sexti ratio AK ad KC eadem erit, quæ AB ad BC. Quod primo loco demonstrandum erat.

Sumatur deinde quodlibet aliud in peripheria punctum, sitque illud G, ad quod duæ rectæ AG, GC ducantur: protrahatur GC vsque ad punctum b in peripheria. Quoniam igitur vt AC ad CB, ita dicebamus esse DC ad CL; erit permutando, vt AC ad CD, ita BC ad CL, ob id erit rectangulum ACL, æquale rectangulo BCD, idest bCG; vt ergo AC ad CG, ita bc ad CL. At verò angulus bcL est æqualis angulo ACG ergo triangula erunt similia, & proportionalia erunt latera; proinde erit vt AG ad GC, ita bL ad LC, hoc est KL ad LC, nimirum AK ad KC, nimirum AB, ad BC, & ita de alijs etiam lineis ad alia peripheriæ puncta.

Quòd si præter hæc, data sit quoque recta bissecans angulum ad verticem, & perueniens ad ba-

ad basin, oporteat autem triangulum constituere super datam basin AC, agendum est vt supra, & ex puncto B aptanda est in circulo recta quæpiam bissecanti æqualis, vt exempli gratia, BK, & ex k ductis kC, kA, factum erit triangulum KAC, Problemati satisfaciens.

DE INEVNDA RESOLVTIONE COMPOSITIONEQVE in ijs Magnitudinibus quæ commensurabiles, & incommensurabiles dicuntur.

Siue Theorema, siue Problema fuerit propositum de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus, de quibus acutè, atque subtiliter disputat Euclides Lib. 10. Elementorum, non dubium quin eodem artificio tractari possit, quo in quacunque alia magnitudine, quantitateque, imò alia quacunque re, de qua ratiocinatio instituta fuerit fieri debere, nos hactenus explicuimus. Cùm igitur Theorema fuerit propositum id tanquam verum supponentes ratiocinando procedere debemus donec in aliquod verum, vt contemplabile; si Problema in verum aliquod, vt operabile incurramus; nam inde regredientes, quod verum assumpsimus in Theoremate ostendimus, & quod tanquam factum in Problemate supposuimus, veluti constructum demonstramus. Non absimilis igitur in his est, ac in alijs procedendi ratio.

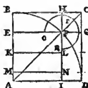
Sed cum in re quacunque resolutio instituenda est, & inde compositio deducenda magnoperè curandum, ne nos in resoluendo, componendoue propositiones adhibeamus, non conuertibiles, tanquam conuertibiles; quod passim vsu venire solet; in quo Tyrones frequenter decipiuntur, vtpotè minus assueti, non enim omnis propositio conuertitur: hoc igitur præ oculis habendum; quod hic animaduertisse iuuat. *Notanda quædam.*

Sed propositum illud sit. *Exemplum.*

THEOREMA.

Est quadratum ABCD, in quo diameter AC, arcus quadrantis AFC secans diametrum in F & per quadrantis punctum F, actæ sint EG, HI, parallelæ sibi respondentibus lateribus; nempè EG ipsi BC, & HI ipsi CD fient autem quadrata AEFI, & FHCG. Dico quadrata hæc esse inter se incommensurabilia.

Resolutio.



Secetur Ek, æqualis ipsi EB, item & KM eidem æqualis & agantur parallelæ KL, MN alterutri laterum EF, AI. Et quoniam quadratum AC, duplum est quadrati AF, ergo quadratum AF, æquabitur gnomoni OPR sed rectangulum EL, est æquale ipsi BF, quemadmodum KN, vnde EN æquale est duobus BF, FD. propterea MI æquabitur quadrato HG.

Quoniam igitur quadratum AEFI est incommensurabile quadrato FHCG, sed quadratum FHCG est æquale rectangulo MI, ergo quadratum AE FI erit incommensurabile rectangulo MI, ergo AE, erit incommensurabilis ipsi MA bases enim sunt vt rectangula eiusdem altitudinis ergo EM erit [a] incommensurabilis ipsi MA, ergo AE erit [b] incommensurabilis reliquæ EM; atque adeo eius dimidio Ek; seu BE, ergo tota AB hoc est illi æqualis AF erit [c] incommensurabilis ipsi AE. Quod ita se habet ex Vltima Decimi Elementorum. *a 17. decimi. b 17. decimi. c 17. decimi.*

Compositio.

Compositio.

α 17. Decimi. β 17. Decimi. γ 17. decimi.

QVoniam AF, hoc eſt illi æqualis AB eſt incommenſurabilis ipſi AE; ergo eadem AE erit α incommenſurabilis reliquæ BE, ſeu EK atque adeò eius duplæ EM ergo EM erit β incommenſurabilis ipſi MA, ergo AE, erit γ incommenſurabilis ipſi MA; ergo quadratum AF erit incommenſurabile rectangulo MI; rectangula enim eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes; ſed quadratum FC, eſt æquale rectangulo MI ergo quadratum AEHI erit incommenſurabile quadrato FHCG. Quod oportebat &c.

Aliter etiam hoc idem Theorema oſtendi poſſet; ſed breuitati ſtudentes cætera prætermittimus.

Non diſſimiliter in Problematum reſolutionibus procedendum; noſtra ſiquidem Methodo, quatenus Analyſis ad πρακτὸν tendit, ad Problemata quoque ſoluenda in huiuſmodi quantitatibus, non ſecus ac in re alia quacunque, conducit &c.

FINIS LIBRI PRIMI.





CAROLI RENALDINII

Serenissimi Magni Principis Etruriæ

PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI,

Et

In Patauino Lyceo Philosophi primæ Sedis.

DE RESOLVTIONE, ET COMPOSITIONE MATHEMATICA.

LIBER SECVNDVS.



PRÆFATIO.



T si Veteres magno studio, singularique diligentia Mathematicas Disciplinas prosequuti, magna cum laude resoluendi rationem excoluerint; vnde huiusmodi Disciplinarum cardines figisse videantur; Recentiores tamen non minori quidem industria, hoc idem argumentum tractantes, iisdem Disciplinis maximum attulerunt incrementum. Cùm autem superiori Libro antiquam resoluendi rationem explicauerimus, superest, vt hic illam, quam Recentiorum adinuenit solertia, breuiter enucleemus.

Hæc autem speciosâ vtitur Logisticâ, Numerosâ tamen non neglectâ, velut illâ, quæ, etiam præter multorum opinionem, ad Resolutionem Geometricam artificiosè conducit. Vtrâque nos vti consueuimus; vnde vigesimus quintus ferè agitur annus, post quam quàmplurima Diophanti Alexandrini Problemata Arithmeticè tractata in Geometriam transtulimus, quæ nimirùm vtrique Disciplinæ communia erant; vidimus tamen paucos ab hinc annos, id Parisijs à quodam insignis eruditionis Viro præstitum fuiße non sine laude. Ex ijs tamen, quibus

iamdudum satisfecimus, quædam in tertia parte huius Operis afferemus; vt cuique intelligere liceat, qua via nos incedentes, eadem, ac ille, Problemata tractauerimus. Recens hæc resoluendi Methodus, eo nomine saltem antiquæ præferenda videtur, quòd illa in Problematum resolutionibus, vt plurimùm præparationem adhibeat, inuestigatu quidem ijs, quos latet, perdifficilis. Hæc autem non ita, cùm magis sit obuium id, quod ad effectionem conducit.

Quoniam autem Resolutio omnis, hac nouâ Arte instituta, vel æquatione, vel analogismo vtitur, & aliquando elegantiùs præstat, æquatione ad proportionem reuocata, quod implicatiori modo æquationis vsu perficeret; propterea, & de æquationis transmutatione in proportionem, & de explicatione æquationum agendum foret, quia tamen de primo verba fecimus, Capite 14. pag. 121, vbi de Algebra speciosa disseruimus; propterea de eo tantùm pauca quædam afferemus, intenti prorsus ad secundum explicandum, in quo laboris plurimum requiritur.

Et quoniam ex æquationibus, quædam simplices sunt, quædam autem compositæ, siue affectæ: primum propterea tractandum de æquationibus puris, siue simplicibus; ideò sit.



De

De Explicandis Æquationibus Puris, siue simplicibus.
Caput I.

AD simplicem explicandam æquationem ferè nullum artificium requiritur, siquidem illicò radicis pretium se se offert. Vt si foret æquatio $b - d = 2a$, manifestum est subduplatis partibus æquationis illico Radicis pretium innotescere. Vt si proponatur. Exemplum I.

Datum latus ita diuidere, vt partes dato differant interuallo. Oportet autem interuallum datum minus esse dato latere diuidendo.

Datum sit latus diuidendum b in duas partes, quæ dato differant interuallo d: esto pars minor a, maior igitur erit $a + d$, itaque totum latus erit $2a + d$; sed idem supponitur b; ergo erit æquatio $b = 2a + d$, vtrinque ablato interuallo d, fiet $b - d = 2a$, seu quod idem est $2a = b - d$. Non dissimili modo procedendum erit in huiusmodi æquationibus in quarum explicatione ferè nullus est labor.

Quando autem æquatio resolubilis est in terminos proportionales, resolutio fiat, vt superius docuimus, vt si proponatur æquatio $r + s)\, a = s - r)\, b$: fiant extremi termini $r + s$, & a, medij verò $r - s$, & b, & innotescet a; datis enim tribus magnitudinibus nequit ignorari quarta. Eodem pacto procedendum erit in consimilibus æquationibus, quemadmodum etiam quando æquatio in tres terminos resolubilis est.

Aliquando ad Resolutionem Problematis, nec æqualitate, nec inquisitione longa quidem est opus, sed apparet statim ipsorum terminorum ratio quæsita, vel saltem opus est tantummodo argumentari atque ratiocinari, vt quæsita nimirum & ignota magnitudo à notis magnitudinibus distinguatur. Propositum igitur sit. Vt b ad d, ita a, ad $2a - 2g - b$, duplatis antecedentibus proportionales erunt $2b$; d; $2a$; $-2g - b$; & per conuersionem rationis erunt [a] proportionales $2b$; $2b - d$; $2a$; $2g + b$, & subduplatis antecedentibus vt b ad $2b - d$, ita a ad $2g + b$; & conuertendo [b] proportionales erunt $2b - d$; b; $2g + b$; a; atque demum permutando [c] proportionales erunt $2b - d$; $2g + b$; b; a.

a Coroll. 19. quinti.
b Coroll. 4. quinti.
c 16. quinti.

In hac autem Analysi nulla quidem occurrit æquatio; sed tantum proportione vtens Analysta deuenit in notitiam incognitæ siue quæsitæ magnitudinis. At verò si contingat fractionem æquari integræ magnitudini; resoluatur fractio in sua membra, dummodo tamen ea resolubilis sit, atque adeo æqualitas in proportionem transmutetur vt superius docuimus; quod si fractio non sit hunc in modum resolubilis procedendum est, vt superius explicuimus.

Æquationes autem affectæ, quemadmodum superius dicebamus in triplici discrimine sunt, alia quandoquidem est Cataphatica, alia Apophatica, alia demum Amphibola, nempè Affirmatiua, Negatiua, & Ambigua. Primùm autem se offert consideranda æquatio depressioris potestatis, in qua scilicet quadratum est Potestas. Hæc autem tripartito contingit. Prima est in qua quadratum afficitur adiunctione plani sub latere, & data coefficiente longitudine. Secunda, in qua quadratum afficitur multa plani sublatere, dataque coefficiente longitudine. Tertia, in qua planum sub latere dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati. Quod si fuerit æquatio solida simpla, ac pura. Vt $a^3 = b^2 d$. Intelligere oportet b, & d, extremos in serie quatuor continuè proportionalium, in qua quidem a: erit secunda. De inuentione autem duarum mediarum in serie quatuor continuè proportionalium; dicemus infra.

De explicandis æquationibus compositis, e primò de Quadraticis
Caput II.

Variæ ac diuersæ Methodi explicandi Æquationem in qua Quadratum afficitur affirmatè, seu in qua Quadratum afficitur adiunctione plani sublatere, & data coefficiente magnitudine.

Methodus Diophanti.

Datum homogeneum comparationis ducatur in comitem quadrati, productoque dimidij coefficientis quadratum addatur, & à radice quadrata aggregati dimidium coefficientis auferatur: residuum autem applicetur ad quadrati comitem; sic enim quæsita Radix emerget. Enarratio Methodi Diophanti.

Exemplo illustratur.

Proponatur $a^2d + bda = z^2d$. Ducatur z^2d homogeneum comparationis in d, comitem quadrati fitque z^2d^2: huic addatur $\frac{1}{4}b^2d^2$, quadratum scilicet dimidij coefficientis $\frac{1}{2}bd$, fitque $z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2$, huius autem latus quadratum erit ℞$Q(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2)$ ab hoc auferatur $\frac{1}{2}bd$ dimidium coefficientis, fitque residuum ℞$Q(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2) - \frac{1}{2}bd$; omnibus autem applicatis ad d comitem quadrati, fit ℞$Q\frac{(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2)}{d} - \frac{\frac{1}{2}bd}{d}$; hic autem est Radicis valor.

Methodus autem ista facile ad sequentem reducetur. Hæc tamen Diophantæa longa quidem est, & Geometricis compositionibus inutilis. Sequens tamen Antiquorum communis perbreuis, & commodissima est, & maximè quidem ad Geometricas resolutiones, atque compositiones perficiendas.

Methodus Communis Antiquorum.

Enarratio Methodi communis Antiquorum.

Lateri, quadratum cuius æquale est quadrato dimidij coefficientis datæ, datoque comparationis homogeneo, auferatur dimidia coefficiens, residuum enim quæsitam Radicem repræsentabit.

EXEMPLVM.

Exemplo illustratur.

$a^2 + ba = z^2$

$\frac{1}{4}b^2$ *Quadratum dimidiæ coefficientis* } Adde

z^2 *Comparationis homogeneum* }

$\frac{1}{4}b^2 + z$ *Aggregatum*

℞$Q(\frac{1}{4}b + z^2)$ *Aggregati latus* } *Subtrahe.*

$\frac{1}{2}b$ *Dimidium coefficientis* }

℞$Q(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$ *Residuum, & latus quæsitum.*

Superior autem Methodus Geometricè paulo infra demonstrabatur; interim oportet illud idē, quod hactenus conclusimus sequenti paradigmate cōprobare; si namq; reperierimus, quod ℞$Q(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$. ducto in se, productum autem $\frac{1}{2}b^2 + z^2 -$ ℞$(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2)$ adscito ℞$(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) - \frac{1}{2}b^2$, facto scilicet ex b in ℞$(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$ faciat z^2 comparationis homogeneum; rectè dicemus, ℞$(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$. radicis quæsitæ pretiū esse. Pragmatia vero se habet, vt sequitur.

℞$(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b = a$

℞$(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$

$-$ ℞$(\frac{1}{16}b^4 + \frac{1}{4}b^2z^2) + \frac{1}{4}b^2$

$\frac{1}{4}b^2 + z^2 -$ ℞$(\frac{1}{16}b^4 + \frac{1}{4}b^2z^2)$

$\frac{1}{2}b^2 + z^2 -$ ℞$(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) = a^2$

℞$(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$

b

Addendum ℞$(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) - \frac{1}{2}b^2 = ba$

$\frac{1}{2}b^2 + z^2 -$ ℞$(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2) = a^2$

z^2 Productum, quod est comparationis homogeneum.

DEMONSTRATIO.

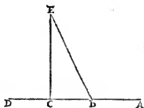
Data sit coefficiens longitudo recta D B, quæ diuidatur bifariam in C, & erigatur perpendicularis C E æqualis lateri illius quadrati, quod est æquale comparationis homogeneo; ducatur B E, cui fiat æqualis C A. Quoniam quadratum ex B E, æquale est [a] quadratis B C, C E; & est quadratum B E, quadrato C A æquale; ergo quadratum C A æquale erit quadratis C E, C B; at verò quadrato C A est [b] æquale rectangulum D A B, vnà cum quadrato C B; ergo rectangulum D A B, vnà cum ipso quadrato C B, erit æquale quadratis rectarum C E, C B; commune auferatur quadratum C B, remanebit rectangulum D A B æquale quadrato C E; sed rectangulum D A B æquale est [c] quadrato B A, vnà cum rectangulo D B A; ergo quadratum B A, vnà cum rectangulo D B A, erit æquale quadrato rectæ CE, nempe comparationis homogeneo. Cum autem sit æquatio $a^2 + ba = z^2$, & B A sit latus illud, cuius quadratum vnà cum rectangulo sub se comprehenso & D B data coefficiente æquale est quadrato ex C E comparationis homogeneo; erit propterea B A Radix quæsita, & D B A planum sub latere, & data coefficiente longitudine. Si quadrato dimidiæ coefficientis, nempè C B, addatur comparationis homogeneum, nimirum quadratum C E, fit notum quadratum ex B E, hoc est C A; si autem ex C A auferatur C B, remanet nota B A Radix quæsita; rectè ergo Regula iubet, vt quadrato dimidiæ coefficientis &c. Quod erat demonstrandum.

Demonstrati Geometrica huius Methodi.

a 47. primi.

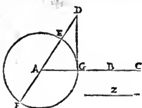
b 6. secundi.

c 3. tertij.



Aliter. Data sit coefficiens lõgitudo A B, & B C sit quæsitum latus, quadratum autem Z sit comparationis homogeneum, ex A B, & BC fiat tota recta A C, & recta A B bifariam diuidatur in G; erigatur perpendicularis G D æqualis ipsi Z: connectatur D A, à qua abscindatur A E æqualis ipsi A G. Dico E D esse latus quæsitum, nempè æquale lateri BC, & optimam esse Regulam &c. Describatur circulus centro A, interuallo A G, vel A E; & D A producatur ad F; circulus G E F tanget rectam G D; quia verò quadratum ex B C, vnà cum rectangulo A B C æquale ponitur quadrato Z, & idem quadratum B C vnà cum illo rectangulo A B C æquale est [a] rectangulo AC B; ergo A CB rectangulum æquale erit quadrato Z, hoc est quadrato G D; sed rectangulum EDF est [b] æquale eidem quadrato G D; ergo rectangulum A C B erit æquale rectangulo E D F: sed F E, & A B sunt æquales, quod A G, A E sint æquales, atque adeo & duplæ A B, F E erunt æquales; quare si ab æqualibus F D, A C (sunt autem F D, A C æquales; cùm enim rectangulum F D E sit æquale rectangulo A C B, erit vt F D ad A C, ita B C ad E D, permutando [c] verò vt F D ad E D, ita A C ad B C, & per conuersionem rationis [d], vt D F ad FE, ita C A ad A B, rursus permutando F D ad A C, vt F E ad A B, sed F E est æqualis A B; ergo F D erit æqualis A C, quemadmodum supra dicebamus) auferantur F E, A B remanebunt æquales E D, B C; ergo E D erit Radix quæsita, & rectangulum F E D, erit idem quod A B C planum sub latere, & data coefficiente longitudine; sed quadrato A G dimidiæ coefficientis si addatur quadratum G D comparationis homogeneum, fit notum quadratum cuius latus est A D; ab hoc autem si auferatur A E dimidium coefficientis, habetur nota E D Radix quæsita; ergo rectè Regula iubet &c.

Idem aliter demonstratur.



a 3 secundi.

b 36. tertij.

c 16. quinti.

d corol. 19. quinti.

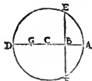
Me-

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $a^2 + ba = z^2$. Intelligatur z media inter extremas: b verò differentia earundem, ex media verò, & differentia extremarum, quærantur extrema; minor namque erit radix, de qua quæritur.

DEMONSTRATIO.

Data sit coefficiens longitudo G B, & radix quæsita B A, producatur A G ad D, vt D G, & B A sint æquales, & descripto circulo, cuius diameter sit D A, agatur perpendicularis B E, seu F E.



Quoniam B A est radix quæsita, & G B data coefficiens longitudo, erit G B A planum sub latere, & data coefficiente, quia verò est æquatio $a^2 + ba = z^2$, & D G, hoc est radix B A est quæsita, erit quadratum D G plus rectangulo D G B, seu G B A, hoc est rectangulum B D G, seu D B A, æquale comparationis homogeneo; at verò rectangulum D B A, est æquale quadrato E B; ergo E B erit latus illud, cuius quadratum æquatur comparationis homogeneo, sed D B, B E, B A, sunt continuè proportionales, quarum est minor B A, media B E, & maior D B, differens à minori D G, hoc est B A per G B; ergo in æquatione, quando quadratum afficitur affirmatè &c. Radix est minor extrema in serie trium proportionalium, & latus, cuius quadratum est æquale comparationis homogeneo, est media inter extremas, & data coefficiens, est differentia extremarum. Quod erat ostendendum.

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem, in qua Quadratum afficitur negatè, seu in qua Quadratum afficitur, multa plani sub latere, dataque coefficiente magnitudine.

Methodus Diophanti.

Datum comparationis homogeneum ducatur in comitem quadrati, & producto, dimidij coefficientis quadratum addatur, & aggregati quadrata radici adijciatur dimidium coefficientis, compositum autem ad quadrati comitem applicetur, & proueniet quæsita radix.

Proposita sit æquatio $a^2d - bda = z^2d$. Ducatur z^2d, comparationis homogeneum in d comitem quadrati; & fiet z^2d^2, & huic addatur $\frac{1}{4}b^2d^2$ quadratum dimidiæ coefficientis, & fiet $z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2$, cuius latus quadratum est $R\,Q(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2)$ huic addatur dimidium coefficientis, nimirum $\frac{1}{2}bd$; & fiet summa $R\,Q(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2) + \frac{1}{2}bd$, & hæc applicetur ad d comitem quadrati, & fiet radix quæsita, $\frac{R\,Q(z^2d^2 + \frac{1}{4}b^2d^2)}{d} + \frac{\frac{1}{2}bd}{d}$.

Methodus communis Antiquorum.

Lateri, cuius quadratum æquale est quadrato dimidiæ coefficientis datæ, datoque comparationis homogeneo, addatur dimidia coefficiens; compositum ex his, latus, seu radicem quæsitam repræsentabit.

EXEMPLVM.

$a^2 - ba = z^2$

$\frac{1}{4}b^2$ *Quadratum dimidiæ coefficientis* } Adde
z^2 *Comparationis homogeneum*

$\frac{1}{4}b^2 + z^2$ *Aggregatum*
$R\,Q(\frac{1}{4}b^2 + z^2)$ *Aggregati latus* } Adde
$\frac{1}{2}b$ *Dimidia coefficiens*

$R\,Q(\frac{1}{4}b^2 + z^2) + \frac{1}{2}b$ *Summa, & radix quæsita.*

Si

Si deprehenderimus $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + z^2)} + \frac{1}{2}b$. ductum in se facere $\frac{1}{2}b^2 + z^2 + \sqrt{(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2)}$ ex quo si detrahatur $\sqrt{(\frac{1}{4}b^4 + b^2z^2)} - \frac{1}{2}b^2$. factum ex $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + z^2)} + \frac{1}{2}b$ in b. fiat z^2 cōparationis homogeneum; rectè dicemus, $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + z^2)} + \frac{1}{2}b$. esse radicis quæsitæ pretiū. & supra conclusum fuit, sequentem in modum demonstratum fuisse.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2)} + \tfrac{1}{2}b = a$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2)} + \tfrac{1}{2}b$$

$$+ \sqrt{(\tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{4}b^2z^2)} + \tfrac{1}{4}b^2$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 + z^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{4}b^2z^2)}$$

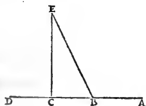
$$\tfrac{1}{2}b^2 + z^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^4 + b^2z^2)} = a^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + z^2)} + \tfrac{1}{2}b$$
$$b$$

$$\text{Auferendum } \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^4 + b^2z^2)} + \tfrac{1}{2}b^2 = ba$$
$$\tfrac{1}{2}b^2 + z^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^4 + b^2z^2)} = a^2$$

z^2 Productum, quod est comparationis homogeneum.

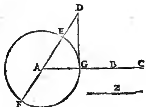
DEMONSTRATIO.

Data sit cōefficiens longitudo recta D B, quæ bifariam intelligatur secta in C, & sit C E latus quadrati illius, quod est æquale comparationis homogeneo, & rectæ B E ducta intelligatur æqualis C A. Quoniam quadratum B E, & consequenter quadratum rectę C A, illi æqualis, est [a] æquale quadratis rectarum C E, C B, & quadrato C A est æquale [b] quadratum C B, vna cum rectangulo D A B; erit ob id quadratum C B, vnà cum rectangulo D A B æquale quadratis rectarum CE, CB; auferatur commune quadratum C B, remanebit rectangulum D A B æquale quadrato C E, hoc est comparationis homogeneo. Cum autem sit æquatio $a^2 - ba = z^2$, & D A sit latus, cuius quadratum minus rectangulo sub se comprehenso,& data coefficiente longitudine D B, æquale est rectangulo D A B (est [c] enim quadratum D A æquale duobus rectangulis simul sumptis D A B, A D B) hoc est quadrato C E comparationis homogeneo; erit ob id D A, radix quæsita, & A D B planum sublatere, & data coefficiente longitudine; at verò si ad quadratum ex C B dimidia coefficiente, addatur quadratum C E, comparationis homogeneum, fiet [d] nota recta BE, hoc est CA radix quæsita. Rectè ergo Regula iubet, vt quadrato dimidiæ coefficientis, &c.



a 47. primi.
b 6. secundi.
c 2. secundi.
d 47. primi.

Aliter. Quadratum Z sit cōparationis homogeneum, & A C latus quæsitum; cum autem sit æquatio $a^2 - ba = z^2$, erit data coefficiens longitudo minor latere, sitque A B data coefficiens longitudo, quæ secetur bifariam in G, & ex G perpendicularis erigatur G D æqualis ipsi Z, connectaturque D A, quæ producatur vsque ad F, ita vt F A, A G sint æquales. Dico FD æqualem esse ipsi A C, lateri quæsito, & rectè Regulam iubere vt &c. Centro A, interuallo A G, vel A F describatur circulus FGE, qui G D perpendicularem tanget [e] in G; Quoniā autem quadratū AC, minus rectangulo CAB æquale po-



e coroll. 16. tertij.

nitur

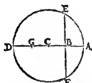
nitur quadrato Z (est enim $a^2 - ba = z^2$) & quadratum AC, minus CAB rectangulo æquale est rectangulo ACB; erit rectangulum ACB æquale quadrato Z, hoc est quadrato GD; at verò rectangulum FDE est æquale quadrato GD; ergo rectangulum FDE æquale erit rectangulo ACB; sed FE, AB sunt æquales, ergo eodem modo, quo supra; tota FD æqualis erit toti AC, atque adeò radix quæsita, & DFE, erit idem, quod CAB planum sub latere, & data coefficiente longitudine; at vero si ad quadratum ex AG dimidia coefficiente addatur AF dimidio coefficiens: fit nota FD radix quæsita. Rectè ergo regula iubet &c. Quod erat ostendendum.

fi. secundi.
g 37. tertij.

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $a^2 - ba = z^2$. Intelligatur z media inter extremas: & b differentia earundem; ex media autem, & differentia extremarum, quærantur extrema; ipsarum enim maior erit a, seu radix, de qua quæritur.

DEMONSTRATIO.



SIt BD radix quæsita, & GB data coefficiens; ponaturque BA æqualis ipsi DG, & constituatur figura, vt vides. Quoniam DB est radix quæsita, & GB data coefficiens, erit DBG planum sub latere, & data coefficiente longitudine; & quia est $a^2 - ba = z^2$, erit propterea quadratum DB, minus plano DBG, æquale comparationis homogeneo; sed quadratum DB, minus plano DBG, est æquale rectangulo BDG; ergo & BDG erit æquale comparationis homogeneo; at verò rectangulum BDG est æquale rectangulo DBA; siquidem BA, DG sunt æquales; ergo rectangulum BDG, æquale erit quadrato BE, cui nimirum est [b] æquale rectangulum DBA; ergo BE erit latus, cuius quadratum est æquale comparationis homogeneo. At verò DB, BE, BA, sunt continuè proportionales, quarum maior DB, media BE, & minor BA differens à maiori DB, per GB coefficientem; ergo in æquatione, in qua quadratum afficitur negatiuè, radix quæsita est maior, nempè DB in serie trium proportionalium. Latus verò, cuius quadratum est æquale comparationis homogeneo, & media in eadem serie, & maior differt à minori extrema, nimirum DB, à DG, hoc est BA interuallo æquali datæ coefficienti, nempè GB. Quod oportebat ostendere.

Variæ, ac diuersæ Methodi explicandi æquationem, in qua Quadratum negatur de afficiente homogeneo, seu in qua planum sub latere, & data coefficiente longitudine afficitur multa Quadrati.

Methodus Diophanti.

Methodi Diophanti. Enarratio.

D*Atum comparationis homogeneum ducatur in quadrati comitem, & productum à quadrato coefficientis dimidij auferatur; residui verò quadrata radix addatur, vel auferatur dimidio coefficientis, summa, vel residuum ad quadrati comitem applicetur; nam ità proueniet quæsitum latus.*

Exemplo illustratur.

Proponatur æquatio $bda - a^2 d = z^2 d$. Datum comparationis homogeneum, puta $z^2 d$, ducatur in comitem quadrati, nimirū in d, & fiet $z^2 d^2$; & hoc auferatur ex $\frac{1}{4} b^2 d^2$, quadrato scilicet dimidiæ coefficientis, & remanebit $\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2$, cuius radix quadrata est $R\!\!\!\!\;\;Q(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)$ hæc autem si addatur ad $\frac{1}{2} bd$, dimidium coefficientis, fit $\frac{1}{2} bd + R\!\!\!\!\;\;Q(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)$ & si subtrahatur fiet $\frac{1}{2} bd - R\!\!\!\!\;\;Q(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)$ aggregatum, vel residuum applicetur ad d, comitem quadrati, & fiet $\frac{\frac{1}{2} bd + R\!\!\!\!\;\;Q(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)}{d}$ rursus fiet $\frac{\frac{1}{2} bd - R\!\!\!\!\;\;Q(\frac{1}{4} b^2 d^2 - z^2 d^2)}{d}$

Æquatio enim hæc duplicem habet radicem, vt alibi diximus.

Me-

Methodus Communis Antiquorum.

Latus, cuius quadratum aequale est excessui, quo quadratum dimidiae coefficientis datâ praestat dato comparationis homogeneo; ablatum vel additum dimidiae coefficienti, residuum, vel aggregatum, quaesitum latus exhibebit. Enarratio Methodi communis Antiquorum.

EXEMPLVM.

$ba - a^2 = z^2$

$\frac{1}{4}b^2$ *Quadratum dimidiae coefficientis*
z^2 *Comparationis homogeneum* } *Subtrahe*

$\frac{1}{4}b^2 - z^2$ *Differentia, siue residuum*

$\mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Residui latus*
$\frac{1}{2}b$ *Dimidiū coefficientis* } Adde

$\frac{1}{2}b + \mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Aggregatum & latus maius*

$\frac{1}{2}b$ *Dimidia coefficiens*
$\mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Residui latus* } *Subtrahe*

$\frac{1}{2}b - \mathrm{R}Q(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$ *Residuum, & latus minus.*

Nec dissimiliter superiorem pragmatiam Analytisco more comprobabimus.

$\frac{1}{2}b + \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^2 - z^2) = a$
$\frac{1}{2}b + \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^2 - z^2)$

$\mathrm{R}(\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}b^2z^2) + \frac{1}{4}b^2 - z^2$
$\frac{1}{4}b^2 + \mathrm{R}(\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{4}b^2z^2)$

$\frac{1}{2}b - z^2 + \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = a^2$
$\frac{1}{2}b + \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^2 - z^2) = b$
b

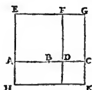
$\frac{1}{2}b + \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = ba$
Subtrahendum $\frac{1}{2}b^2 - z^2 + \mathrm{R}(\frac{1}{4}b^4 - b^2z^2) = a^2$

z^2 Productum, quod est comparationis homogeneum.

Sic suo modo pro Radice minori.

DEMONSTRATIO.

Data sit coefficiens longitudo AC, quae bifariam secetur in B, sitque P latus, cuius quadratum aequale sit comparationis homogeneo; & primò sit recta P, vt in prima figura minor dimidia coefficiente AB, vel BC; secetur AC in D, sic vt inter segmenta AD, DC, sit P media proportionalis; quamobrem rectangulum ADC erit aequale quadrato P, atque adeò comparationis





homogeneo. Dico tam A D, quam D C, fore latera, & rectè Regulam iubere &c. super A D, D C describantur quadrata A F, D K, & perficiatur figura vt vides. Quoniam A D, D F sunt æquales & rectangulum ADC est æquale quadrato P, hoc est comparationis homogeneo; tam H D rectangulum, quàm D G erit comparationis homogeneo æquale. Et quoniam A C est data coefficiens, & rectangulum C A D, minus quadrato A D est æquale rectangulo A D C, comparationis homogeneo; & est æquatio $ba - a^2 = z^2$; erit proinde recta A D radix quæsita, & C A D planum sub latere, & data coefficiente; hoc idem ostendetur de D C. At verò quia rectangulum A D C vnà cum quadrato B D æquale est quadrato rectæ A B dimidiæ coefficientis; si à quadrato eiusdem A B dimidij coefficientis auferatur rectangulum A D C, nimirum comparationis homogeneum, remanebit quadratum, cuius latus est B D; si hoc addatur dimidio coefficientis A B fit notum latus A D, nimirum latus maius; & si idem latus B D auferatur à dimidia B C remanebit notum latus B C, nempè latus minus; rectè ergo Regula iubet &c.

Quod autem idem ostendi possit de D C patet. Quoniam enim A C est coefficiens, & rectangulum A C D, minus quadrato D C est æquale rectangulo A D C comparationis homogeneo; & est æquatio $ba - a^2 = z^2$. Erit D C latus quæsitum, & A C D planum sub latere, & data coefficiente longitudine.

Sit recta P æqualis dimidiæ coefficienti A B, vel B C, vt in secunda figura. Dico eodem pacto Regulam rectè iubere &c. ex A B fiat quadratum A E, & compleatur rectangulum A F. Quoniam igitur AB, BC sunt segmenta æqualia, erit tam AE, quàm BF quadratum; & quia tam AB, quàm BC ponitur æqualis ipsi P; erit proinde quadratum BF, vel A E (ipsorum alterutrum accipiatur nihil refert) æquale comparationis homogeneo; & quia AC est data coefficiens, & rectangulum CAB, minus quadrato AB æquatur quadrato BC comparationis homogeneo, & est æquatio $ba - a^2 = z^2$, erit proinde AB radix quæsita, & CAB, hoc est AF planum sub latere, & data coefficiente. At verò si à quadrato ex AB dimidia coefficiente auferatur BF comparationis homogeneum, nihil remanebit; si verò nihil addatur, vel nihil subtrahatur dimidiæ coefficienti AB, remanet ipsa coefficiens A B dimidia, & simul radix quæsita; rectè itaque Regula iubet &c.

Alia Demonstratio 4. Aliter. Hoc idem ostendemus hunc in modum. Data sit coefficiens DA; sitque diuisa bifariam in B, & ex hoc puncto tanquam ex centro describatur circulus D E A, datum sit latus D F, quod primo sit minus dimidia coefficiente, cuius quadratum sit æquale comparationis homogeneo, & ducatur F E parallela ipsi DA, adeo vt secet peripheriam in E puncto, a quo cadat perpendicularis EC. Quoniam DA est data coefficiens, & rectangulo D A C æquale est quadratum C A, vnà cum rectangula D C A, seu rectangulum D A C, minus quadrato C A est æquale rectangulo D C A comparationis homogeneo, cùm hoc sit æquale quadrato CE; æquatio autem est $ba - a^2 = z^2$, ob id CA erit radix quæsita, & DAC planum sub latere, dataque coefficiente longitudine; cùm autem DCA rectangulum vna cum quadrato CB sit æquale quadrato BA, vel DB, fit, vt si à quadrato DB, vel ex BA dimidia coefficiente, auferatur rectangulum D CA, nimirum comparationis homogeneum remaneat notum quadratum, cuius latus est C B; hoc autem si addatur ipsi BA dimidio coefficientis, fit nota CA radix quæsita, & si idem latus CB auferatur à D B dimidia coefficiente remanebit D C segmentum, quod etiam esse quæsitam radicem, nempè minorem, eodem pacto facile demonstrabimus.

At verò si latus, cuius quadratum æquale est comparationis homogeneo, fuerit æquale dimidio coefficientis; non enim potest esse maius, facile omnia demonstrari poterunt.

Sit D latus, cuius quadratum est æquale comparationis homogeneo, & AC data coefficiens secta bifariam in B, vt D sit æqualis vel A B, vel B C; cùm itaque rectangulum A B C sit æquale quadrato D, erit æquale comparationis homogeneo; sed quia rectangulum sub A C data coefficiente, & BC, vel AB, minus quadrato AB, vel BC, est æquale rectangulo ABC comparationis homogeneo, & est æquatio $ba - a^2 = z^2$; proinde BC, vel AB erit radix quæsita. At verò si à quadrato ex AB, vel B C dimidia coefficiente auferatur rectangulum ABC, hoc est quadratum A B, vel BC comparationis

ho-

homogeneum, remanebit nihil, quo addito ad dimidium coefficientis, habebitur idem dimidium, vt patet.

Quod autem latus cuius quadratum, &c. non possit esse maius dimidio coefficientis patet, ex eo quia non potest fieri subtractio ipsius comparationis homogenei, atque adeo æquatio esset falsa.

Corollarium.

EX dictis collige quando latus comparationis homogenei fuerit minus dimidio coefficientis, tunc duplicem fore radicem; cum autem est æquale, vnicam fore radicem nimirum ipsum dimidium.

Aliter. Quadratum Z, sit comparationis homogeneum, & AE data coefficiens longitudo, quæ secetur bifariam in C, & Z erit non maior dimidia A C, vel C E, vt supra dicebamus. In AC describatur semicirculus A F C, & in eo accõmodetur A F, quæ sit æqualis ipsi Z, agaturque F C; erit [a] autem angulus AFC rectus; ergo quadratum AC erit [b] æquale quadratis laterum AF, FC; quare quadratum CF erit interuallum, seu excessus, quo quadratum ex AC dimidia coefficiente, superat quadratum AF comparationis homogeneum; modò centro C, interuallo CF, describatur periphæria B F D secans A E in B, & D. Dico minus latus ex quæsitis esse A B, maius autem AD, & rectè regulam iubere &c. a 31. tertij. b 47. primi.

Quoniam igitur AF, tangit circulum BFD in D, siquidem angulus [c] A F C, est rectus; quamobrem rectangulũ DAB, hoc est EBA, cui est æquale rectãgulum EAB, minus quadrato A B, æquabitur [d] quadrato AF; proinde rectangulũ EAB, minus quadrato AB, erit æquale quadrato AF, seu rectæ Z comparationis homogeneo; Cum autem sit æquatio $b\,a - a^2 = z^2$, & AE sit data coefficiens longitudo, erit ob id quæsitum latus AB, & EAB erit planum sub latere, dataque coefficiente; at verò si quadrato rectæ C A dimidio coefficientis auferatur quadratum AF nempè comparationis homogeneum, fiet notum quadratum cuius latus est CF, quæ si auferatur ab AC, nota remanebit AB radix quæsita. c coroll. 16. tertij. d 36. tertij.

Z

A B C D E F

Secundò quoniam rectangulum BAD est æquale quadrato AF, hoc est rectæ Z comparationis homogeneo; idem verò rectangulum BAD, hoc est EDA æquale est rectangulo E AD, minus quadrato AD erit æquale quadrato rectæ Z comparationis homogeneo. Sed æquatio est $b\,a - a^2 = z^2$, & AE est data coefficiens; erit AD radix quæsita, & EAD planum sub latere, & data coefficiente; Si autem à quadrato rectæ A C dimidiæ coefficientis auferatur quadratum AF comparationis homogeneum, remanebit quadratum, cuius latus est CF. quòd si addatur ad A C dimidium coefficientem innotescet A D maior radix quæsita; rectè ergo Regula iubet &c.

Methodus peculiaris Vietæ.

Proponatur æquatio $b\,a - a^2 = z^2$. Intelligatur z media inter extremas, & b aggregatum earundem; & ex media, atque aggregato extremarum quærantur extrema, nam alterutra erit a, de qua quæritur. Enarratio peculiaris Methodi Vietæ.

DEMONSTRATIO.

DAta sit coefficiens longitudo DA, & sit DC radix quæsita; sit verò descriptus circulus DEA, & à puncto C erigatur CE perpendicularis. Quoniam autem A D est data coefficiens, & DC radix quæsita, erit A D C planum sub latere, & data coefficiente; quia autem D C est radix, & est æquatio $b\,a - a^2 = z^2$; erit proindè ADC minus quadrato D C æquale comparationis homogeneo; sed idem est A D C, minus quadrato D C, ac est rectangulum D C A; ergo rectangulum DC Eiusdem Methodi demonstratio.

F E D C B A

A erit æquale comparationis homogeneo; sed rectangulum D C A est æquale quadrato C E; ergo quadratum C E, erit comparationis homogeneum. At verò DC, CE, CA, sunt continuè proportionales, extremarum aggregatum est data coefficiens longitudo, & minor extrema DC, radix nimirum quæsita; rectè ergo Regula iubet &c.

Non dissimili modo nos eandem operationem ostendemus, radice quidem supposita altera extrema, puta C A.

De Explicandis Æquationibus Solidis compositis, & primo de Cubicis. Caput III.

Methodi ad explicandam æquationem in qua Cubus afficitur adiunctione solidi sub latere, datoque coefficiente plano, vt $a^3 + b^2 a = z^3$ seu z solido.

EGimus hactenus de æquationibus affectis, & quidem quadraticis explicandis, quæ nullam Analystæ ferè difficultatem afferunt, ac nullam ingerunt curam. Nunc proximum est vt ad illas gradum faciamus, quæ altioris sunt ordinis, proximè succedentes quadraticis, quarum contemplatio Veterum, vt haud parum vexauit ingenia, ita earum explicatio non mediocriter Italiam illustrauit, præclarum siquidem hoc inuentum Italis acceptum referri debet. Nam Scipio Ferreus Bononiensis, & Nicolaus Tartalea Brixiensis, arduum hoc opus aggressi, singulari cum laude perfecerunt, ita vt difficillimarum æquationum, de quibus loquimur explicationes tradendo, sibi gloriam immortalem peperisse videantur. Dissimulandum tamen non est, quòd hæc ipsi magis Arithmeticè quam Geometricè præstiterint, fortassis id Posteritati relinquentes ne nobis locus deesset ad suppeditandam materiam pro excelsa Mercurij Statua fabricanda.

Italorum laus.

Verùm cùm agendum sit primùm de æquationibus Cubicis, in quibus affectio est sub latere, iuuabit hic in memoriam redigere, quæ scripsimus in primo Tomo, breuiter tamen, quatenus facit ad institutum. Erat autem Canon huiusmodi.

Cubus tertiæ partis numeri radicum addatur quadrato dimidij numeri absoluti; aggregati autem sumatur latus, cui additum, vel subtractum dimidium numeri absoluti, gignit Binomium, & Apotomen. Si itaque latus cubicum ipsius Apotomes subtrahatur à latere cubico binomij, residuum erit quæsitæ radicis pretium.

Erat autem æquatio huiusmodi 1 c + 72 R = 1720. cuius æquationis adinuenimus radicem esse 10: nam quadratum dimidij numeri absoluti erat 739600, cubus verò tertiæ partis numeri radicum 13824. Aggregatum ex his 753424, cuius radix quadrata est 868, cui addito 860, fit 1728; cuius latus cubicum est 12; at radix quadrata primi aggregati erat 868, dimidium numeri absoluti est 860, horum differentia est 8, cuius radix cubica est 2; radix autem cubica primi aggregati erat 12; differentia autem inter 2, & 12, est 10.

Hæc superior Methodus non inseruit Geometriæ.

Hæc autem Methodus Geometriæ non inseruit, sicut nec etiam altera, cuius Canon erat.

Sumatur quarta pars quadrati ex numero absoluto, & huic addatur vigesima septima pars cubi ex numero radicum, huius autem aggregati lateri quadrato addatur dimidium numeri radicum, & ab eodem subducatur, ex aggregati verò latere cubico subtrahatur latus cubicum residui; horum namque differentia erit radix quæsita.

Et quidem in eodem exemplo persistendo. Quarta pars quadrati numeri absoluti est 739600, cui si addatur 13824, vigesima septima pars cubi, e numero radicũ, fiet 753424. huius latus quadratum est 868, cui si addatur &c. Reliqua vide ibi. Nec etiam hæc vti dicebam idonea est ad Geometricas effectiones, propterea quod fit ascensus ad imaginarias quantitates, à quibus in Geometricis cauendum. Vnde reductio ad quadraticam æquationem per duplicatam hypostasin, eodem laborat vitio.

Superiori numerosæ æquationi speciebus exhibita respondet æquatio $a^3 + 3$ b plano a = 2 z solido, de qua in Algebra speciosa pag. 214, disseruimus vbi reductionem illam tractauimus, quam hic breuiter subijciam numeris enucleatam, a quo ibi breuitati studentes abstinuimus. Si $e^2 + a$ e æquetur b plano; igitur b pl. ex huiusmodi constitutione intelligendum est rectangulum sub duobus lateribus, quorum minus est e, maius autem differt per a.

Quoniam vero $e^2 + a$ e, supponitur æquari b pl. propterea a e æquabitur b pl. $- e^2$, atque

que adeo $\frac{b\,pl. - e^2}{e}$ æquabitur a; propterea $\frac{b\,pl.pl.pl. - 3e^2\,b\,pl.pl. + 3e^4\,b\,pl. - e^6}{e^3} + \frac{3\,b\,pl.pl. - 3\,b\,pl.\,e^2}{e}$, æquabitur 2 z sol. Omnibus verò ductis per e^3, & secundum Artem dispositis e cubi quadratum + 2 z sol. e^3 æquabitur b planicubo. Sic autem hæc demonstrabimus. Supponamus $a^3 + 3\,b\,pl.\,a$, æquari 2 z sol., & $e^2 + a\,e$, æquare b pl. Si autem iniunctum ostendere $e^6 + 2\,z\,sol.\,e^3$ æquari b $pl.^3$. Quoniam igitur $e^2 + a\,e$ æquatur b pl., propterea a e æquabitur b pl $- e^2$; atque adeo a æquabitur $\frac{b\,pl. - e^2}{e}$; ergo & eorum cubi æquales erunt; quare a^3 æquabitur $\frac{b\,pl.^3 - 3\,b\,pl.^2\,e^2 + 3\,b\,pl.\,e^4 - e^6}{e^3}$; ac proinde $a^3 + 3\,b$ plan. a, æquabitur $\frac{b\,pl.^3 - 3\,b\,pl.^2\,e^2 + 3\,b\,pl.\,e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\,b\,plan.^2 - 3\,b\,plan.\,e^2}{e}$. Nam $\frac{3\,b\,pl.^2 - 3\,b\,pl.\,e^2}{e}$ æquiualet 3 b plan. a, æqualia verò si æqualibus addantur, orta sunt æqualia. Atque adeo 2 z sol. æquabitur $\frac{b\,pl.^3 - 3\,b\,pl.^2\,e^2 + 3\,b\,pl.\,e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\,b\,plan.^2 - 3\,b\,pl.\,e^2}{e}$. Nam $a^3 + 3\,b\,pl.\,a$ æquabatur 2 z sol. Omnibus ductis in e^3, & 2 z sol. e^3 æquabitur b $pl.^3 - 3\,b\,pl.^2\,e^2 + 3\,b\,pl.\,e^4 - e^6 + 3\,b\,pl.^2\,e^2 - 3\,b\,pl.\,e^4$; ac proinde $e^6 +$ 2 z sol. e^3 æquabitur b $pl.^3$; eadem enim homogenea affecta signis + & −, se mutuo interimunt.

Vnde consectarium. Si $a^3 + 3\,b\,pl.\,a$ æquetur 2 z sol., & $\sqrt{b\,pl.pl.pl. + z\,sol.sol.} - z\,sol.$ æquetur d^3; ergo $\frac{b\,pl. - d^2}{d}$ fit a, de qua quæritur.

Vt autem numeris hæc explicemus, superiorem æquationem sumamus, nempe 1 c + 72 R = 1720, cui respondeat illa $a^3 + 3\,b\,pl.\,a = 2\,z\,sol.$ Supponamus $e^2 + a\,e$ æquari b pl., & deueniemus vt supra ad æquationem illam e cubi quadratum + 2 z sol. e^3 = b planicubo, nempè 1 Q + 1720 R = 13824, cuius radix est 8 Verùm quia 1 Q idem est quod e cubi quadratum radix est solida; est enim quadratum cubi, atque adeo ad habendam e oportet extrahere radicem cubicam ex octo, eaque est 2. Cùm igitur 2q + a e æquaretur b pl. propterea $\frac{b\,pl. - e^2}{e}$ æquatur a; igitur si ex b pl. hoc est ex 24 auferatur 4 quadratum ex e, remanebit 20, quo diuiso per e, prosilit 10, pro valore ipsius a, quæ erat radix speciosæ æquationis $a^3 + 3\,b\,pl.\,a = 2\,z\,sol.$; ac ob id numerosæ æquationis 1 c + 72 R = 1720.

Sed hæc Methodus non conducit ad opus Geometricum, vt vides, sed Arithmeticæ est addicta.

Plerumque æquatio cubica de qua loquimur reducitur ad quadraticam; vnde ipsa deducta est, tuncque subit eandem explicationem cum ipsa quadratica: vnde maiori non est opus artificio ad eius radicis valorem exprimendum, sed tunc affectio est sub quadrato, atque contingit, quod diximus, quando coefficiens longitudo duobus nominibus constat, quorum vnum ductum in quadratum alterius, comparationis homogeneum procreat, de quibus in Algebra speciosa differuimus.

Ad explicandas igitur æquationes, in quibus cubi solidis, vel quadrato − quadrata plano-planis sine affectione, vel cum affectione æquantur alterutro opere indiget Analysta, vel scilicet constructionis duarum mediarum inter duas datas continuè proportionalium, vel tris-sectionis anguli; propterea quod æquationes quadrato-quadratorum ad æquationes cuborum reducuntur; cubi verò affecti sub quadrato ad cubos affectos sub latere, quæ quidem æquationes duarum mediarum inuentione, vt dicebamus, vel anguli trisectione perfici possunt.

Methodus Communis Recentiorum.

Ex triente coefficientis plani sub lateralis, tanquam rectangulo sub lateribus, & ex comparationis homogeneo tanquam differentia cuborum ipsorum laterum, reperiatur aggregatum cu-

borum

borum ex iisdem lateribus, & ex hoc aggregato cuborum inuento, & ex eorundem cuborum differentia data, reperiantur latera; horum siquidem differentia, quaesitam aequationis radicem exhibebit.

EXEMPLUM.

$a^3 + 3b^2a = z^3$ seu z solido.

b^2 *Triens plani coefficientis sublateralis, & rectangulum sub lateribus datum.*

z^3 *Comparationis homogeneum, & differentia cuborum praedictorum laterum data. Hinc*

d^3 *Aggregatum cuborum eorundem laterum inuentum. Hinc*

$f\ g$ *Latera inuenta supradicti rectanguli. Hinc*

$f-g$ *Differentia laterum, & latus quaesitum.*

DEMONSTRATIO.

Sit recta A data, quae possit coefficiens planum sublaterale, sitque data recta B, cuius cubus sit comparationis homogeneũ, at verò C possit trientem plani sublateralis; ex cubo autem B, tanquam differentia cuborum data, & ex quadrato ipsius C tanquam dato rectangulo sub lateribus comprehenso, reperiatur cubus D aggregatum cuborum ex iisdem lateribus; ex cubo autem B, tanquam ex differentia cuborum data, & ex cubo ipsius D aggregato cuborum inuento, reperiantur latera L & M, quibus comprehenditur rectangulum iam dictum aequale scilicet quadrato ipsius C; horum autem laterum differentia sit E. Dico E esse propositae aequationis quaesitam radicem, ita vt cubus ex E plus triplo solido à quadrato ipsius C, ducto in E, aequetur cubo ipsius B.

A ———
B ———
C ——
D ——
L ——
M ——
E ——

Quoniam enim cubus differentiae laterum plus triplo solido sub differentia laterum in rectangulum sub lateribus aequalis est differentiae cuborum à lateribus; sed E per constructionem est differentia laterum L, & M, & cubus ex B est differentia cuborum eorundem laterum; ergo cubus ex E plus triplo solido à rectangulo sub L, & M, in E differentiam laterum, aequabitur cubo ipsius B; sed rectangulum ex L, & M, per constructionem aequale est quadrato ipsius C; ergo cubus ex E, plus triplo solido à quadrato ipsius C, in E differentiam laterum, aequabitur cubo ipsius B; Erat autem aequatio, in qua cubus lateris, plus triplo solido sub quadrato C, in idem latus, aequalis est cubo ipsius B; ergo E erit radix propositae aequationis quaesita.

LEMMA.

Datis differentia cuborum, & rectangulo sub lateribus, cuborum aggregatum sic reperiunt.

R S T
X

Data sit differentia cuborum r^6, at verò rectangulum sub lateribus sit s^2, & oporteat reperire aggregatum cuborum à lateribus, quibus rectangulum comprehenditur, quaeque sunt latera cuborum, quorum data est differentia. Itaque si a, & e sint lineae; dataque sit differentia cuborum ex ipsis nempe $a^3 - e^3$, datumque itidem sit sub ipsis rectangulum a e: Oportet aggregatum cuborum puta $a^3 + e^3$ exhibere aequale cubo nempe x^3.

Sumpta sit arbitraria quaedam recta b; reperiantur autem septem continuè proportionales b, r, f, g, h, i, l, item totidem alia b, s, m, n, o, p, q; fiat autem t aequalis quadruplo q, item u aequalis l + t; sintque inuenta b, x, z, m, f, g, u, nempè inter b, m, duae media reperiantur x, z, & inter m, u, duae media reperiantur f, g continuè proportionales; reperiendus est autem cubus ex x: reperiantur b, n, p, h, o, o, t, septem continuè proportionales.

Quoniam igitur n^6 aequalis est $t\,b^5$; at vero $t\,b^5$ aequalis est $4\,q\,b^5$, & $4\,q\,b^5$ aequatur $4\,s^6$; ergo n^6 aequabitur $4\,s^6$; sed x^6 aequatur $r^6 + n^6$, siue $4\,s^6$, estque $r^6 + s^6 =$ quadrato ex $a^3 + e^3$; ergo x^6 aequabitur quadrato ex $a^3 + e^3$; ergo x^3 aequabitur $a^3 + e^3$.

SCHO-

SCHOLION.

Hæc demonſtratio per imaginarias quantitates procedit, à quibus Geometra cauendum non ſemel monuimus; niſi tamen alia ſuppetet via, ea calcanda eſt, quæ quidem obuia, dummodo ſcilicet ad veritatem conducat; dum autem per commemoratas quantitates procedit demonſtratio, non eo nomine reycienda, quod aliquid falſi contineat, vel male deducet, ſed quoniam ſubobſcurior cùm ſit intellectui quodammodo tenebras offundit, neque quiſpiam illam redarguat, quòd cauſam non adhibeat tanquam medium ad inferendum; quod enim concomitans eſt, ad cauſæ genus reduci ſuperiùs notauimus.

Lemma II.

Datis aggregato, & differentia duorum cuborum, eorum latera ſic reperiunt.

Sint a, & e lineæ rectæ, & $a^3 + e^3$ æquetur $2\,b^3$, dato cuborum aggregato; præterea $a^3 - e^3$ æquetur $2\,d^3$ cuborũ differentia data; requiruntur autem a, & e. fiat f^3 æqualis $b^3 + d^3$ & g^3 æqualis $b^3 - d^3$.

Quoniam igitur $2\,a^3$ æquatur $2\,b^3 + 2\,d^3$; ergo a^3 æquabitur $b^3 + d^3$; ſed ex conſtructione f^3 æquatur $b^3 + d^3$; ergo a^3 æquabitur f^3; ergo a, æquabitur f; quamobrem a data erit. Et quoniam $2\,e^3$ æquatur $2\,b^3 - 2\,d^3$; ergo e^3 æquabitur $b^3 - d^3$; ſed g^3 æquatur $b^3 - d^3$ ex conſtructione; ergo e^3 æquabitur g^3; ergo e, æquabitur g.

Lemma III.

Quòd autem cubus differentię laterum plus triplo ſolido ſub differentia laterum in rectangulum ſub lateribus, ſit æqualis differentiæ cuborum à lateribus, ſic oſtendunt.

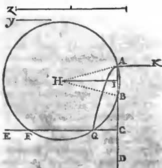
Si enim fuerint a, & b, quantitates datæ; demonſtrabitur cubum ex $a - b$, + triplo ſolido abs rectangulo a b in $a - b$, æquari $a^3 - b^3$; nam cubus ex $a - b$ eſt $a^3 - 3\,b\,a^2 + 3\,b^2\,a - b^3$; ſed triplum ſolidum prædictum nempè abs $3\,b\,a$, in $a - b$ eſt $3\,b\,a^2 - 3\,b^2\,a$, & ex horum additione fit $a^3 - b^3$; ergo &c.

Modus quo Auctor eſt uſus ad duas medias continuè proportionales inueniendas inter duas datas.

Conſtructio eſt Carteſij. Demonſtratio autem Auctoris.

QVoniam ad huius Problematis effectionem duas medias continuè proportionales inter duas datas opus eſt reperire; ob id non grauabimur hìc in medium afferre modum, quo nos vſi ſumus.

Datæ ſint duæ rectæ Y, Z, inter quas opus ſit reperire duas medias continuè proportionales. Exponatur A D, ex qua abſcindatur A B æqualis Y; mox diuiſa A B bifariam in I fiat I H æqualis dimidio Z, & ad rectos angulos cũ A B; Deinde centro H, interuallo H B, vel H A, deſcribatur circulus; deinde autem ad punctũ A, ducta ſit A K æqualis Y, & ad angulos rectos; hac verò tanquam latere recto, vertice A, circa axem A D deſcribatur parabole A G ſecans circulum prædictum in puncto G: agatur per G, recta EG, occurrens circulo in F, & G, ad rectos angulos cum ipſa A D in C, & fiat E C æqualis Z. Dico inter E C, & A B, hoc eſt inter Z, & Y, duas eſſe medias continuè proportionales A C, G C.



Quoniam enim rectangulum F C G æquale eſt rectangulo A C B, vtrinque addito quadrato G C; ergo rectangulum F G C, plus quadrato G C, hoc eſt rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C B, plus quadrato G C; ſed quadrato G C æquale eſt rectangulum C A B, ob parabolen (eſt enim A B æqualis A K lateri recto) ergo rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C B, plus rectangulo C A B; ſed rectangulum A C B, plus rectangulo CAB, eſt æquale qua-

Recta enim E C dupla eſt ex conſtructione ipſius H I, [illegible] F, G C erunt æquales

quadrato A C; ergo rectangulum E C G æquabitur quadrato A C; ergo vt E C, ad A C ita A C ad G C; sed vt A C ad G C, ita G C ad A B, ob parabolen, cùm rectangulum B A C; hoc est sub A K latere recto, & axe A C æquale sit quadrato G C; ergo vt E C ad A C, ita A C ad G C; & vt A C ad G C, ita G C ad A B; ergo inter duas E C, A B duæ G C, & A B, sunt mediæ continuè proportionales. At verò E C est ex constructione æqualis Z, & A B æqualis Y; ergo inter duas datas Y, Z, duas adinuenimus medias proportionales A C, G C, in continua ratione. Quod facere propositum erat,

Auctoris Methodo absoluitur, quod Clarissimus Geometra præstitit beneficio Speciosæ Logistices ad eandem Cubicam Æquationem affirmatiuè affectam sub latere, explicandam.

Alia itidem via non minus eleganti poterit explicari; dummodo tamen illa, nimirum $a^3 + 3 b^2 a = z^3$, seu z sol. nouam hanc induat formam, videlicet

$$a^3 + b^2 a = b^2 d$$

Quod facilè fieri potest, si namque nota quantitas puta coefficiens planum sublaterale appellatum $3 b^2$ nuncupetur b^2 hoc enim ad libitum est, vbi b^2 assumitur tanquam æquipollens ipsi $3 b^2$ si quidem accipitur ad idem planum designandum; & quidem appellari potuisset d^2, vel alio quouis charactere designari, placet nihilominus retinere b. z sol. data magnitudo applicetur ad b^2,* magnitudinem itidem datam; magnitudo quidem ortiua, quæ appelletur d, non ignorabitur; perinde igitur erit dicere $b^2 d$ ac z^3 vel z sol. Considerandus igitur æquationis ortus qui quidem ex Zetetico deprehenditur, qua de re suo loco multa scripsimus; Sunt autem quatuor termini proportionales, & in superiori quidem æquatione hunc in modum, vt b^2 ad a^2, ita a, ad d-a; hic igitur analogismus in quem superior æquatio transmutata est. Ad comparandam itaque propositæ æquationis radicem, soluendum Problema illud

* Quod scilicet assumitur ad significandam magnitudinem, quæ prius erat, significata per $3 b^2$.

Propositam rectam Q D, vtcunque diuisam in A, iterum oportet diuidere in C, ita vt quadratum Q A ad quadratum A C sit in ratione, quam habet A C ad C D.

Intelligatur autem Q A æquari b, & A D dicatur d; at verò A C esto a: vnde C D erit d — a. De hoc tamen infra.

Hæc acutè admodum, atque subtiliter D. Slusius est prosequutus, in suo Mesolabo, beneficio Speciosæ Logistices, de quo infra.

Auctoris methodo idem Problema resoluitur.

Nunc eidem peculiari nostra, quam superiori Libro tradidimus Methodo Problemati satisfacere tentabimus, eodem prorsus adhibito, quo ille vsus est diagrammate.

RESOLVTIO.

Sit iam factum, ita vt quadratum Q A, ad quadratum A C sit in ratione A C ad C D; ad punctum A facta sit A F ad rectos angulos & æqualis ipsi Q A, & in A F, quouis accepto pũcto G protrahatur A D ad partes D vsq; ad E, ita vt A D sit ad A E in ratione G F ad A F, & ex E ducta sit E R parallela & æqualis ipsi A G: ductaque sit G R, quæ parallela erit ipsi A E, atque adeo completum sit rectangulum A G R E, mox autem per punctum C, in quo supponimus rectam esse diuisam Q D, vt Problema iubet, intelligatur ducta P K ad rectos angulos cum ipsa Q D; hoc enim nihil prohibet, eaque secet circumferentiam circuli descripti super A D in puncto K, & rectam G R in puncto P; secetque etiam in puncto L rectam M N connectentem puncta M, & N, in quibus A G, & E R per æqualia supponimus fuisse diuisas. Factum verò sit vt A E ad A D, ita A C ad A B.

Quoniam igitur est, vt quadratum Q A ad quadratum A C, ita A C ad C D, hoc est ob cir-

circulum ita [a] quadratum AC ad quadratum CK; sunt [b] igitur tres proportionales magnitudines, nempè prima QA. siue FA, secunda AC; tertia CK, atque adeo vt FA ad AC, ita AC ad CK; sed vt FA ad AC, ita PC ad BC, vt mox constabit; ergo vt PC ad CB, ita [c] AC ad CK; ergo rectangulum ACB æquabitur [d] rectangulo PCK; sed rectangulum ACD æquale est [e] quadrato CK ob circulum; ergo æqualibus vtrinque additis; rectangulum ACB, vnà cum rectangulo ACD æquabitur [f] rectangulo PCK, vnà cum quadrato CK; sed rectangulum ex AC in BD æquale est [g] duobus rectangulis ACB, ACD, & rectangulum PKC æquale est [h] rectangulo PCK plus quadrato CK; ergo rectangulum ex AC in BD æquabitur rectangulo PKC; sed vt AE ad AD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ex AC in BD, vt mox ostendam; ergo rectangulum ACE ad rectangulum PKC, erit, [i] vt AE ad AD; & conuertendo, vt AD ad AE, ita [k] rectangulum PKC ad rectangulum ACE; sed ex constructione habita in præparatione, vt AD ad AE, ita GF ad FA; ergo rectangulum PKC ad rectangulum ACE, erit [l] vt GF ad FA; sed vt rectangulum PKC ad rectangulum ACE, descripta ellipsi transeunte per puncta A, K, E, cuius axis HI, & semiordinatim applicata AM, ita est quadratum AM, ad rectangulum HMI, seu MHN, vt infra constabit; ergo quadratum AM ad rectangulum MHN, erit [m] vt GF ad FA; sed quadratum AM ad rectangulum MHN est [n], vt latus rectum ad latus transuersum, siue axim HI, ergo vt GF ad FA, ita [o] latus rectum ad latus transuersum ellipseos transeuntis per puncta A, K, E. Quod fieri potest &c.

a Ex schol. 13 sexti, & corol. 20. einsdem.
b 22. sexti.
c 11. quinti.
d 16. sexti.
e Ex schol. 18 sexti, & 17. einsdem.
f 2. axio pri.
g 1 secundi.
h 3 secundi.
i 7. quinti.
k corol. 4. sex.
l 11. quinti.
m 11. quinti.
n 13. pri. Lib. Conic. Apollonij.
o 11. quinti.

Lemma I.

Quòd autem Sit, vt AF ad AC, ita PC ad BC, sic ostendo.

Quoniam igitur est vt AF ad FG, ita AE ad AD ex constructione, atque adeo, ita AC ad AB; ergo per conuersionem rationis erit [a] vt AF ad AG, seu PC, ita AC ad BC; & permutando vt AF ad AC, ita [b] PC ad BC.

a corol. 19 qu.
b 16. quinti.

Lemma II.

Quòd autem in recta AE, si fuerit vt AE ad AD, ita AC ad AB, sit etiam vt AE ad AD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ex AC in BD, sic ostendo.

Quoniam enim est vt AE ad AD, ita AC ad AB; ergo permutando vt AE ad AC, ita [a] AD ad AB, & diuidendo, vt CE ad AC, ita [b] BD ad AB; ergo rectangulum ex BD in AC aquabitur [c] rectangulo ex CE in AB; At verò vt AB ad AC, ita [d] sumpta communi altitudine CE, rectangulum ex AB in CE ad rectangulum ACE; ergo vt AB ad AC; ita [e] rectangulum ex BD in AC ad rectangulum ACE, vel vt rectangulum ACE ad rectangulum ex BD in AC, ita [f] AC ad AB, seu AE ad AD.

a 16. quinti.
b 17. quinti.
c 16. sexti.
d 1. sexti.
e 7. quinti.
f corol. 4 qu.

Lemma III.

Quod autem ad quadratum AM, rectangulum HMI sit vt rectangulum PKC ad rectangulum ACE, sic ostendo.

Quoniam enim ex natura ellipseos, vt rectangulum ILH ad rectangulum IMH, ita [a] est quadratum LK ad quadratum AM, siue CL; ergo diuidendo erit [b] vt quadratum LK, minus quadrato CL, hoc est [c] rectangulum PKC; (est enim PC bifariam diuisa in L) ad quadratum CL, siue AM, vt rectangulum ILH, minus rectangulo IMH, hoc est [d] rectangulum NLM, ad rectangulum HMI; ergo permutando [e] rectangulum PKC ad rectangulum NLM, seu ACE, erit vt quadratum AM ad rectangulum HMI;

a Ex Elem. Conicis.
b 17. quinti.
c 6. secundi.
d Ex Elemen.
e 16. quinti.

COMPOSITIO.

SVper AD descriptus sit semicirculus AKD, & ad punctum A facta sit PA ad rectos angulos, & aqualis ipsi QA, in qua sumpto quouis puncto G protrahatur AD ad E, ita vt AD ad AE sit, vt GF ad FA; ducta autem ER, qua sit aqualis & parallela ipsi AG, agatur GR, qua parallela erit ipsi AE, atque adeò completum erit rectangulum AGRE: diuisis autem AG, ER bifariam in punctis M, & N, acta NM protrahatur ad H, ità vt quadratum AM ad rectangulum

Geometrica effectio ex Analysi deducta.

MHN, sit in ratione GF ad FA. Et protracta MN ad I ita vt NI sit æqualis HM, circa HI, tanquàm axim, & latere recto, quod ad ipsam HI, velut ad latus transuersum sit in ratione vt GF ad FA, describatur semiellipsis, quæ necessariò transibit per puncta A, & E, secabitque circumferentiam semicirculi descripti super AD in puncto K, ex quo cadat perpendicularis KC. Erit enim quadratum QA, ad quadratum AC, vt AC ad CD; protrahatur KC ad partes C, occurratque MN, in L, & GR in P. Fiat autem, vt AE ad AD, ità AC ad AB.

Quoniam igitur est vt GF ad FA, atque adeò vt latus rectum ad latus transuersum, siue axin HI, ellipseos transeuntis per puncta A, K, E; ita quadratũ AM ad rectangulum MHN; sed vt rectangulum PKC ad rectangulum ACE, descripta ellipsi transeunte per puncta A, K, E, cuius axis HI, semiordinatim applicata AM, ita est [a] quadratum AM ad rectangulum MHN, seu HMI, vt ostensum est; ergo rectangulum PKC, ad rectangulum ACE, erit [b] vt GF ad FA; sed ex constructione vt GF ad FA, ita AD ad AE; ergo vt AD ad AE, ita [c] rectangulum PKC ad rectangulum ACE; & conuertendo vt AE ad AD ita rectangulum ACE ad rectangulum PKC: sed vt AE ad AD, ita est rectangulum ACE, ad rectangulum ex AC in BD, vt ostensum est; ergo rectangulum ex AC in BD, æquabitur [d] rectangulo PKC; sed rectangulum ex AC in BD, æquale est [e] duobus rectangulis ACB, & ACD; rectangulum verò PKC æquale est [f] rectangulo PCK plus quadrato CK; ergo duo rectangula ACB, & ACD æqualia erunt rectangulo PCK, plus quadrato CK: sed rectangulum ACD, æquale est [g] quadrato CK; ergo æqualibus hinc inde sublatis, æqualia remanebunt rectangula ACB, & PCK; ergo latera erunt proportionalia, scilicet, vt PC ad CB, ita [h] AC ad CK, sed vt PC ad CB, ita FA, ad AC, vt ostensum est; ergo vt FA ad AC, ità [i] AC ad CK; sunt ergo tres quantitates proportionales, prima AF, siue QA, secunda AC; tertia CK; ergo vt quadratum QA ad quadratum AC, ita [k] quadratum AC ad quadratum CK, hoc est ob circulum; ita [l] AC ad CD.

[a 13. pri. lib. Coni. Apollonij. — b 11. quinti. — c 11. quinti. — d 9. quinti. — e 1. secundi. — f 3. secundi. — g Ex schol. 13 sexti, & 17. eiusdem. — h 16. sexti. — i 11. quinti. — k Ex schol. 22 sexti. — l Ex schol. 13 sexti. & corol. 20. eiusdem.]

Cæterum qua arte beneficio speciosæ Logistices resolutionem, adhibuerimus, & indè Porisma collegerimus, infra suo loco explicabimus.

Interim in memoriam est reuocandum, quod alibi diximus, nullum ferè Theorema, vel Problema esse, quòd ad sui resolutionem, aliqua præparatione non indigeat; plus vel minus, iuxta rei naturam.

Methodi ad explicandam Cubicam Æquationem sub latere negatiuè affectam, vt $a^3 - 3b^2a = z^3$, seu z solido.

Methodus Communis Recentiorum.

Fiant duo triangula æquicrura, ita vt latera vnius æqualia sint lateribus alterius, vtrunque vtrique, & quidem latus sit recta, quæ possit tertiam partem plani coefficientis sublateralis, basis autem secundi sit recta, quæ ducta in tertiam partem coefficientis plani, faciat comparationis homogeneum; angulus autem ad basim triplus sit anguli ad basim primi; huius enim primi trianguli basis pretium Radicis exhibebit.

Commemorata æquatio Geometricè sic explicabitur, Si enim fuerit $a^3 - 3b^2a = z^3$, seu z sol. aliam hanc retineat formam, nempe $a^3 - 3b^2a = b^2d$.

Sit igitur exposita quædam recta CE, quæ ducta in tertiam partem plani coefficientis, faciat cõparationis homogeneũ, quodque in terminis Analyticis erat z^3, seu z sol. hoc enim applicetur ad tertiam partem plani coefficiẽtis, quod in terminis Analyticis erat $3b^2$. Inde verò magnitudo ortiua sit CE, quæ bifariam secetur in K: ex K excitetur perpendicularis KD; mox autem centro C, ad interuallum CD, rectæ, quæ possit tertiam partem plani coefficientis sublateralis, describatur circulus secans KD in D; ducanturque CD, ED; ex ijs autem, quæ infra dice-

mus

mus, diuidatur angulus DCE trifariam, sitque tertia pars anguli prædicti angulus M C L; mox autem ex puncto D, ducatur DA parallela ipsi M C, occurrens circuli circumferentiæ in puncto B, & rectæ EC protractæ ad partes C, in A; erit enim angulus DAC æqualis angulo M C E, atque adeò tertia pars anguli D C E; ducta autem C B. Quoniam igitur C B æqualis est CD; ergo angulus CBD æquabitur [a] angulo CDB; sed angulus CDB æqualis est [b] angulo DCM ob parallelas AD, CM; ergo angulus CBD æquabitur [c] angulo DCM; sed angulus DCM duplus est [d] anguli MCL, seu DAC; ergo angulus CBD duplus erit anguli DAC; est [e] autem angulus CBD æqualis duobus angulis BAC, BCA; ergo anguli B A C, BCA erunt inter se æquales; ergo AB æquabitur [f] C B; sed C B æquatur [g] C D, cui æquatur E D (nam C K, K D æqualia sunt lateribus EK, KD, vtrunque vtrique, anguli autem ad K sunt recti, ex constructione, atque adeò æquales; ergo C D æquabitur E D per 4. primi) ergo duo sunt triangula æquicrura ABC, DCE, ita vt latera vnius æqualia sint lateribus alterius, vtrunque vtrique, angulusque ad basim prioris, puta BAC trianguli, nempè angulus B A C, subtriplus sit anguli ad basim posterioris trianguli C D E, nempè anguli D C E.

[a] 5. primi. [b] 29. primi. [c] 1. axioma. primi. [d] ex constructione. [e] 32. primi. [f] 6. primi. [g] 15. desi. pr.

Ostendendum superest, quòd cubus ex AC, minus triplo solido sub AC, & quadrato A B, æquale sit solido sub C E, & eodem quadrato AB. cadant BI, & FC perpendiculares ad A, L; Manifestum est quòd B I, F C, D K, erunt inter se parallelæ, & quòd A I, erit æqualis I C, item C K æqualis K E; præterea A B æqualis B H, itaque A C æquabitur duplæ A I, & A H duplæ A B, insuper C E duplæ C K, & C H duplæ B I.

Quoniam igitur recta F G diuisa est bifariam in G, & non bifariam in H; ergo [h] rectangulum F H G, seu rectangulum B H D illi æquale [i], vna cum quadrato C H, æquabitur quadrato CF, seu A B: hinc inde subtracto quadrato C H; ergo rectangulũ B H D æquabitur [k] quadrato AB, minus quadrato C H; sed quadratum A B minus quadrato C H, æquale est quadrato A B plus quadrato A C, minus quadrato A H, siue minus quadruplo quadrato AB, vt infrà constabit, & quadratum AB, plus quadrato A C, minus quadruplo quadrato A B, æquale est quadrato A C, minus triplo quadrato AB, vt mox demonstrabitur; ergo rectangulũ BHD, æquabitur [l] quadrato AC, minus triplo quadrato AB; sed vt AC ad CE, ita IC ad C K; vt enim duplum ad duplum, ita est [m] simplum ad simplum, & vt I C ad CK, ita BH ad H D, vtque B H ad HD, ita [o] quadratum BH, siue AB ad rectangulum B H D; ergo vt A C ad C E, ita [p] quadratum A B, ad rectangulum B H D, hoc est ad quadratum A C, minus triplo quadrato A B; hanc enim quadratorum differentiam ostendimus æqualem rectangulo B H D; ergo cubus ex A C, minus triplo solido ex A C, in quadratum A B, æquabitur [q] solido ex C E in quadratum A B.

[h] 5. secundi. [i] 35. tertij. [k] 3. axioma. primi. [l] 1. axioma. primi. [m] 15. quinti. [n] 2. sexti. [o] 1. sexti. [p] 11. quinti. [q] 19. septimi si ad Geometriam transferatur.

Lemma I.

Quod autem quadratum A B, minus quadrato C H, æquale sit quadrato AB, plus quadrato AC, minus quadrato A H, siue minus quadruplo quadrato AB, sic ostendo.

Quoniam enim angulus A C H, est rectus; ergo quadratum A H æquabitur quadrato A C, plus quadrato CH; vtrinque addito quadrato AB, ergo quadratum A B plus quadrato A H, æquabitur quadrato AB, plus quadrato AC, plus quadrato CH; vtrinque subtracto quadrato AH; ergo quadratum AB æquabitur quadrato AB plus quadrato AC, plus quadrato CH, minus quadrato AH; vtrinque subtracto quadrato CH; ergo quadratum AB, minus quadrato CH, æquabitur quadrato AB, plus quadrato AC, minus quadrato AH, seu minus quadruplo quadrato A B. Cùm enim AH diuisa sit bifariam in B, quadratum AH, idem est, quod quadruplum quadratum AB.

Lemma II.

Quod verò quadratum AB, plus quadrato AC, minus quadruplo quadrato AB; æquale sit quadrato A C, minus triplo quadrato A B, sic ostendo. *Quadratum enim A C æquale est quadrato AC, vtrinque subtracto triplo quadrato AB, ergo quadratum AC, minus triplo quadrato A B, æquabitur quadrato A C, minus triplo quadrato A B, sed quadratum A C, minus triplo quadrato AB, idem est quod quadratum A B, plus quadrato A C, minus quadruplo quadrato A B; ergo quadratum AB, plus quadrato AC, minus quadruplo quadrato AB, æquabitur quadrato AC,*

minus triplo quadrato AB.

Si igitur AB, vel DC dicatur b, item CE, d, & AC, a, prodit æquatio $a^3 - 3b^2a = b^2d$.

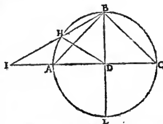
Quoniam autem ad superioris æquationis radicem exhibendam opus est anguli trisectione, quæ pluribus quidem modis exhiberi potest, vel scilicet per Conchoidem, vel per modum simpliciorem, scilicet per circulum, & parabolen, vel per circulum, & hyperbolen &c. Nos posteriori modo rem ipsam absoluere tentabimus.

Anguli trisectio, qua Auctor in huius Problematis effectione uti consueuit.

Veterum ingenia quidem inter duas datas, aliarum duarum continuè proportionalium, & anguli trisectionis æquè vexauit inuentio; primum iam superius præstitimus; secundum nunc exequemur.

PROBLEMA.

Datum angulum rectilineum trifariam diuidere.



PRoblema istud duos habet casus; vel enim angulus diuidendus est rectus, vel non rectus. Si angulus rectus fuerit, admodum facilè est Problemati satisfacere. Idque, nos hunc in modum breuiter assequemur.

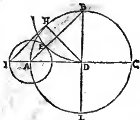
Anguli recti trisectio.

Propositus angulus rectus sit ADB diuidēdus trifariam. Centro D, interuallo D A, describatur circulus A B C L. Protrahatur DA ad partes A in infinitum. Et B D producatur ad peripheriam vsque in L; mox autem centro B, interuallo B L describatur arcus L I, secans D A protractam in I; ex puncto I, ad punctum B, agatur IB, occurrens peripheriæ in H. Ducatur H D. Dico angulum ADH, tertiam esse partem anguli recti ADB. Demonstratio autem patet ex ijs, quæ nos de Circulo tractantes ostendimus ad Propositionem 108.

Triangulū enim HBD æquilaterū est; ob id erit angulus HBD tertia pars duorum rectorum, atque adeò duæ tertiæ partes vnius recti; est autem angulus IDB ex hypothesi rectus; ergo reliquus DIB tertia pars erit vnius recti. Quoniam verò IB, vt ibi ostēdimus, diuisa est bifariam in H; estque H B æqualis semidiametro B D, seu H D, ob id etiam I H æqualis erit H D; quamobrem angulus H I D, æqualis erit angulo HDI: estque angulus H I D tertia pars vnius recti; proinde etiam angulus HDI vnius recti tertia pars erit. Id autem erat nobis ostendendum.

Anguli cuiusdam tam obtusi, quam acuti trisectio.

Operosior tamen est hæc trisectio, cùm angulus non rectus, sed vel acutus, vel obtusus fuerit.



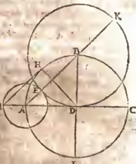
Si propositus angulus fuerit obtusus duplex potest esse casus; aut enim recta quidem æqualis circuli semidiametro applicanda inter periphæriæ conuexum, atque diametrum productam tanget ipsam periphæriam, aut illam secabit. Si itaque propositus angulus obtusus tantus fuerit, vt applicanda illa linea ad trisectionem perficiendam, tangat ipsam peripheriam, Problemati facilè satisfiet per loca plana.

Sit igitur propositus angulus trisecandus H D C, Centro D, & interuallo quocunque D H, describatur circulus HBCA, protrahatur CD ad partes A in infinitum. Applicanda est igitur inter conuexum periphæriæ, & diametrum productam, quæpiam recta I H æqualis semidiametro. Sed id admodum facilè est; namque cum hæc debeat tangere circulum in H æqualis existens

ſtens ſemidiametro, erit angulus ad H rectus. Ad punctum igitur H ducatur I H, quæ angulum efficiat rectum cum H D. Et abſolutum erit quod oportet; applicata enim erit recta IH circulum tangens. Et quoniam angulus HDC ſupponitur tantus, ita vt ducta tangens IH ſit æqualis ſemidiametro, factum erit, quod oportet, applicata nimirum erit recta prout exigitur ad anguli triſectionem. Quoniam enim HI æqualis eſt ſemidiametro HD, erit angulus H I D æqualis angulo H D I; Cumque angulus I H D ſit rectus erit,& angulus vterque H I D, H D I ſemirectus; eſt autem angulus H D C externus æqualis duobus internis, & oppoſitis, I H D, H I D; quamobrem angulus H D C æqualis erit triplo angulo H I D; ſiquidem angulus I H D duplus eſt anguli H I D; quamobrem angulus I H D, vnà cum angulo HI D, triplus erit anguli H I D; ſed angulus H D C æqualis eſt duobus I H D, H I D; vt dictum eſt ergo angulus H D C triplus erit anguli H I D. Quare angulus H I D tertia pars eſt anguli H D C.

Quoniam verò angulus H D I æqualis eſt angulo HID, perſpicuum eſt in hac hypotheſi angulum H D C triſectum eſſe, cuius tertia pars eſt angulus H D I. Et quoniam angulus H D I ſemirectus eſt, qualis eſt ille, qui continetur, ſeu conſtituitur à recta H D, & ab excitata ex puncto D perpendiculari D B, quemadmodum eſt angulus H D B; proinde ad huiuſmodi propoſiti anguli triſectionem, ſatis erit ex puncto D, ad alterutram ipſarum H D, DC perpendicularem excitare, vt hìc excitata DB perpendiculari ad D C, fiet angulus H D B tertia pars anguli H D C; vnde biſariam diuiſo [a] angulo B D C, angulus H D C triſectus erit. [a] 9. primi.

Quòd ſi non eſſet datus angulus HDC ſed applicanda eſſet recta quidem æqualis ſemidiametro inter periphæriæ conuexum, & diametrum productam pluribus modis id fieri poſſet,



Primò reperto circuli centro D, & hinc excitata perpendiculari D B ad diametrum, atque diuiſo angulo A D B biſariam rectâ HD, & ad punctum H conſtituto angulo recto IHD. Recta IH erit æqualis ſemidiametro H D, ac erit applicata inter peripheriæ conuexum, atque diametrum productam.

Secundò verò ſic & elegantiùs. Excitata perpendiculari D B; ductaque A B, & centro B, interuallo B D, deſcripto arcu DE ſecante rectam A B in E,& centro A, interuallo A E, deſcripto arcu E I ſecante diametrum productam in I: ex puncto I, ducta [b] tangente I H, hæc erit æqualis circuli ſemidiametro, quamobrem inter peripheriæ conuexum, & diametrum productam applicata erit recta æqualis ſemidiametro. [b] 17. tertij.

Quod autem IH exiſtat ſemidiametro æqualis, facilè hunc in modum oſtendetur.

Completo circulo E D K productaque AB ad K; quoniam recta A D cum recta B D facit angulum rectum ad D, tanget [c] circulum EDK in puncto D; quamobrem rectangulum K A E, æquale erit [d] quadrato AD, Eſt autem EK æqualis ipſi AC; dimidia enim ipſarum, nempè E B, ſeu B D, & A D ſunt æqualia, eſtque A E æqualis A I; quare tota A K æqualis erit toti IC, exiſtentibus æqualibus AE, AI. proinde rectangulum C I A æquale erit rectangulo K A E; quapropter rectangulum C I A æquale erit quadrato A D; ſed rectangulum C I A æquale eſt [e] quadrato I H; ergo quadratum I H æquale erit quadrato A D, atque adeo I H erit æqualis ipſi A D. Quod oportebat oſtendere. [c] coroll. 16. tertij. [d] 36. tertij. [e] 36. tertij.

Itaque ad punctum D factus erit angulus I D H tertia pars reliqui anguli HDC. Ex hactenus porrò huc uſque allatis nę dum diuiſus erit angulus rectus triſariam, ſed etiam vt patet obtuſus angulus H D C; quinimmò & angulus acutus A D H; cum enim hic dimidius ſit anguli recti, diuiſo angulo recto triſariam non poteſt ignorari triſectio ipſius dimidij nempe anguli A D H, ſiue H D B.

Nunc reliquum eſt, vt diuidamus reliquos angulos, tùm acutos, tùm obtuſos.

Datus ſit angulus diuidendus A D B, centro D, interuallo D A, deſcribatur circulus C A B; protrahatur B D ad partes D, occurrens peripheriæ in C; ductiſque CA, BA; a puncto C agatur C F, æquidiſtans rectæ B A: ſumaturque linea quæcunque O M, & ſuper- Omnis anguli tàm obtuſi, quàm acuti triſectio.

pun-

punctum eius O, fiat angulus M O P æqualis angulo A C E; Ducatur autem à puncto M, linea MK æquidiſtãs lineæ O P: ex angulo autem M O P abſcindatur angulus M O K, æqualis angulo E C F, ducta nimirum linea CK, quæ cum MK neceſſariò concurret; angulus verò K O P reliquus, erit æqualis reliquo A C F.

A puncto M ducatur M L æquidiſtans lineæ OK, quæ neceſſariò concurret cum PO, ſi ad partes M fuerit illa protracta, hæc autem ad partes O, concurrat in puncto N, ſumaturq; linea S, quæ quidem ad lineam OM ſit quemadmodum diameter B C ad ſemidiametrum C D, nempè dupla. Mox autem per punctum K inter duas lineas, tanquam aſymptotos, NP, & N L, beneficio hyperboles ducatur linea H L ſecans lineas NL, N H, in punctis H, & L, ita vt pars eius I K ſit æqualis datæ lineæ S, & pars HI erit æqualis parti KL; à puncto verò M ducatur M P, parallela ipſi H L, occurrens rectæ O K, in R; fiat autem ad peripheriæ punctum A angulus E A C æqualis angulo O P M, ducta videlicet recta A E, quæ neceſſariò concurret cum producta diametro ad partes C. Cùm enim angulus E A C ſit æqualis angulo O P M, & angulus A C F ſit æqualis angulo P O K; angulus vero E C F æqualis ſit angulo M O K, atque totus angulus A C E æqualis toti angulo P O M; lineæ autem P M, & O M concurrant, proinde lineæ quoque A E, & C E concurrent. Quamobrem linea AE, aut peripheriam tanget, aut ſecabit.

Supponamus rectam A E circulum ſecare, adeòut cum producta diametro concurrens, circuli peripheriam non tangat. Namque cùm tangit ſuperiùs, vidimus Problemati per loca plana ſatisfieri poſſe. Secet igitur. Quoniam angulus C A F æqualis eſt angulo OPM; angulus verò A C F æqualis eſt angulo P O R; reliquus propterea angulus A F C æqualis erit angulo ORP; qua propter triangulum ACF æquiangulum erit triangulo OPR; quam-
a 4. ſexti. obrem linea AF ad lineam AC rationem habebit,[a] vt PR ad PO. Ita quoque cùm angulus A C E ſit æqualis angulo P O M, & angulus C A E æqualis angulo O P M, proinde triangulum A C F ſimile erit triangulo P O M. Quamobrem vt A C ad C E, ita P O ad O M.
b 22. quinti. Si itaque vt A F ad A C, ita eſt P R ad PO, & vt AC ad CE, ita PO ad OM; erit[b] ex æquo vt A F ad C E, ita P R ad O M. Quoniam autem M K æquidiſtat P H, & P M æquidiſtat H
c 34. primi. K, ob id H P M K parallelogrammum erit; quamobrem recta P M æqualis erit[c] rectæ H K; quare P M æqualis erit I L, cùm H K, & I L ſint æquales. At verò K L æqualis eſt RM, & RK æqualis ML; ergo PR æqualis erit IK; ſed I K æqualis eſt rectæ S: ob id P R æquabitur
d 7. quinti. S, ſed vt S ad OM, ita diameter B C ad ſemidiametrum D C; ergo vt PR ad OM, ita[d] diameter B C ad ſemidiametrum D C. Quoniam autem erat AF ad CE, vt P R ad O M; proinde crit A F ad C E, vt diameter B C ad ſemidiametrum D C. Ducatur linea C G. Quo-
e 22. tertij. niam igitur quadrangulum A B C G in circulo deſcriptum eſt, erunt[e] anguli AGC, & A B C duobus rectis æquales; cùmque recta CF æquidiſtet rectæ BA, erit angulus FCE æqualis angulo C B A; quamobrem angulus F C E, vnà cum angulo A G C æqualis erit duobus rectis. At vero angulus F G C, vnà cum angulo A G C æqualis eſt duobus rectis; ob id angulus F C E æqualis erit angulo FGC. Eſt autem angulus FEC communis vtrique triangulo CEF, & G C E; ob id reliquus angulus E F C æqualis erit reliquo E C G; quamobrem
f 4. ſexti. circa æquales angulos latera erunt proportionalia; vt igitur G E ad E C, ita[f] E C ad E F;
g 17. ſexti. quare rectangulũ G E F æquale erit[g] quadrato EC, eſt[h] autem rectangulum AEG æquale
h Coroll. 36. tertij. rectangulo BEC: præterea rectangulum AE G æquale[i] eſt rectangulo G E F plus rectan-
i 1. ſecundi. gulo ſub EG, & FA; rectangulum verò BEC æquale eſt[k] rectangulo BCE, plus quadrato
k 3. ſecundi. CE: æqualibus vtrinque ſublatis, nimirum quadrato CE ex vna parte, & rectangulo GEF ex altera, remanebit rectangulum ſub EG, & AF æquale rectangulo BCE; propterea igi-

tur

tur erit vt AF prima ad CE secundam, ita BC tertia ad EG quartam; at verò AF ad EC rationem habet vt diameter BC ad semidiametrum DC, vt supra demonstratum fuit, quamobrem EG æqualis erit semidiametro D C, seu D G; quare angulus GED æqualis erit angulo GDE; est autem angulus AGD æqualis illis duobus, GED nimirum, & GDE, atque adeò duplus anguli G E D, estque angulus G A D æqualis angulo D G A; quare angulus EAD duplus erit anguli DEA. At verò angulus ADB æqualis est duobus DEA, & EAD; quare angulus A D B triplus erit anguli D E A; atque adeò angulus D E A tertia pars erit propositi anguli ADB. 1. 16. sexti.

Quòd si angulus A D B trisectus erit, diuiso trifariam angulo recto, trisectus etiam erit angulus residuus ad rectum, qualis esset angulus ADV; vnde trisecto angulo recto C D V, trisectus etiam erit angulus obtusus CDA.

Auctoris Methodus

Ad generalem Polygonorum omnium ordinatorum inscriptionem in Circulo.

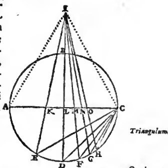
DIGRESSIO.

Ad Iacobum Gregorium Mathematicarum in Collegio D. Andreæ apud Scotos Professorem.

ET inter duas datas rectas lineas duas medio loco continuè proportionales inuenire, & angulum rectilineum trifariam diuidere, mirabile quidpiam est, non nego; longè tamen mirabilius illud fortasse, nempè celebre, ac præstantissimum omnium.

PROBLEMA.

Circuli circumferentiam in quotcunque partes æquales dispescere. Vel quod in idem recidit. Proposito circulo quodcunque polygonum æquilaterum, ac ordinatum inscribere.



ESto circulus A B C D, cuius diameter A C, oporteat facere quod imperatum est. Centro A, ad interuallum diametri AC describatur arcus, & vicissim centro C, ad idem interuallum CA, alter describatur arcus, priorem secans in I; diuidatur diameter A C, in tot æquales partes, in quot diuidenda est circuli circumferentia; duabus enim prætermissis, per punctum diuisionis ducta recta, quæ à puncto intersectionis arcuum I ad peripheriæ cauum perueniat; arcum enim intercipiet ab extremitate ipsius diametri, ita vt tot partes illi æquales in tota peripheria contineantur, quot per diuisionem in diametro continentur. Itaque

Pro Triangulo æquilatero diameter A C in tres æquales partes diuidatur, quarum prima sit AK, per K, ex I agatur IE occurrens peripheriæ cauo in E, agatur E C. Dico E C esse latus Trianguli æquilateri. *Triangulum.*

Pro Quadrato diuisa AC diametro in quatuor partes æquales, initio facto ab A duabus prætermissis, aggregatum è duabus prioribus sit AL per L acta ID, mox ducatur DC. Dico DC esse latus Quadrati circulo inscripti. *Quadratum.*

Pro Pentagono diuidatur AC in quinque partes æquales, initio facto ab A, quarum duabus posterioribus prætermissis, trium priorum aggregatum sit A M, per M ex I ducatur IF, & agatur F C. Dico FC esse latus Pentagoni ordinati, & circulo inscripti, & sic de Exagono; diuisa siquidem diametro AC in sex æquales partes, duabus prætermissis, quatuor priorum summa sit AN per N, agatur IG, ductaque GC, erit quidem GC, latus Exagoni ordinati; Quod si diuidatur diameter in septem æquales partes; quarum duæ fuerint omissæ, & quinque priorum summa sit AO per O, ducta sit I H; acta quidem HC erit Eptagoni ordinati latus, Circulo inscripti. *Pentagonum.* *Exagonum.* *Eptagonum.*

Horum

Horum autem demonſtrationem, pluribus in Libro noſtro de Circulo proſecuti ſumus; In huius Problematis effectione, Seniores Geometræ melioris notæ plurimum inſudarunt; ac in eadem Recentiores non parum temporis, oleum, operamq; perdentes inſumpſerunt; vnde laudis non nihil, abſit à verbo iactantia, nobis à poſteritate ſperandum.

Auctoris Methodo abſoluitur, quod præclarus Geometra præſtitit beneficio ſpecioſæ Logiſtices ad eandem Cubicam Æquationem negatiuè affectam explicandam.

ALia itidem Methodo non minus eleganti ſuperior æquatio Geometricè poterit explicari dummodo tamen illa $a^3 - 3\,b^2 a = z^3$, ſeu z ſol. nouam hanc induat formam $a^3 - b^2 a = b^2 d$.

Modo ſupra inſinuato, cadem enim nota quantitas, nempe b planum ſublaterale coefficiens deſignari hoc ſymbolo poteſt, nempe $3\,b^2$, vel b^2, vbi per b^2 non tertia pars illius coefficientis plani, ſed ipſiſſimum planum intelligendum eſt, & z^3 vel z ſol. intelligendum applicatum ad b^2 itaut ortiuaque magnitudo ſit d. Si autem iam dicta æquatio per antitheſin euadat $a^3 = b^2 a + b^2 d$ ad hunc reuocabitur analogyſmum, vt b^2 ad a^2, ita a ad a + d.

Sed ad indagandam æquationis radicem illud ſoluendum.

Problema.

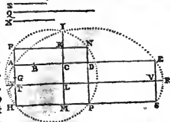
Datis duabus rectis Z, & Q, tertiam reperire X, ad cuius quadratum eandem habeat rationem quadratum Z, quæ eſt ipſius X ad aggregatum ex Z, & X.

Data ſint duo latera F N, & FG accommodata ad rectos angulos in F, oporteat F N diuidere in K, ita vt quadratum FG ad quadratum FK ſit, vt FK ad FN, plus FK, vbi FK intelligitur æqualis X, & FN æqualis Q, & FG intelligatur Z.

RESOLVTIO.

SIt iam factum, ita vt quadratum FG ad quadratum F K, ſit vt F K ad F N plus F K: Duplicetur F G in H, & in recta quidem FG quouis accepto puncto A, ducatur recta A D parallela, & æqualis ipſi FN; ſecetur autem, vel producatur ipſa A D in E, adeo vt eadem ſit ratio AD ad AE, quæ eſt AG ad GH, & compleatur rectangulum H A E S fiat vt E A ad D A, ita C A ad BA.

Quoniam igitur eſt vt quadratum F G ad quadratum FK, ita FK ad FN plus FK, atque adeo vt quadratum FG ad quadratum A C, ita A C ad A D, plus A C; ergo ſumpta communi altitudine AC vt quadratum FG ad quadratum A C, ita quadratum A C ad rectangulum DAC, plus quadrato A C; ſed rectangulum D A C plus quadrato A C æquale eſt duobus rectangulis IMK, MIK; ergo, vt quadratum FG ad quadratum AC, ita quadratum AC ad rectangulum MIK, plus rectangulo IMK, ſeu ad quadratum MI; ergo vt FG ad AC, ità AC ad MI; ſed vt FG ad AC, ita KC ad BC; vt mox conſtabit; ergo vt KC ad BC, ità AC ad MI; ergo rectangulum A C B æquabitur rectangulo ex MI in KC; ſed rectangulum DCA, ſeu PMH æquale eſt rectangulo MIK; ergo per additionem æqualium rectangulum DCA plus rectangulo A C B, æquabitur rectangulo MIK, vnà cum rectangulo ex M I in CK. Sed rectangulum M I C æquale eſt duobus rectangulis MIK, & MI in CK rectangulum verò ex AC in BD æquale eſt duobus rectãgulis DCA, ACB; ergo rectangulum ex A C in BD æquabitur rectangulo MIC; ſed vt E A ad A D, ita quidem rectangulum ACE ad rectangulum ex A C in B D vt oſtenſum iam fuit; ergo rectangulum ACE ad rectangulum MIC, erit vt EA ad AD, vel vt GH ad GA, ſeu vt latus rectum ad latus tranſuerſum ellipſeos &c. Quod fieri poteſt.



Lemma

Lemma I.

Quod autem sit vt FG ad AC, ita KC ad CB, sic ostendo. *Quoniam enim est vt GH, vel FG ad AG, ita EA ad AD, & AC ad AB, ex constructione; ergo per conuersionem rationis erit, vt FG ad FA, siue ad KC, ita AC ad BC; ergo permutando vt FG ad AC, ita KC ad BC.*

Lemma II.

Quod verò rectangulum DAC plus quadrato A C æquale sit duobus rectangulis IMK, MIK, seu quadrato MI, sic ostendo.

Quoniam enim rectangulum sub FG, & MI aquale est quadrato AC ob tres rectas proportionales FG, A C, M I; ergo sumptis duplis, hoc est rectangulum sub dupla F G, hoc est sub F H, vel K M, ex constructione in MI, aquale erit duplo quadrato AC; Rectangulum verò MIK aquale est rectangulo D C A; ergo per additionem aqualium rectangulum D C A plus duplo quadrato A C, fiet aquale duobus rectangulis IMK, MIK; sed rectangulum DCA plus duplo quadrato AC aquale est rectangulo DAC plus quadrato AC; ergo rectangulum DAC, plus quadrato AC, aquabitur duobus rectangulis IMK MIK, hoc est quadrato MI &c.

Compositio.

Dvplicetur FG in H: in recta autem FG accepto quouis puncto A, ducatur AD aqualis, & parallela ipsi FN, & secetur vel producatur in E, adeò vt eadem sit ratio AD ad AE, qua est AG ad GH: compleatur rectangulum A H S E; bisecentur autem recta AH, ES, in punctis T, V, atque ducta TV, producatur in R, adeout rectangulum TRV ad quadratum EV, eandem habeat rationem, quam HG ad GA; producta autem VT in Y, ita vt TY sit aqualis VR; axe autem YR, & latere recto, quod ad latus transuersum sit in ratione AG ad HG, describatur semiellipsis. Ea necessario ex constructione transibit per puncta A, & E, circulumque secabit, vel suprà, vel infra N, vel in ipsomet puncto N.

Supponamus autem sectionem primùm fieri supra N, vt in I, & ex I ad FN, perpendicularis cadat IK; erit enim FK æqualis X quæsitæ; adeout quadratum FG ad quadratum FK, sit in ratione vt FK ad FN, plus FK. Fiat vt EA ad BA, ita CA ad BA. Producatur IK donec occurrat rectis AE, TV, HS in punctis C, L, M.

Quoniam igitur sectio est ellipsis; ergo rectangulum E C A ad rectangulum M I C erit vt latus transuersum ad latus rectum, siue H G ad G A, vel EA ad D A ex constructione; sed vt E A ad DA, ita quidem rectangulum ACE ad rectangulum ex AC in BD, vt ostensum est;* ergo rectāgulum ex AC in BD, æquabitur rectangulo MIC; sed rectangulum ex AC in BD æquale est duobus rectangulis DCA, ACB: rectangulo verò MIC æquale est duobus rectangulis MIK, & MI, in KC; ergo duo rectangula D C A, A C B æqualia erunt duobus rectangulis MIK, & MI, in KC; sed rectangulum DCA, seu PMH, æquale est rectangulo MIK ex circuli natura; ergo sublatis æqualibus ab æqualibus, æqualia remanebunt rectangula ACB, & quod sit ex MI in KC; ergo vt KC ad CB; ita CA ad MI, sed vt KC ad CB, ita FG ad AC, vt ostensum est; ergo vt FG ad AC, ita AC ad MI; ergo vt quadratum F G ad quadratum C A, ita quadratum C A ad quadratum M I, seu quod idem est ad rectangulum M I K plus rectangulo I M K; sed rectangulum D A C plus quadrato A C æquale est duobus rectangulis I M k, M I k siue quadrato MI, vt ostensum est; ergo erit vt quadratum FG ad quadratum A C, ita quadratum AC ad rectangulum D A C, plus quadrato AC; ergo dempta communi altitudine AC, erit vt quadratum F G ad quadratum A C, ita A C ad D A plus A C, atque adeo vt quadratum F G ad quadratum FK, ita FK ad F N plus F k.

*In lemmate ad Problema super. otis æquationis.

Nec dissimiliter si punctum I caderet infra N; perpendicularis siquidem ex I, in FN protractam quæsitam rectam exhiberet. Quòd si caderet in N, ipsa FN, foret recta quæsita.

Methodi explicandi Æquationem, in qua solidum afficitur multa Cubi, vt $3 b^2 a - a^3 = z^3$ seu z sol.

Methodus Communis Recentiorum.

Per planum coefficiens intelligo b^2.

Constituantur duo triangula æquicrura, ita vt latera vnius æqualia sint lateribus alterius, vtrunque vtrique: quodlibet autem laterum sit recta potens tertiam partem plani coefficientis sublateralis; angulus autem, quem is, qui est ad secundi trianguli basin, rectam, quæ ducta in planum coefficiens facit comparationis homogeneum, relinquit ex duobus rectis, triplus sit anguli, qui est ad basim primi; primi namque trianguli basis Radicis pretium exhibebit.

Superior autem æquatio modo supra explicato nouam induat formã, nempè $3 b^2 a - a^3 = b^2 d$.

Exposita sit E C, quæ ducta in planum coefficiens facit comparationis homogeneum, protracta quidem in L, ita vt quadratum C L sit planum coefficiens illud, quod ductum in altitudinem E C, facit comparationis homogeneum. Super EC constituatur triangulum æquicrure EDC, ita vt vtrumlibet laterum ED, DC æquale sit ipsi CL. Ad punctum D cum DC aptanda est A D faciens angulum ADC æquale duobus rectis; demptis tamen angulis DCE, & eo, qui est tertia pars anguli DCL. Proinde secetur angulus DCL trifariam, seu beneficio hyperboles, vt supra docuimus, siue auxilio Conchoideos, & ad punctum D fiat angulus A D C, vt diximus, & ad punctum C fiat angulus A C B æqualis tertiæ parti anguli DCL: protrahatur AD donec occurrat ipsi C B, exempli gratia, in B.

Quoniam igitur angulus BCA ex constructione æqualis est tertiæ parti anguli D C L; angulus verò CDA ex constructione æqualis est duob⁹ rectis, minus tertia parte anguli DC I, & insuper minus angulo DCA; suntque anguli tres CDA, DAC, ACD, æquales duobus rectis; ergo duo anguli DAC, ACD, æquales erunt tertiæ parti anguli DCL, vnà cum angulo DCA. Dempto communi angulo DCA, remanebit angulus DAC æqualis tertiæ parti anguli DCL, atque adeo angulo ACB; quamobrem duo latera CB, AB, erunt [a] inter se æqualia.

a 6. primi.

Quoniam autem vterque angulus A, & C æqualis est tertiæ parti anguli DCL; ergo angulus ABC æqualis complemento ad duos rectos, æqualis erit tertiæ parti iam dictæ, plus angulo D C A, hoc est angulo D A C, plus angulo DCA. At verò duobus hisce angulis æqualis est externus BDC; proinde angulus DBC, æqualis erit angulo BDC; quamobrem latera BC, DC inter se æqualia erunt.[b] Sunt igitur AB, DC, BC inter se æquales. Centro C ad interuallum CD, descriptus circulus DCG, necessariò transibit per B; ex puncto B cadat normalis BI, cùm hæc cadat à vertice B trianguli æquicruris, necessariò bifariam secabit A C in I: insuper cadat perpendicularis DK, hæc necessariò bissecabit E C, in K: protrahatur AB ad partes B, donec occurrat rectæ CH excitatæ ad angulos rectos ex centro C. Ostendendum est triplum solidum contentum sub AB quadrato, & sub altitudine AC, minus cubo eiusdem A C, æquale esse solido, cuius basis est quadratum A B, altitudo autem E C; adeout AC sit propositæ æquationis radix.

b 6. primi.

Quandoquidem quadratum C G, hoc est AB, plus rectangulo FHG, hoc est rectangulo B H D, æquale est [c] quadrato CH, vtrinque sublatis æqualibus, remanebit rectangulum BHD æquale quadrato CH, minus quadrato AB. At verò quadratum CH, minus quadrato A B, æquale est quadrato A H, minus quadrato A B minus quadrato A C, hoc est quadruplo quadrato AB, minus quadrato AB minus quadrato AC; ergo quadratum CH, minus quadrato AB, æquale erit triplo quadrato AB, minus quadrato AC; quamobrem rectangulum B H D æquale erit triplo quadrato A B, minus quadrato A C.

c 6. secundi.

Quoniam autem est vt AC ad CE, ita IC ad CK, & vt IC ad CK, ita BH, ad HD, & ita-

quæ

quadratum BH, vel AB ad rectangulum BHD; propterea, vt AC ad CE, ita erit quadratum AB ad rectangulum BHD, vel ad triplum quadratum AB, minus quadrato AC. Quamobrem triplum solidum sub quadrato AB, vel CL, & altitudine AC, minus cubo eiusdem AC, æquale erit solido sub quadrato AB, siue DC, vel CL, & altitudine quidem EC.

Auctoris Methodo absoluitur, quod præclarus Geometra præstitit beneficio Speciosæ Logistices ad eandem Cubicam Æquationem explicandam, in qua solidum sub latere afficitur multa Cubi.

Alia etiam Methodo Geometricè poterit explicari superior æquatio $3\,b^2 a - a^3 = z^3$, seu z sol., dummodo nouam hanc induat formam

$$b^2 a - a^3 = b^2 d$$

MOdo supra insinuato, eadem enim nota quantitas, nempè b planum sublaterale coefficiens designari hoc symbolo potest, nempè $3\,b^2$, vel b^2, vbi per b^2, non tertia pars illius coefficientis plani, sed ipsissimum planum intelligendum est, & z^3 vel z sol. intelligendum applicatum ad b^2, ita vt ortiua magnitudo sit d; Si autem iam dicta æquatio per antithesin euadat $b^2 a - b^2 d = a^3$, ad hunc reuocabitur analogysmum, vt b^2 ad a^2, ita a, ad $a - d$; sed ad indagandam æquationis radicem, illud soluendum.

Problema.

Datis duabus rectis P, & Q tertiam adinuenire, vt X, ad cuius quadratum, datæ P quadratum eandem habeat rationem, quæ est ipsius X ad excessum, quo X superat Q. Sit AB facta dupla ipsius P, & bissecta in M.

RESOLVTIO.

SIt iam factum, adeò vt quadratum BM ad quadratum FG, sit vt FG ad excessum, quo FG superat AC, vel GH. Sumatur AB æqualis duplæ P, eique ad rectos angulos in A, aptetur AC æqualis Q: perficiatur rectangulum BACD, circa quod sit descriptus circulus AFBC: bissectaq; erit BA in M, sumpto in BM etiã indefinitè producta quouis puncto E, & protracta AC ad partes C, fiat vt ME ad MB, ita AC ad Ak, & perficiatur rectangulum EAkL; bifariam autem diuisis Ak, EL, in punctis S, & T, iungatur ST, quæ protrahatur ad partes T in N, ea lege vt rectangulum SNT ad quadratum TE, sit in ratione EM ad MB; protrahatur TS ad partes S in O, ita vt SO sit æqualis TN. Fiat vt BM ad ME, vel IG ad GH, ita GF ad FR.

Quoniam igitur est vt quadratũ BM ad quadratum FG, ita FG ad excessum, quo FG superat AC, seu ita FG, ad FG minus GH; sed vt quadratum FG, ad quadratũ AG, ita FG ad FG minus GH, vt mox constabit; ergo vt quadratũ BM ad quadratum FG, ita quadratum FG ad quadratum AG; ergo vt BM ad FG, ita FG ad GA. Sed vt BM ad FG, ita BE ad GR, vt infra patebit; ergo vt BE ad GR, ita FG ad GA; ergo rectangulum ex BE in GA æquabitur rectangulo FGR. Sed rectangulum BGA æquale est rectangulo HFG, ex circuli natura; ergo æqualibus additis, rectangulum HFG plus rectangulo ex BE in GA æquabitur rectangulo BGA, vna cum rectangulo FGR; vtrinque subtracto rectangulo FGR; ergo rectangulum HFG, minus rectangulo FGR, plus rectangulo ex BE in GA æquabitur rectangulo BGA; Sed rectangulum HGF plus rectangulo GFR æquale est rectangulo HFG, minus rectangulo FGR (cùm HG plus FR sit æqualis rectæ HF minus RG: communis autem altitudo GF) ergo rectangulum HGF plus rectangulo GFR, vnà cum rectangulo ex BE in GA, æquabitur rectangulo EGA, plus rectangulo ex B

E in G A. Vtrinque subtracto rectangulo ex B E in G A; ergo rectangulum H G F, plus rectangulo G F R, æquabitur rectangulo E G A. Sed vt H G ad G I, ita rectangulum H G F plus rectangulo G F R, ad rectangulum I F G, vt mox demonstrabitur; ergo vt rectangulum E G A ad rectangulum I F G, ita H G ad G I, hoc est, E M ad B M, seu axis O N ad latus rectum. Quod fieri potest &c.

Lemma I.

Quod autem vt quadratum F G ad quadratum A G, ita sit F G ad F G, minus G H, sic demonstrabitur. Hoc à nobis ostensum fuit in Libro de Ellipsi.

Lemma II.

Quod verò sit vt BM ad FG, ita BE ad GR, sic demonstrabitur. *Quoniam enim est ex constructione vt BM ad M E, ita GF ad F R; ergo per conuersionem rationis erit vt B M ad B E, ita FG ad GR; & permutando vt BM, ad FG, ita BE, ad GR.*

Lemma III.

Quod verò sit vt HG ad GI, ita rectangulum HGF, plus rectangulo GFR ad rectangulum I F G, sic demonstrabitur.

Quoniam enim supponitur vt IG ad GH, ita GF ad FR; ergo permutando vt IG ad GF, ita GH ad FR; & componendo vt IF ad GF, ita HG, plus FR ad FR; & iterum permutando, at IF, ad GH plus, FR, ita FG, ad FR; sed vt IF, ad HG, plus FR, sumpta communi altitudine FG, ita rectangulum IFG, ad rectangulum HGF plus rectangulo GFR; ergo vt FG ad FR, seu IG ad GH, ex constructione sic rectangulum IFG, ad rectangulum HGF plus rectangulo GFR; & conuertendo vt HG ad GI, ita rectangulum HGF plus rectangulo GFR ad rectangulum IFG.

COMPOSITIO.

SVmatur AB dupla ipsius P, eique ad rectos angulos in A aptetur AC æqualis Q: perficiatur rectangulum B A C D, circa quod sit descriptus circulus A F B C: bissecta B A in M; sumpto in B M etiam indefinitè producta quouis puncto E, & protracta A C ad parte C, fia, vt M E ad M B, ita A C ad A K, & perficiatur rectangulum E A K L; bifariam autem diuisis AK, EL, in punctis S, & T, iungatur S T, quæ protrahatur ad partes T in N, ea lege vt rectangulum S N T ad quadratum T E, sit in ratione E M ad M B; protrahatur T S ad partes S in O, ita vt S O sit æqualis T N. Mox autem axe, O N, & latere recto, quod ad axem sit in ratione M B ad E M, describatur semiellipsis quæ necessario ex constructione transibit per puncta A, & E, & circulo occurrens, occurret in vno, vel pluribus punctis; occurrat in F, ex quo super A B cadat perpendicularis F G, quæ protracta ad partes G secet parallelas C D, K L, in punctis H, & I; Erit enim F G æqualis X quæsitæ, adeo vt quadratum B M ad quadratum F G, sit vt F G ad excessum, quo FG superat A C, vel G H.

Fiat autem vt BM ad ME, vel I G ad G H, sic G F ad F R.

Quoniam igitur ex ellipseos natura, vt est rectangulum E G A ad rectangulum I F G, ita axis O N ad latus rectum, seu E M, ad B M, hoc est H G ad GI ex constructione; sed vt HG ad GI, ita rectangulum HGF plus rectangulo GFR ad rectangulum IFG, vt ostēsum est in Lemmate; ergo rectangulū HGF, plus rectangulo GFR, æquabitur rectangulo EGA; ergo vtrinque addito rectangulo sub B E, & G A, rectangulum H G F plus rectangulo G F R, vnà cū rectangulo ex BE in GA, æquabitur rectangulo EGA plus rectāgulo ex BE in GA seu BGA; sed rectangulū HGF, plus rectangulo GFR, æquale est rectangulo HFG, minus rectangulo F G R (cum H G, plus F R, sit æqualis rectæ H F, minus R G, & communis altitudo sit G F) ergo rectangulum H F G, minus rectangulo F G R, plus rectangulo ex BE, in G A, æquabitur rectangulo B G A; ergo vtrinque addito rectangulo F G R, rectangulum H F G, plus rectangulo ex B E in G A, æquabitur rectangulo B G A, vnà cum rectangulo F G R; sed rectangulum B G A æquale est rectangulo H F G, ex circuli natura; ergo

ablatis

ablatis æqualibus, remanebit rectangulum ex B E in G A æquale rectangulo F G R; ergo vt B E ad G R, ita F G ad G A, sed vt B M ad G F, ita B E ad G R, vt ostensum est, ergo vt B M ad F G, ita F G ad G A; ergo vt quadratum B M ad quadratum F G, ita quadratum F G ad quadratum A G; sed vt quadratum F G ad quadratum A G, ita F G ad F G, minus G H, vt ostensum est; ergo vt quadratum B M, ad quadratum F G, ita F G ad F G minus G H, seu ita F G ad excessum, quo F G superat A C. Quod facere oportebat.

MONITVM.

AT si quis nullo habito respectu ad Analysin; sed ex demonstratis in Synthesi progredi velit; quod dicebatur assumptum, nimirum Quadratum F G ad quadratum AG, ita esse vt FG, ad FG minus GH; cùm syntheticè eo peruenerit vt BM, ad F G, ita FG ad G A, pergat dicendo, ergo vt BA, nempe dupla BM, ad duplam FG, ita FG ad GA ergo rectangulum BAG æquabitur duplo quadrato FG. Sed rectangulum BAG æquale est quadrato AG plus rectangulo BGA, seu ob circuli naturam, æquatur rectangulo HFG. ergo quadratum AG plus rectangulo HFG æquabitur duplo quadrato F G, sed rectangulum H FG æquale est quadrato FG plus rectangulo F G H, ergo quadratum AG plus quadrato F G, plus rectangulo FGH æquabitur duplo quadrato FG. ergo vtrinque sublato quadrato FG, quadratum AG plus rectangulo FGH æquabitur quadrato FG, vtrinq; sublato rectangulo FGH quadratum AG æquale manebit quadrato FG minus rectangulo FGH. ergo vt FG ad AG, ita AG ad FG minus GH, ergo vt quadratum FG ad quadratum AG, ita FG ad FG minus GH. ob trium proportionalium naturam. Cumque constet esse vt quadratum BM ad quadratum FG, ita quadratum FG ad quadratum AG. propterea illud infertur quod sit vt quadratum BM ad quadratum FG ita FG ad FG, minus GH.

SCHOLION.

Veteres quoque hoc idem assequebantur beneficio intersectionis paraboles, cum hyperbole, quod apud Eutocium videre licet in Commentarijs super libros Archimedis de Sphæra, & Cylindro; quo autem pacto id ab ipsis præstitum sit, ex ijs, quæ hic subijcimus quisque cognoscet.

Methodus explicandi æquationem, in qua solidum affectum sub quadrato multatur Cubo.

HÆc æquatio Geometricè quidem explicari potest hunc in modum. Sit æquatio $b\,a^2 - a^3 = d\,z^2$. Dicatur b esse A B; sitque d idem quod A C, & z^2 sit G B quadratum. Quandoquidem supponitur diuisa A B, in G, itaut G B, sit dupla ipsius A G. Deinde diuidatur rursus in H; citra, vel vltra G; adeòut parallelepipedum, cuius basis quadratum H B; altitudo autem H A, æquale sit parallelepipedo, cuius basis quadratum G B; altitudo vero A C. Oportet autem A B maiorem esse, quàm triplam ipsius C A.



Præsuponendum tamen Lemma iam ab alijs ostensum quod. *Si recta quædam diuisa sit in duas partes, quarum maior sit minoris dupla. Parallelepipedum contentum sub quadrato partis maioris, & sub reliqua parte velut altitudine Maximum esse omnium; quæ per quamcumque diuisionem effici possunt.* Vnde parallelepipedum, quod est comparationis homogeneum: nequit esse maius eo, quod sub A G & quadrato G B continetur. Itaque sit ex. gr. recta quædam X, cuius quadratum ductum in A C, faciat solidum maius contento sub AG in quadratum GB. Problema erit impossibile; quoniam istud est maximum. *Fiat rectangulum A C D B; cuius latera C A; D B producantur ad partes A, & B. Mox vero fiat rectangulum C D Q, æquale quadrato segmenti G B. Ductaque diametro*

metro C G P, protrahatur D Q, donec illi quidem occurrat in P; per punctum autem G, ducta B N parallela alterutri ipsarum C M, D P; compleantur vero parallelogramma A E, A N, E B, B N. Axe verò D B, & latere recto D Q, describatur Parabole D K O, secans M P, in O.

Quoniam igitur circa axem D B, descripta est Parabole, D K O, latere recto existente D Q, erit rectangulum Q D P, æquale quadrato O P. Quamobrem quadratum D P, ad rectangulum Q D P, rationem eandem habebit, quam habet ad quadratum O P. Sed quadratum D P, ad rectangulum Q D P, rationem habet, vt D P, ad Q D, communi existente altitudine DP. Estque rectangulum C D P, ad rectangulum C D Q, communi quidem existente altitudine C D; est inquam, vt D P, ad D Q; & vt D P, ad D Q, ita erat quadratum D P, ad rectangulum Q D P; proinde erit quadratum D P, ad quadratum O P, vt rectangulum C D P, ad rectangulum C D Q; atque adeo permutando rectangulum C D P, ad quadratum DP, rationem habebit, vt rectangulum C D Q, ad quadratum O P. At vero vt rectangulum C D P, ad quadratum DP, ita CD, ad D P, atque adeo ita A G, ad A C; Quamobrem, vt A G, ad A C; ita erit rectangulum C D Q ad quadratum O P, seu quadratum G B, hoc est quadratum N P, ad quadratum O P. At vero A C minor est, quam A G, quæ tertia pars est totius A B, & A B maior supponitur, quàm tripla ipsius A C; quare quadratum O P, minus erit quadrato N P, atque adeo O P, minor erit, quam N P; vnde N P maior erit, quàm O P. Deinde per punctum B, intra Asymptotos A C, C D describatur hyperbole B K N, quæ per punctum N, necessariò transibit, [a] cùm parallelogramma A D,
a 4 & 12 lib. 2. Apollony. *C N, æqualia sint, propter diagonalem C G P; proinde punctum O Paraboles, cadet intra hyperbolen BKN. At vero Parabole D k O, occurrit Asymptoto CD, in vertice D; & occurrit Asymptoto C A, in aliquo alio puncto; propterea quod C A, parallela est axi DP Paraboles; Hyperbole*
b rec. 2 lib. 2. Apollony. *autem semper incedit [b] intra Asymptotos; proinde Parabole DkO bis hyperbole occurrit, supra nimirum, & infra punctum O. Sit autem punctum occursus K, à quo ducantur Parallelæ ad Asymptotos, nempè k F, & kI, compleantur autem Parallelogramma I F, & A D, quæ quidem æqualia sunt [c] inter se, quippequæ constituuntur à lineis ductis, ad Asymptotos, & parallelis &c.*
c 12 lib. 2. Apollonij. *Quamobrem CHL, erit parallelogrammorum diameter, & linea recta. Quoniam autem est A H, ad A C, vt CD, ad DL, siue, vt rectangulum C D Q, ad rectangulum L D Q; & erat quadratum G B, æquale rectangulo C D Q, ex constructione, & quadratum H B, siue k L in Parabola æquale est rectangulo L D Q, proinde A H, ad A C erit, vt quadratum G B, ad quadratum H B. Quamobrem Parallelopipedum, cuius basis est quadratum H B, altitudo autem H A, æquale erit Parallelopipedo, cuius basis est quadratum G B, altitudo verò A C. Quod erat operæ pretium efficere.*

Itaque H B erit radicis valor, nam parallelepipedum, cuius altitudo A B, basis autem quadratum H G, minus cubo ipsius H B, æquatur parallelepipedo, cuius basis est quadratum G B, nempè quadratum ex z, & altitudo est A C, nimirum d.

Aequationes Cubicæ affectæ simpliciter sub Quadrato.

SVpersunt Æquationes aliæ itidem Cubicæ affectæ, simpliciter tamen sub quadrato, vt $a^3 + b a^2 = b d^2$, item $a^3 - b a^2 = b d^2$, tandem $b a^2 - a^3 = b d^2$. Hæ suas habent Geometricas effectiones mediatè, vel immediatè; Priori modo, si cubos hunc in modum affectos nimirum simpliciter sub quadrato, ad cubos simpliciter affectos sub latere reducantur, qua de re nos in Algebra Speciosa multa diximus. Secundo modo si earum constitutio spectetur, earundemque ortus accuratè consideretur, de quo loco citato cumulatè disseruimus. Hìc solum addam ad exhibendum Geometricè latus Aequationis propositæ, conducere diuisionem magnitudinis coefficientis subquadraticæ; siquidē hinc quæsita radix innotescit, hoc etiam Antiquis perspectum fuisse liquet, ex ijs, quæ posteritati tradiderunt, de quo infra. Interim est operæ pretium in memoriam redigere reductionem Cuborum simpliciter affectorum sub quadrato ad cubos simpliciter affectos sub latere & quidem.

Si $a^3 + 3 b a^2$ æquetur z sol. $a + b$, esto e, & $e^3 - 3 b^2 e$, æquabitur z sol. $- 2 b^3$.

Cum igitur Analysta resoluendo peruenerit ad huiusmodi æquationem, vt Geometricè radicis æstimationem exhibeat, debet æquationem illam, ad quam peruenerat, ad hanc reuocare simpliciter affectam sub latere, cùm illa foret affecta simpliciter sub quadrato. Et

Si $a^3 - 3 b a^2$ æquetur z sol. $a - b$ esto e, & $e^3 - 3 b^2 e$ æquabitur z sol. $+ 2 b^3$.

Cum itaque ad illam æquationem peruentum fuerit oportet ad hanc illam redigere, vt radicis

radicis æstimatio Geometricè exhiberi possit. Et

Si $3ba^2 - a^3$ æquetur z sol., $a - b$ esto e. $3b^2e - e^3$ æquabitur z sol. $- 2b^3$, vel $b - a$ esto e. $3b^2e - e^3$ æquabitur $2b^3$ - z sol.

Cùm igitur ad illam æquationem peruentum erit, ad hanc reductionem est confugiendum, vt Geometricè radicis valor exhibeatur.

Aequationes Cubicæ affectæ, tam sub quadrato, quam latere.

NOn rarò accidit vt in resolutionibus ad has æquationes perueniatur; tunc autem præstat illas ita tractare, vt secundus æquationis terminus de medio auferatur, vel reducendę sunt ad eũ modum quo fieri debere docuimus, sicut de tollendo secundo æquationis termino in Algebra Speciosa, sed reductionem ipsam hîc in memoriam reuocabimus.

Aequationes Cubicæ affectæ tam sub quadrato, quàm latere.

NOn rarò accidit, vt in resolutionibus ad has æquationes perueniatur: tunc autem expedit ad reductionem confugere, de qua copiosè in Algebra speciosa locuti sumus; quamobrem.

Si $a^3 + 3ba^2 + d$ pl. a æquetur z sol. $a + b$ esto e.
$e^3 + d$ pl. $- 3b^2\,e$ æquabitur z solido + d plano $b - 2b^3$.
Si $a^3 + 3ba^2 - d$ pl. a æquetur z sol. . $a + b$ esto e. $e^3 - 3b^2 - d$ pl. e.
æquabitur z sol. $- 2b^3 - d$ pl. b.
Si a^3 à- $3ba^2 + d$ pl. a, æquetur z. sol. , $a - b$ esto e. $e^3 - 3b^2 + d$ pl. e
æquabitur z sol. $+ 2b^3 - d$ pl. b.
Vel $b - a$ esto e. $3b^2 - d$ pl. $e - e^3$ æquabitur z sol. $+ 2b^3 - d$ pl. b
Si $a^3 - 3ba^2 - d$ pl. a, æquetur z sol. $a - b$ esto e. $e^3 - 3b^2 - d$ pl. e
æquabitur z sol. $+ 2b^3 + d$ pl. b
Si d pl. $a - 3ba^2 - a^3$ æquetur z sol. $a + b$ esto e. d pl. $+ 3b^2\,e - e^3$
æquabitur z sol. $+ 2b^3 + d$ pl. b.
Si $3ba^2 - d$ pl. $a - a^3$ æquetur z sol. $a - b$ esto e. d pl. $+ 3b^2\,e - e^3$
æquabitur z sol. $- d$ pl. $b - 2b^3$
Vel $b - a$ esto e. d pl. $+ 3b^2\,e - e^3$ æquabitur $2b^3 + d$ pl. b - z sol.
Si tandem $3ba^2 - d$ pl. $a - a^3$ æquetur z sol. $a - b$ esto e $3b^2 - d$ pl.
$e - e^3$ æquabitur z sol. $+ d$ pl. $b - 2b^3$.
Vel $b - a$ esto e. $3b^2 - d$ pl. $e - e^3$ æquabitur $2b^3 - d$ pl. b - z sol.

Hac igitur industria reuocandæ sunt æquationes cubicæ affectæ tam sub quadrato, quàm latere, ad simpliciter affectas sub latere, vt videlicet Geometricè radix æquationis exhiberi possit, ac propterea Problemati satisfieri, de quo potest hæc ætas gloriari, nam huiusmodi Problematibus Veteres ob ignorationem huius Artis satisfacere minimè poterant.

Cæterùm artificio iam dicto suprapositæ æquationes cubicæ explicari possunt, quod mediatè fieri dicitur, quatenus per reductionem explicatio ipsa perficitur.

Immediatè tamen si quispiam hoc idem absoluere contenderet, facile quidem assequeretur si sermo sit de æquationibus cubicis simpliciter affectis sub quadrato, cuiusmodi est $a^3 + ba^2 = bd^2$, qua resoluta in analogismum, fit vt d^2, ad a^2, ita $b + a$, ad b, & procedendo interposita media e, inter b, & $b + a$, prouenit æquatio ad parabolen &c. Tandem enim conijcitur ad æquationis explicationem, opus esse intersectione circuli cum parabola, vel cum hyperbola, de quo infra.

Quòd si æquatio cubica fuerit affecta tam sub quadrato, quàm latere, eius explicatio ad locum solidum pertinet; opus enim est conicis sectionibus, de quo agemus infra, tractantes de lineis eligendis pro solutione Problematis.

Metho-

Methodi explicandi Aequationes compositas Quadrato-quadraticas, & primo de Aequationibus Quadrato quadraticis simpliciter affectis sub quadrato. Cap. IV.

Harum æquationum explicatio facilis admodum est, cùm ad locum planum, nempè circulum spectet. Sit autem primò æquatio quadrato quadratica affecta sub quadrato per affirmationem.

Plana magnitudo, qua potest comparationis homogeneum constituatur media è tribus proportionalibus, ita vt extremarum differentia sit coefficiens plana magnitudo, minori extrema existente magnitudine quæsita.

Proponatur $a^4 + b^2 a^2 = d^4$. Sunt proportionales $a^2 + b^2$, d^2, a^2.

In hac autem æquatione datur media proportionalis d^2 inter extremas, quarum differentia est b^2, minori extrema existente a^2.

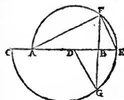
Quoniam autem è tribus magnitudinibus proportionalibus minor extrema est a^2; Intelligatur triangulum rectangulum, cuius basis erit b; at vero d media proportionalis inter hypothenusam, & perpendiculum; a denique perpendiculum ipsum. Hæc ex Zetetico deprehenduntur. Sit b quidem basis trianguli rectanguli; at verò d media proportionalis inter hypothenusam, & perpendiculum; atque demum a sit perpendiculum ipsum.

a 47. primi. Quoniam igitur quadratum hypothenusæ æquale est a quadrato perpendiculi, plus quadrato baseos; si quadratum perpendiculi est a^2, baseos verò, b^2, necessariò quadratum hypothenusæ erit $a^2 + b^2$. Si itaque supponamus esse, vt $a^2 + b^2$, ad d^2, ita d^2, ad a^2, fiet æquatio $a^4 + b^2 a^2 = d^4$. Ex Zetetico igitur constat. Si fuerit $a^4 + b^2 a^2 = d^4$, necessariò esse vt $a^2 + b^2$ ad d^2, ita d^2, ad a^2. Quapropter a esse perpendiculum, trianguli rectanguli; d verò mediam proportionalem inter hypothenusam, & perpendiculum; b, denique basim. Hoc enim modo erit vt $a^2 + b^2$, ad d^2, ita d^2 ad a^2; hoc est vt quadratum hypothenusæ ad quadratum mediæ inter hypothenusam, & perpendiculum, ita huiusmodi quadratum, ad quadratum perpendiculi. Si namque magnitudines fuerint proportionales, etiam & quadrata

b 22 sexti. ipsarum erunt b proportionalia.

Vt autem hæc æquatio Geometricè soluatur, adhibendum est Problema, quod resolutum attulit Vieta in suis effectionibus Geometricis, nempè.

Data base trianguli rectanguli, dataque media proportionali inter hypothenusam, & perpendiculum, reperire triangulum.



Data sit basis A B; media proportionalis inter hypothenusam, & perpendiculum sit Z, oporteat reperire triangulum. Fiat vt A B ad Z, ita Z ad BG, sitque BG constituta ad rectos angulos cum A B; diuidatur A B bifariam in D, centro D, interuallo DG describatur semicirculus C G E; protracta B hinc inde ad C, & E, & super A E descripto semicirculo A F E, protrahatur G B ad F, ductis A F, F E. Quoniam C D, D E sunt æquales, item A D, D B; proinde CA reliqua, reliquæ BE æqualis erit: quare CB æqualis erit A E; proinde rectangulum A E B æquales erit rectangulo C B E; sed illud æquale est quadrato F E, hoc autem quadrato B G; ergo quadratum F E, æquale erit quadrato B G, atque adeò rectæ F E, B G æquales inter se erunt. Quoniam autem triangula A F B, F B E similia sunt. Erit proinde vt AB ad AF, ita BF, ad F E; quare rectangulum sub A F, & B F æquale erit rectangulo sub A B, & F E, hoc est rectangulo sub AB, & BG. Est autem rectangulum sub A B, & G B, æquale quadrato Z; ergo rectangulum sub A F, & F B, æquale erit quadrato ex Z. Est autem angulus A B G rectus; quamobrem angulus A B F rectus erit.

Methodus explicandi Aequationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur negatè sub Quadrato.

PLana magnitudo, quæ potest comparationis homogeneum constituatur media, è tribus proportionalibus, ita vt extremarum differentia sit coefficiens plana magnitudo, maiori extrema existente magnitudine quæsita.

Proponatur $a^4 - b^2 a^2 = d^4$; sunt proportionales $a^2 - b^2$, d^2, a^2. In hac autem æquatione datur media proportionalis d^2, ita vt differentia extremarum sit b^2, maiori extrema existente a^2.

Quoniam autem è tribus magnitudinibus proportionalibus maior extrema est a^2.

Intelligatur triangulum rectangulum, cuius basis erit b; at verò d, media proportionalis inter hypothenusam, & perpendiculum; a denique erit hypothenusa ipsa. Hæc ex Zetetico deprehenduntur.

Sit b quidem basis trianguli rectanguli; at verò d, media proportionalis inter hypothenusam & perpendiculum; atque demum a, sit hypothenusa ipsa.

Quoniam igitur quadratum hypothenusæ æquale est quadrato perpendiculi, plus quadrato baseos. Si quadratum hypothenusæ est a^2; at verò quadratum baseos est b^2, necessariò perpendiculi quadratum erit $a^2 - b^2$. Vt autem est a^2, ad d^2, ita d^2 est ad $a^2 - b^2$. Proinde fiet æquatio $a^4 - b^2 a^2 = d^4$. Ex Zetetico igitur constat. Si fuerit $a^4 - b^2 a^2 = d^4$, necessariò esse, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $a^2 - b^2$. Quapropter a esse hypothenusam trianguli rectanguli, d verò mediam proportionalem inter hypothenusam, & perpendiculum; b denique basim; hoc enim modo erit, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $a^2 - b^2$. hoc est vt quadratum hypothenusæ, ad quadratum mediæ inter hypothenusam, & perpendiculum, ita huiusmodi quadratum ad quadratum perpendiculi.

Si namque magnitudines fuerint proportionales, etiam & quadrata ipsarum erunt proportionalia.

Vt autem hæc Æquatio Geometricè soluatur, adhibendum est Problema, quod resolutum attulit Vieta in suis effectionibus Geometricis, nempè.

Data base trianguli rectanguli, & media proportionalis inter hypothenusam, & perpendiculum, reperire triangulum.

Sed hoc iam suprà solutum fuit.

Methodus explicandi Aequationem, in qua plano planum sub quadrato multatur Quadrato quadrato.

PLana magnitudo, quæ potest comparationis homogeneum constituatur media è tribus proportionalibus, ita vt extremarum summa sit coefficiens plana magnitudo, vtralibet extremarum existente magnitudine quæsita.

Proponatur $b^2 a^2 - a^4 = d^4$. Proportionales erunt $b^2 - a^2$; d^2; a^2. In hac autem æquatione datur media proportionalis d^2, ità vt summa extremarum sit b^2, vtralibet extremarum existente a^2 magnitudine quæsita.

Quoniam autem vtralibet extremarum è tribus magnitudinibus proportionalibus est a^2.

Intelligatur triangulum rectangulum, cuius hypothenusa erit b; at verò d media erit inter basim & perpendiculum; at verò a erit basis, vel perpendiculum. Hæc est Zetetico deprehenduntur.

Sit b hypothenusa trianguli rectanguli; at verò d media proportionalis inter basim, & perpendiculum, atque demum a, sit perpendiculum, vel basis.

Quoniam igitur quadratum hypothenusæ, æquale est quadrato perpendiculi, plus quadrato baseos. Si quadratum hypothenusæ est b^2; quadratum verò perpendiculi sit a^2, necessariò quadratum baseos erit $b^2 - a^2$; ac proinde cùm sit vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $b^2 - a^2$, fiet æquatio $b^2 a^2 - a^4 = d^4$. Ex Zetetico igitur constat, si fuerit $b^2 a^2 - a^4 = d^4$, necessariò esse, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $b^2 - a^2$; quapropter a, esse perpendiculum trianguli rectanguli, d verò

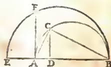
 mediam

mediam proportionalem inter basim, & perpendiculum. Hoc enim modo erit, vt a^2 ad d^2, ita d^2 ad $b^2 - a^2$, hoc est vt quadratum perpendiculi ad quadratum mediæ proportionalis inter basim, & perpendiculum, ita huiusmodi quadratum; ad quadratum baseos.

Vel si b^2 est quadratum hypothenusæ, quadratum autem baseos sit a^2: perpendiculi quadratum sit $b^2 - a^2$; est autem vt $b^2 - a^2$, ad d^2, ita d^2 ad a^2; Quamobrem fiet æquatio $b^2 a^2 - a^4 = d^4$.

Vt autem hæc æquatio Geometricè soluatur adhibendum est Problema quod resolutum attulit Vieta in suis effectionibus Geometricis, nempè.

Data hypothenusa trianguli rectanguli, & media proportionali inter basim, & perpendiculum, reperire triangulum.



Data sit hypothenusa A B, & media proportionalis inter basin, & perpendiculum sit Z: oporteat reperire triangulum. Ad punctum A excitetur perpendicularis A F, ita vt A F, sit æqualis Z.

Descriptis verò semicirculis A C B, & E F B, protracta nimirum B A, ad E. Cadat C D perpendicularis ad A B, ita vt sit æqualis E A ductis A C, BC. Quoniam igitur angulus rectus est ACB, quippe qui est in semicirculo, & AF est æqualis Z; propterea quadratum ex Z æquale erit quadrato A F, atque adeò rectangulo E A B; sed rectangulo E A B, æquale est rectangulum sub DC, & A B; rectangulum verò sub D C, & AB æquale est rectangulo sub AC, & C B; proinde rectangulum sub A C, & C B æquale erit quadrato ex Z. quamobrem vt A C, ad Z, ita erit Z ad C B. Est autem angulus A C B rectus, in triangulo A C B, cuius hypothenusa data est A B; & Z pariter data media est proportionalis inter perpendiculum AC, & basim CB. Triangulum igitur adinuentum est, vt oportebat.

Aequationes Quadrato quadraticæ affectæ simpliciter sub Latere.

CVm autem fuerit Quadrato-quadratum affectum sub latere, pro eius explicatione opus est parabola, & circulo.

Quòd si fuerit affectum quadrato-quadratum sub cubo opus est pro eius explicatione hyperbola, vel parabola, & circulo, sed de his infra.

Placet hic autem in memoriam redigere æquationes quasdam cubicas affectas sub quadrato, quæ ad cubicas æquationes affectas sub latere reducuntur, qua de re nos multa scripsimus in Algebra speciosa. Ita quidem ad $a^3 - 3\,b^2 a = z$ sol. reuocantur $a^3 + 3\,b\,a^2 = z$ sol. ita $a^3 - 3\,b\,a^2 = z$ sol. & $a^3 + 3\,b\,a^2 + d$ pl. $a = z$ sol. In qua reductioue tamen est opus, vt $3\,b^2$ excedat d pl. Item $a^3 + 3\,b^2 a - d$ pl. $a = z$ sol. & $a^3 - 3\,b^2 a + d$ pl. $a = z$ sol. In qua reductione est opus, vt $3\,b^2$ excedat d pl.

Quod si æquatio fuerit in qua solidum afficitur multa cubi; fit etiam reductio. Itaut ad æquationem $3\,b^2 a - a^3$ reducatur $3\,b\,a^2 - a^3 = z$ sol. & $a^3 - 3\,b\,a^2 + d$ pl. $a = z$ sol. In qua reductione est opus, vt $3\,b^2$ excedat d pl. Insuper & d pl. $a - 3\,b\,a^2 - a^3 = z$ sol. & $3\,b\,a^2 + d$ pl. $a - a^3 = z$ sol. & $3\,b\,a^2 - d$ pl. $a^3 = z$ sol. In qua æquatione $3\,b^2$ debet excedere d pl.

Hæc autem reductio fit expurgatione per Vncias; de qua suo loco verba fecimus in Algebra speciosa; Quando itaque peruentum erit resoluendo ad huiusmodi æquationes adhibenda est reductio, & exhibenda Geometricè radix modo iam explicato superius cum de resoluendis æquationibus cubicis, loqueremur.

Vt autem magis, quæ diximus perspicua fiant; non est ignorandum æquationes cubicas per diuisionem ad quadraticas reduci posse, sed illud præmittendum, nimirum quo pacto per multiplicationem constituantur.

Primò supponamus igitur $a^2 + b\,a = b^2$ per antithesin fiet $a^2 + b\,a - b^2 = o$ instituta multiplicatione per $a + b$. prouenict $a^3 + 2\,b\,a^2 - b^2 a = o$, ergo per antithesin $a^3 + 2\,b\,a^2 =$

$a^3 = b^3$, quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 + b a = b^2$.

Secundò ſupponamus $a^2 - b a = b^2$ per antitheſin fiet $a^2 - b a - b^2 = o$ inſtituta multiplicatione per $a - b$. fiet $a^3 - 2 b a^2 + b^3 = o$ per antitheſin $2 b a^2 - a^3 = b^3$; quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 - b a = b^2$.

Tertiò ſupponamus $a^2 + d a = b^2$ per antitheſin $a^2 + d a - b^2 = o$.

inſtituta multiplicatione per $a + b$. & $a^3 \left.\begin{matrix}+b\\+d\end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix}-b^2\\+db\end{matrix}\right\} a - b^3 = o$.

& per anthiteſin $a^3 \left.\begin{matrix}+d\\+b\end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix}-b^2\\+bd\end{matrix}\right\} a = b^3$, quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 + d a = b^2$.

Quartò ſupponamus $a^2 + b a = d^2$ per antitheſin $a^2 + b a - d^2 = o$.

inſtituta multiplicatione per $b - a$. & $\left.\begin{matrix}+b^2\\+d^2\end{matrix}\right\} a - a^3 - b d^2 = o$.

& per anthiteſin $\left.\begin{matrix}+b^2\\+d^2\end{matrix}\right\} a - a^3 = b d^2$. quæ contraria via per diuiſionem reſoluitur in $a^2 + b a = d^2$.

Quintò ſupponamus $b^2 = \left.\begin{matrix}+b\\+d\end{matrix}\right\} a - a^2$ per antitheſin autem

$a^2 + b^2 \left.\begin{matrix}-b\\-d\end{matrix}\right\} a = o$. inſtituta multiplicatione per $a - d$.

$a^3 \left.\begin{matrix}-2d\\-b\end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix}+b^2\\bd\\+d^2\end{matrix}\right\} a - b^2 d = o$, & per antitheſim etiam

$a^3 \left.\begin{matrix}-2d\\-b\end{matrix}\right\} a^2 \left.\begin{matrix}+b^2\\+bd\\+d^2\end{matrix}\right\} a = b^2 d$. quæ contraria via per diuiſionem

reſoluitur in $b^2 = \left.\begin{matrix}+b\\+d\end{matrix}\right\} a - a^2$.

Quod enim ſuperefficit multiplicatio, illud reſoluit diuiſio. Sed aliquando fruſtranea redditur reſolutio, quoniam videlicet æquatio ipſa cubica minimè reſolubilis eſt ad quod explorandum videndum, num inſtituta æquatione, ſic vt termini poſitiui comparentur cum o, per ignotam quantitatem plus, minuſue quantitate nota, æquatio ipſa diuidi poſſit; Tunc enim æquatio reſolubilis erit. Hæc tamen exemplis illuſtrabimus.

Supponamus primò $a^3 - 2 b^2 a$ æquari b^3 per antitheſin fiet $+ a^3 - 2 b^2 a - b^3 = o$; atque adeò $+ a^3 + o a^2 - 2 b^2 a - b^3 = o$. Diuidatur per $a + b$, nempè facta antitheſi proueniat æquatio $a^3 - 2 b^2 a - b^3 = o$; diuiſione autem inſtituta, proueniet quotiens $a^2 - b a - b^2$; ita igitur fit per antitheſin $a^2 - b a = b^2$; ac propterea hæc eſt æquatio quadratica, in quam cubica illa reducta eſt.

Supponamus ſecundò $2 b^2 a - a^3 = b^3$, & per antitheſin $2 b^2 a - a^3 - b^3$, æquabitur o; atque adeo $- a^3 + o a^2 + 2 b^2 a - b^3$, æquabitur o; inſtituta diuiſione per $- a + b$, fit quotiens $a + b a - b^2 = o$, & per antitheſin $a^2 + b a = b^2$, ad quam quidem æquationem cubica illa reducitur.

De Theorematibus reſoluendis beneficio ſpecioſæ Logiſtices. Caput V.

IN Theorematibus reſoluendis, quorum videlicet veritas per Algebram exploranda ſuſcipitur, eodem ordine, quo Theorematis veritas eſt adinuenta, demonſtratio ipſa procedit, itaque diſſimilis eſt Methodo ſuperiori Libro explicatæ, propterea quod illa componendo regredimur per reſolutionis veſtigia, & in ipſorum Theorematum reſolutionibus ſic Analyſta procedit, vt niſi ei datum fuerit Theorema demonſtrandum Theorema ipſum adinueniat; mox verò eodem ordine demonſtrationem contexit, quod ſi ei fuerit exhibitum Theorema demonſtrandum, non ſecus ac ſi primum â ſe inueniendum illud aggreditur; hæc autem exemplis clariora fient. *In Theorematibus reſoluendis per Algebram, eodem ordine quo procedit Reſolutio, procedit etiam Demonſtratio ſeu Compoſitio.*

Supponamus igitur conſiderandam aſſumi lineam rectam vtcunque diuiſam, ſimulque

considerandum rectangulum sub tota, & differentia partium, cui plano ad ipsas partes relato, æquale sit. Vbi aduerte, non inconsulto adiectam fuisse particulam illam ad ipsas partes relato; nam non de quocunque plano hîc est sermo, sed de illo, qui prædictas lineæ partes concernit. Hoc igitur primum esto exemplum, vtpotè facillimum, quo etiam vsus est Ghetaldus initio sui Operis &c.

PROPOSITIO.

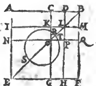
Si recta linea secetur vtcunque, rectangulum sub tota, & differentia partium, cui, plano ad ipsas partes relato, æquale sit, inquirere.

Pars vna esto a, alia autem b, harum aggregatum erit a + b, earundem differentia erit a -- b; ducatur illud in istud, & proueniet $a^2 - b^2$; est autem a^2 vnius partis quadratum, & b^2 est alterius partis quadratū; itaque rectangulum sub tota, & differentia partium æquale est differentiæ quadratorum partium; hinc autem deducitur Theorema.

THEOREMA.

Si recta linea secetur vtcunque, rectangulum sub tota, & differentia partium æquale est differentia quadratorum partium.

Sit recta A B vtcunque secta in D. Dico rectangulum sub tota A B, & differentia partium A D, D B, æquale esse differentiæ quadratorum earundem partium. Fiat C D æqualis D B: compleatur quadratum A E F B; ducatur diameter E B; item rectæ C G, D H, parallelæ alterutri laterum AE, BF, occurrentes diametro in punctis O, & L, per quæ agantur rectæ I M, N Q parallelæ alterutri laterum &c. Quoniam DM, KP, N G, I H, sunt circa diametrum quadrati, erunt quadrata; insuper D M est quadratum partis D B, cui æquale est K P quadratum partis C D; est verò IH quadratum partis A D; at si ex I H subtraxeris quadratum K P remanet gnomon R S T, pro differentia quadratorum partium; est autem rectangulum O H, æquale N K, cui æquale est I C; quare O H æquabitur I C; communi igitur addito I G, fiet rectangulum A G æquale gnomoni differentiæ quadratorum partium; sed AG continetur sub A E, seu A B, tota; & A C differentia partium; ergo rectangulum sub tota, & differentia partium æquale est differentiæ quadratorum partium. Quod erat operæ pretium ostendere.



SCHOLION.

Posset etiam sic illud proponi.

Si duo sint latera quæcunque, rectangulum sub aggregato laterum, & eorundem differentia, cui, plano, ad ipsam, & latera relato, æquale sit inquirere.

Corollarium.

Ex his manifestum est illud.

Si differentia quadratorum applicetur ad laterum differentiam oritur eorundem laterum aggregatum; Cum enim differentia laterum ducta in laterum aggregatum efficiat quadratorum differentiam, proinde differentia quadratorum diuisa per differentiam laterum oritur eorundem laterum aggregatum. Secundò autem et illud inde constat.

Si differentia quadratorum applicetur ad laterum aggregatum, oritur laterum differentia.

PROPOSITIO.

Si recta linea secetur vtcunque, quadratum differentiæ partium, quibus, planis ad ipsas partes relatis æquale sit, inquirere.

Pro-

Propoſita ſit recta quædam diuiſa in partes a, b, quarum illa ſit maior, hæc autem minor; earum igitur differentia erit $a - b$. Sit autem iniunctum inquirere quibus planis ad ipſas partes relatis æquale ſit quadratum ex $a - b$.

Ducatur $a - b$ quadraticè in ſe, & fiat $a^2 + b^2 - 2ba$; hæc autem ſunt illa plana, quibus quadratum differentiæ partium eſt æquale. Hinc

THEOREMA.

Si recta linea ſecetur vtcunque, quadratum differentiæ partium æquale eſt quadratis partium, minus duplo rectangulo ſub partibus.

QVadratum enim C D plus quadrato C B æquale eſt quadrato B D plus duplo rectangulo D B C, plus quadrato C B duplo, ſeu quod idem eſt, eſt æquale quadrato B D, vnà cum duplo rectangulo D C B; ergo exceſſus quadrati C D plus quadrato CB ſupra quadratum B D, eſt duplum rectangulum D C B; ergo quadratum BD æquabitur quadrato C D, plus quadrato CB, minus duplo rectangulo D C B.

C B D

PROPOSITIO.

Si recta linea ſecta ſit vtcunque, ſolidum ſub differentia partium, & ſub aggregato quadratorum, vna cum rectangulo ab ipſis, cui, ſolido ad ipſas partes relato æquale ſit, inueſtigare.

SIt recta diuiſa in partes, quarum vna a, alia b, vt tota ſit $a + b$, differentia partium erit $a - b$: quadratum ex a, eſt a^2; ex b, eſt b^2; rectāgulum ſub ipſis eſt b a; quare horum aggregatum $a^2 + ba + b^2$, quo ducto in $a - b$, fit $a^3 - b^3$, vt ex multiplicatione patet; quare ſi recta linea diuiſa ſit vtcunque, ſolidum ſub differentia partium, & ſub aggregato planorum, quorum vnum eſt quadratum vnius partis, aliud quadratum alterius: tertium denique rectangulum ſub ipſis, æquale eſt differentiæ cuborum à partibus; Hinc

$$a + b$$
$$\overline{a - b \qquad b}$$
$$a$$
$$a^2 + ba + b^2$$
$$a - b$$
$$\overline{- ba^2 - b^2a - b^3}$$
$$a^3 + ba^2 + b^2a$$
$$\overline{a^3 - b^3}$$

Theorema.

Si recta linea ſecetur vtcunque, ſolidum, cuius altitudo eſt differentia partium: baſis autem aggregatum planorum, quorum duo ſunt quadrata partium, reliquum autem rectangulum ſub ipſis, æquale eſt differentia cuborum ab ipſis partibus.

SIt recta D E, vtcunq; diuiſa in F; & G F, æqualis ſit F E, vt D G ſit differentia partium. Dico ſolidum, cuius altitudo D G, baſis autem aggregatum planorum, quorum duo ſunt quadrata partium D F, F E; aliud demum eſt rectangulum D F E, æquale eſſe differentię cuborum earundem partium. Solidum enim, cuius altitudo D G, baſis autem aggregatum quadratorum D F, F E, vnà cum rectangulo D F E conſtant cubo D F, minus cubo ex F E, ex opere multiplicationis. Quamobrem ſi recta linea ſecta ſit &c. Quod erat &c.

a † b
D G F E
a b

SCHOLION.

Poſſet etiam ſic illud proponi

Si duo ſint latera quæcunque, ſolidum, cuius altitudo ſit differentia laterum, aggregatum planorum, quorum duo ſint quadrata partium, tertium verò rectangulum ſub ipſis, cui, ſolido ad

ad ipsas partes relato æquale sit, inquirere.

Corollarium.

Ex his manifestum est illud;

Differentia cuborum applicata ad laterum differentiam oritur aggregatum planorum, quorum duo sunt quadrata laterum; aliud autem rectangulum sub ipsis lateribus.

Contra verò si applicetur ad ipsum aggregatum planorum etc. oritur differentia laterum.

PROPOSITIO.

Exemplum IV. *Sit recta E I, & in ea sit, vt I E ad H E, ita G E, ad F E, rectanguli quidem E H F ad rectangulum sub E H, & G I, quæ ratio sit penès lineæ partes num vt EF ad EG inquirere.*

E F G H I

EI = b
EG = c
HE = d
EF = $\frac{dc}{b}$
HF = d − $\frac{dc}{b}$
GI = b − c

Supponamus E I esse b: at E G, c: H E, d: E F erit $\frac{dc}{b}$: at H F erit d − $\frac{cd}{b}$. Rectangulum E H F erit $d^2 - \frac{d^2c}{b}$; rectangulum verò sub E H, & G I erit bd − dc.

a 16. quinti. b 17. quinti. c 16. quinti. d corol. 4. qui. Quoniam igitur est vt b, ad d, ita c, ad $\frac{dc}{b}$, erit [a] vt b, ad c, ita d, ad $\frac{dc}{b}$; ergo diuidendo [b] vt b − c ad c, ita d − $\frac{dc}{b}$ ad $\frac{dc}{b}$; & permutando [c] vt b − c ad d − $\frac{dc}{b}$, ita c, ad $\frac{dc}{b}$; & conuertendo [d] vt $\frac{dc}{b}$ ad c, ita d − $\frac{d^2c}{b}$ ad b − c; sumpta autem communi altitudine d, erit vt $\frac{dc}{b}$ ad c, ita $d^2 - \frac{d^2c}{b}$ ad b d − d c. Hinc

THEOREMA.

Sit recta quidem A B, sitque vt A B ad A E, ita A D, ad A C. Dico esse vt A C ad A D, ita rectangulum A E C, ad rectangulum sub A E, & D B.

A C D E B

α 16. quinti. β 17. quinti. γ 16. quinti. δ corol. 4. qu. Quoniam enim est vt A B ad A E, ita AD ad AC; erit α permutando vt A B ad A D, ita A E, ad A C; quare diuidendo erit β, vt D B ad A D, ita C E ad A C; & permutando γ vt D B ad E C, ita A D ad A C; & conuertendo δ vt A C ad A D, ita E C ad D B. Sumpta autem communi altitudine A E, erit vt A C ad A D, ita rectangulum sub A E, & E C, hoc est rectangulum A E C, ad rectangulum sub A E, & D B. Quod erat operæ pretium ostendere.

PROPOSITIO.

Exemplum V. *Si ex E I abscissa sint æquales partes E F, H I, & interceptum segmentum F H, vtcunque diuisum in G, oporteat rectangulum F G H quibus planis ad alia lineæ segmenta relatis, æquale sit, inuestigare.*

Pars E F sit d; etiam H D erit d, interceptum segmentum F H, sit b; pars G F esto a, reliqua G H erit b − a: rectangulum sub E G, G I comprehensum, erit b d ✠ d^2 ✠ b a − a^2; at rectangulum E F I comprehensum erit sub d, & b ✠ d illudque erit b d ✠ d^2, quo subtracto ex b d † d^2 † b a − a^2, remanebit b a − a^2. Hinc autem Theorema deducitur.

b
E d F a G H d I
a   b − a
b † d − a   b † d − a
d † a
b a † d a − a^2
b d † d^2 − d a
b d † d^2 † b a − a^2
b d † d^2
b a − a^2

THEOREMA.

Si ex recta A B abscissa sint aequales partes A C, D B, & interceptum segmentum C D vtcunque diuisum in E. Dico rectangulum CED, aequale esse rectangulo AEB, minus rectangulo ACB.

C E D
A———————B

QVoniam rectangulum C E D aequale est rectangulo D C E, minus quadrato C E; rectangulum verò A E B aequale est quadrato A C plus rectangulo C D B, plus rectangulo D C E, minus quadrato C E; ex hoc autem subtracto rectangulo A C B, remanebit rectangulum D C E, minus quadrato C E, hoc est rectangulum C E D. Quamobrem rectangulum C E D aequale erit rectangulo A E B, minus rectangulo A C B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO.

Si fuerit vt E I ad H I, ita E G ad G H, bifariam autem E H secetur in F, è reliquis tres designare continuè proportionales. Exemplum VI.

F G H
E———————I

E I $= b$
H I $= c$
EH $= b - c$
E I plus H I $= b + c$
G H $= \frac{bc - c^2}{b+c}$
G I $= \frac{bc - c^2}{b+c} + c$
F H $= \frac{b-c}{2}$
F I $= \frac{b-c}{2}$

QVoniam igitur est vt E I, ad H I, ita E G, ad G H, erit etiam vt E I, plus H I, ad H I, ita E H, ad G H; igitur E I $= b$: H I $= c$: E H erit $b - c$; & E I plus H I erit $b + c$: & F I erit $\frac{b-c}{2} + c$. Vt itaque $b + c$ ad c, ita $b - c$ ad $\frac{bc - c^2}{b+c}$; quare G H erit $\frac{bc-c^2}{b+c}$; dimidiatis igitur antecedentibus erit vt $\frac{b-c}{2} + c$, ad c, ita $\frac{b-c}{2}$, ad $\frac{bc-c^2}{b+c}$; & per conuersionem rationis erit vt $\frac{b-c}{2} + c$ ad $\frac{b-c}{2}$, ita $\frac{b-c}{2}$ ad $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$. Hinc deducitur.

THEOREMA.

Si sit recta A B, sitque vt A B ad H B, ita AD ad DH, & AH bifariam secetur in C. Dico item esse vt C B ad C H, ita C H ad C D.

C D H
A———————B

QVoniam enim est A B ad H B, vt A D ad D H erit cōponendo vt AB plus HB ad HB, hoc est dupla C B, ad H B, ita A H, nempe dupla A C ad D H; atque adeò dimidiatis antecedentibus, erit vt C B ad H B, ita C H ad D H; & per conuersionem rationis erit, vt C B ad C H, ita C H ad C D. Quod erat operae pretium ostendere.

SCHOLION.

Hoc peculiare habet praestantissima haec resoluendi Methodus, quod ea, quae enunciantur oculorum ictu vera cernuntur: vnde si proportionales aliqui termini esse dicantur, statim huiusmodi esse cognoscuntur. Ita quidem in hac resolutione contingit. Quando siquidem diximus vt $b + c$ *ad* c*, ita* $b - c$ *ad* $\frac{bc-c^2}{b+c}$*, statim apparet hos terminos proportionales esse; ex multiplicatione etenim extremorum fit productum* $bc - c^2$*, quod etiam fit ex multiplicatione mediorum. Dimidiatis autem antecedentibus dicebamus esse vt* $\frac{b-c}{2} + c$ *ad c ita* $\frac{b-c}{2}$ *ad* $\frac{bc-c^2}{b+c}$*, quos quidem terminos proportionales esse perspicuum est. Si namque ducatur c, in* $\frac{b-c}{2}$ *fit* $\frac{bc-c^2}{2}$ *si verò multiplicetur* $\frac{b-c}{2} + c$ *per* $\frac{bc-c^2}{b+c}$ *fit idem; nam fractio illa* $\frac{b-c}{2} + c$*, idem valet ac altera* $\frac{b-c+2c}{2}$*, hoc est* $\frac{b+c}{2}$*, quae ducta in* $\frac{bc-c^2}{b+c}$ *facit* $\frac{b^2c-c^3}{2b+2c}$*, cui aequiualet* $\frac{bc-c^2}{2}$*; nam si diuidatur* $b^2c - c^3$ *per* $2b + 2c$*, fit quotiens* $\frac{bc-c^2}{2}$ *vt constat; si enim diuidatur* $b^2c - c^3$ *per* $b + c$*, oritur* $bc - c^2$*; Cùmque esset diuisor.* $2b + 2c$*, propterea fit quotiens* $\frac{bc-c^2}{2}$ *&c. Vnde etiam per conuersionem rationis dicebamus esse vt* $\frac{b-c}{2} + c$ *ad* $\frac{b-c}{2}$*, ita* $\frac{b-c}{2}$ *ad* $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$*. Tantum enim fit si ducatur* $\frac{b-c}{2}$ *in se quadraticè, quantum fit si ducatur* $\frac{b-c}{2} + c$ *in* $\frac{b-c}{2} - \frac{b^2c-c^3}{b+c}$*.*

In

Ex hoc adiuncto paradigmate cerpitur multiplicationis productum $\frac{b^2 - 2bc + c^2}{4}$ nam $\frac{b^2c - 2bc^2 + c^3}{2b + 2c}$ --- $\frac{bc^2 - c^3}{b + c}$, simul iuncta faciunt $\frac{bc - c^2}{2}$. Totum autem illud afficitur signo —, vt fractio $\frac{bc - c^2}{2}$ afficitur signo +. At +, & — in additione se mutuò interimunt, vnde remanet $\frac{b^2 - 2bc + c^2}{4}$. Quod autem $\frac{b^2c - 2bc^2 + c^3}{2b + 2c}$ cum $\frac{bc^2 - c^3}{b + c}$ faciat $\frac{bc - c^2}{2}$ patet nam fractio illa $\frac{bc^2 - c^3}{b + c}$ reuocatur ad hanc $\frac{2bc^2 - 2c^3}{2b + 2c}$, quæ addita ad $\frac{b^2c - 2bc^2 + c^3}{2b + 2c}$ facit $\frac{b^2c - c^3}{2b + 2c}$; instituta diuisione per b + c fit quotiens $\frac{bc - c^2}{2}$.

$$\frac{b-c}{2} + c$$

$$\frac{b-c}{2} - \frac{bc - c^2}{b + c}$$

$$\frac{- b^2c - 2bc^2 + c^3 - bc^2 - c^3}{b + c}$$

$$\frac{b^2 - 2bc + c^2}{4} + \frac{bc - c^2}{2}$$

$$b^2 - 2bc + c^2.$$

PROPOSITIO.

Exemplum VII. *Iisdem positis &c. Num dicendum vt G I ad E G ita G H ad F G inquirere.*

E F G H I

Quoniam enim ostendimus esse, vt $\frac{b-c}{2}$ + c ad $\frac{b-c}{2}$ ita $\frac{b-c}{2}$ ad $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$; propterea rectangulum sub extremis æquabitur quadrato medij: nempè $\frac{b^2-2bc+c^2}{4}$; sed huic æquale est rectangulum sub b − c − $\frac{bc-c^2}{b+c}$ & sub $\frac{bc-c^2}{b+c}$ vna cum quadrato ex $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$; Vtrinque igitur huiusmodi quadrato subtracto, remanebit rectangulum ex $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$ in $\frac{b-c}{b+c}$ + c æquale rectangulo sub b − c − $\frac{bc-c^2}{b+c}$ & sub $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ergo erit vt $\frac{bc-c^2}{b+c}$ + c ad b − c − $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ita $\frac{bc-c^2}{b+c}$ ad $\frac{b-c}{2} - \frac{bc-c^2}{b+c}$. Hinc deducitur.

THEOREMA.

Iisdem positis &c. in recta A B, & sit vt A B ad H B ita A D ad D H. Dico esse vt D B, ad A D ita D H ad D C.

C D H

A —————— B

Quoniam enim ostendimus esse, vt C B ad C H; ita C H ad C D; erit rectangulum B C D æquale quadrato C H; sed eidem quadrato C H; æquale est rectangulum A D H; plus quadrato C D; ergo vtrinque sublato quadrato C D; erit rectangulum C D B, æquale rectangulo A D H; quare erit vt D B, ad A D ita D.H ad C D. Quod erat operæ pretium ostendere.

Notandum. In proximis superioribus exemplis litteræ maiusculæ Resolutionis & Compositionis non sunt eædem, id tamen non necessariò, sed ad benè esse, si placet, ne Resolutionis maiusculæ eædem sint specie cum minusculis.

SCHOLION.

Hic autem est operæ prètium adiungere sequentem pragmatiam, vt constet terminos illos proportionales esse, vnde magis quoque liquet, quod dicebamus, nimirum hoc præcipuum in hac esse resoluendi ratione, vt illico constet, enunciatum de æqualitate inter aliquos terminos, vel de analogismo in tribus, aut quatuor terminis, quæ certè sine hoc artificio, non nisi vi discursus deprehendi potest; & ex illatione constat, cum hic ob oculos omnia sint luculenter constituta.

Termini proportionales.

$\frac{bc-c^2}{b+c}+c$	$b-c-\frac{bc-c^2}{b+c}$	$\frac{bc-c^2}{b+c}$	$\frac{b-c}{2}\;\frac{bc-c^2}{b+c}$
D	A	B	E

$$b-c-\frac{bc-c^2}{b+c}\ \text{A}$$

$$\frac{bc-c^2}{b+c}\ \text{B}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{b+c}-\frac{b^2c^2-2bc^3+c^4}{b^2+2bc+c^2}\ \text{C}$$

$$\frac{bc-c^2}{b+c}+c\ \text{D}$$

$$\frac{b-c}{2}-\frac{bc-c^2}{b+c}\ \text{E}$$

$$\frac{b^2c^2-2bc^3+c^4}{b^2+2bc+c^2}-\frac{bc^2-c^3}{b+c}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}+\frac{bc-c^2}{2}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}+\frac{bc-c^2}{2}-\frac{b^2c^2-2bc^3+c^4}{b^2+2bc+c^2}-\frac{bc^2-c^3}{b+c}\ \text{F}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{2b+2c}$$

$$\frac{b^2c-2bc^2+c^3}{b+c}$$

$$\frac{bc-c^2}{2}\times\frac{bc^2-c^3}{b+c}$$

$$2bc^2-2c^3$$

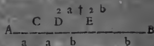
$$b^2c-bc^3$$

$$\frac{b^2c-2bc^2-c^3}{2b+2c}$$

Vides igitur ex ducta A in B fieri C; quantum fit ex ducta D in E. Fit enim F, est autem F, aequalis ipsi C nam [illegible] *reperitur vtrobiq; at si ex* [illegible] *auferatur* [illegible] *remanet* [illegible] *quo addito ad* [illegible] *fit* [illegible].

PROPOSITIO.

Sit recta quadam secta per inaqualia in D; sint autem partes AD, DB diuisa bifariam in C, & E: oporteat conferre quadratum totius AB plus quadrato DB, cum quadrato AC, plus quadrato C B. Exemplum VIII.



SVpponamus A C esse a, etiam C D erit a. At D E sit b, nam & E B erit b; tota autem A B erit 2 a † 2 b: huius quadratum est 4 a² † 8 b a † 4 b²; quadratum autem D B, est 4 b²; itaque aggregatum ex his erit 4 a² † 8 b a † 8 b². At verò quadratum partis A C est a², partis autem C B, est a² † 4 b a † 4 b. Horum aggregatum est 2 a² † 4 b a † 4 b; est autem 2 a² † 4 b a † 4 b² dimidium illius quidem 4 a² † 8 b a † 8 b². Hinc

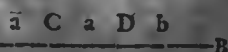
THEOREMA.

Si recta A B diuisa sit per inaequalia in D. Diuisis autem partibus in punctis C, & E, bifariam. Dico quadratum A B plus quadrato D B duplum esse quadrati A C, plus quadrato C B.

QVandoquidem A B diuisa est per inaequalia in D; partes autem A D, D B, diuisae bifariam in C, & E, quadratum totius A B aequale erit duplo rectangulo B A C plus duplo rectangulo A B E; quare rectangulum B A C, vnà cum rectangulo A B E, hoc est rectangulum sub A B, & C E dimidium erit quadrati A B; quadratum autem D B duplum est rectanguli sub D B, & E B; quamobrem rectangulum sub A B, & C E, vnà cum rectangulo sub D B, & E B dimidium erit quadrati A B, plus quadrato D B. Sed rectangulum sub A B, & C E plus rectangulo sub D B, & E B aequale est rectangulo B C E plus rectangulo E C D, vnà cum rectangulo D B E, seu plus rectangulo E D C vnà cum quadrato C D plus rectangulo D B E. At verò haec omnia rectangula scilicet B C E plus rectangulo E D C, vna cum quadrato C D, plus rectangulo D B E aequalia sunt quadratis A C, C B; ergo quadratum A B, vna cum quadrato D B duplum est quadrati A C plus quadrato C B. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO.

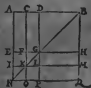
Exemplum VIIII. *Si latus aliquod sectum sit vtcunque, quadratum totius plus quadrato differentiae partium, quibus planis ad ipsas partes relatis aequale sit, inquirere.*



DAta sit recta A B, vtcunque secta in C, ità tamen vt partes A C, C B, sint inter se inaequales, alioqùin nulla earum differentia foret. Sit earum differentia D B. Supponamus A C esse a, etiam C D erit a; at verò D B supponamus b; tota igitur A B erit 2 a † b, cuius quadratum, est 4 a² † 4 b a † b², cui si addas b², fiet 4 a² † 4 b a † 2 b². At verò quadrata partium sunt a², & a² † 2 b a † b², quorum aggregatum est 2 a² † 2 b a † b; hoc autem dimidium est illius 4 a² † 4 b a † 2 b². Hinc

THEOREMA.

Si latus aliquod diuisum fuerit vtcunque, quadratum totius plus quadrato differentiae partium duplum est aggregati quadratorum à partibus.



QVoniam A B secta est vtcunque in D, quadratum totius A B, erit aequale quadrato D B plus duplo rectangulo A D B plus quadrato A D; sed A D secta est bifariam in C. Proinde duplum rectangulum A D B idem est quod quadruplum C D B, & quadratum A D, idem quod quadruplum quadratum C D; proinde quadratum A B aequale erit quadrato D B plus quadruplo rectangulo C D B, plus quadruplo quadrato C D, vel A C. Quare quadratum A B plus quadrato D B, aequale erit quadruplo quadrato A C, plus quadruplo rectangulo C D B, plus duplo quadrato D B.

Quo-

Quoniam autem C B diuisa est vtcunque in D, erit quadratum C B æquale quadratis C D, D B plus duplo rectangulo C D B addito quadrato C D, seu A C: quadratum CB plus quadrato A C, erit æquale duplo quadrato A C, plus duplo rectangulo C D B, plus quadrato D B. Hoc autem aggregatum est dimidium illius, quod constat ex duplo quadrato D B, plus quadruplo quadrato A C, plus quadruplo rectangulo C D B; quamobrem quadratum totius, plus quadrato differentiæ partium duplum est quadratorum à partibus. Quod erat operæ pretium demonstrare.

Hæc cernere licet in superiori schemate A B Q N, ducta diagonali N B, ductisque paralleli C O, D P, item E H, I M, se mutuo secantes in F, G, K, L, &c.

PROPOSITIO.

Si recta A B secta sit in C, & D, vt A C, D B sint inter se æquales; sit autem adiecta ipsi quæcunque B F: rectangulum C F D, quibus planis ad ipsas partes relatis æquale sit, inquirere. Exemplum X.

SVpponamus A C esse d, tantum etiam erit D B. Intercepta CD sit b: adiecta verò B F, esto a. rectangulum C F D, erit $bd + d^2 + 2da + ba + a^2$. At rectangulum A F B est $2da + ba + a^2$. Rectangulum verò C B D est $bd + d^2$. Proinde cùm $bd + d^2$ ✠ $2da + ba + a^2$, constet ex $2da + ba + a^2$, & ex $bd + d^2$. His igitur planis æquale erit rectangulum CFD. Hinc

A — d — C — b — D — d — B — a — F

$$\begin{array}{r} b + d \\ d \\ \hline bd + d^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b + d + a \\ d + a \\ \hline ba + da + a^2 \\ bd + d^2 + da \\ \hline bd + d^2 + 2da + ba + a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2d + b + a \\ a \\ \hline 2da + ba + a^2 \end{array}$$

THEOREMA.

Si recta linea A B secta sit in C, & D, ita vt A C, D B sint æquales, & adiecta & sit B F. Dico rectangulum C F D æquale esse rectangulo A F B, vnà cum rectangulo C B D.

A — C — D — B —

QVandoquidem rectangulum C F D æquale est rectangulo C D B plus quadràto D B plus rectangulo duplo B D F, vnà cum rectangulo sub C D, & B F, plus quadrato B F. At verò rectangulum A F B æquale est duplo rectangulo D B F, plus rectangulo sub C D, & B F, vnà cum quadrato B F. Rectangulum verò C B D æquale est rectangulo C D B, plus quadrato D B; horum aggregatum est rectangulum C D B: plus quadrato D B, vnà cum duplo rectangulo D B F, plus rectangulo sub C D, & B F, vnà cum quadrato D B. Quare &c.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, rectanguli C F D excessum supra rectangulum C B D, esse rectangulum A F B.

PROPOSITIO.

Sit recta E F secta quidem in G, & H, ita vt quadratum E G ad quadratum G H, sit vt E F ad H F. Sit autem iniunctum inquirere, quo pacto se habeant E F, G F, & H F, si inter se conferantur. Exemplum XI.

Statim se se offert analogismus: vnde

THEOREMA.

Si recta E F secta sit in G, & H, ita vt quadratum E G ad quadratum G H, sit vt E F ad H F. Dico E F, G F, H F, in continua esse analogia.

Si enim G F non est media proportionalis inter E F, & H F, sit alia quæpiam I F, quæ maior erit, vel minor quam G F.

E——G——H——F
I I

QVoniam igitur est vt E F, ad H F, ita quadratum E G ad quadratum G H; erit propterea, vt E G ad G H, ita E F ad I F, quæ media est inter E F, & H F. Sed vt E F ad I F, ita debet esse E I ad I H, excessus ad excessum; ergo vt E G, ad G H, ita E I ad I H. Quod est impossibile.

Aliter. Quoniam igitur est vt E F ad I F, ita I F ad H F; ergo vt E F ad H F, ita quadratum E I ad quadratum I H. Sed vt E F ad H F, ita quadratum E G ad quadratum G H ex hypothesi; ergo vt quadratum E I ad quadratum I H, ita quadratum E G, ad quadratum G H. Quod est impossibile.

Aliter. Supponamus I F mediam esse inter E F, & H F.

Quoniam igitur E F, I F, H F, sunt proportionales; ergo ex naturâ proportionalium vt E F ad H F, ita quadratum E I, ad quadratum I H; sed vt E F ad H F, ex hypothesi, ita quadratum E G ad quadratum G H; ergo vt quadratum E I ad quadratum I H, ita quadratum E G ad quadratum G H; ergo vt E I ad I H, ita E G ad G H; & componendo, vt E H ad I H, ita E H ad G H; & permutando vt E H, ad E H, ita I H ad G H; ergo addita communi H F, erunt I F, & G F inter se æquales. Sed I F media supponitur proportionalis inter E F, H F; ergo G F media quoque proportionalis erit inter easdem E F, H F; ergo E F, G F, H F, erunt proportionales.

Perinde est igitur ad demonstrandum suscipere quod punctum I, necessariò cadit in pũcto G, quando I, significet extremum mediæ proportionalis inter E F, H F, alia eius existente extremo in puncto F.

Hoc autem demonstrandi genus est magnopere obseruandum; quamuis enim rarò vsurpetur; tamen est maximè elegans, ac in primis idoneum ad ostendendum, quod alioquin, deducendo ad incoueniens, demonstraretur.

PROPOSITIO.

Exemplum XII. *Sit recta A D diuisa in punctis C, B, itaut rectangulum A D B, sit æquale quadrato C D, quo pacto segmenta inter se collata se habeant inuestigare.*

A——b——C——c——B——D

SVpponamus A C esse b, at C B esse c; & B D quidem esto a. ad A D erit b † c † a, rectangulum A D B erit b a † c a † a², sed quadratum ex C D erit c² † 2 c a † a²; vnde b a † c a † a² cum æquetur c² † 2 c a † a² per antithesin vtrinque sublato rectangulo c a † a², remanebit b a æquale c² † c a, & iterum per antithesin vtrinque sublato rectangulo c a, remanebit b a — c a = c², & resoluta æqualitate in proportionem fiet, vt b — c ad c ita c ad a. Hinc

THEOREMA.

Sit recta A D diuisa in punctis C & B, itaut rectangulum A D B, æquale sit quadrato C D; erit A C maior, quam C B, & erit vt differentia inter A C & C B ad C B, ita C B ad B D.

A——E——C——B——D

QVoniam enim ex hypothesi E C æqualis C B, itaut excessus ipsius A C supra C B sit A E, fiat rectangulum A B D est æquale quadrato C D: vtrinque sublato rectangulo C D B, remanebit rectangulum sub A C & D B, æquale rectangulo sub C D, & C B. ablato iterum vtrinque rectangulo sub C B & B D, remanebit rectangulum sub A E & B D, æquale quadrato C B; & resoluta æqualitate in proportionem erit quidem vt A E excessus,

cessus, ipsius A C supra C B ad E C seu C B, ita C B ad B D. Quod erat operæ pretium ostendere.

Non rarò tamen accidit, vt declinandum præstet ab æqualitatis vsu; sola quidem proportione retenta, & ea quidem adhibita donec eò peruentum fuerit, vt ex terminis notis, is de quo quæritur innotescat; propterea, quando hoc Analysta obseruauerit, se potius ad analogismum adigat, vnde hoc eodem exemplo retento; sic procedendum. *Notandum.*

Quoniam igitur $ba + ca + a^2$ æquatur $c^2 + 2ca + a^2$, resoluta æqualitate in proportionem fiet, vt $b + c + a$ ad $c + a$, ita $c + a$ ad a. Cum autem sit, vt totum $b + c + a$ ad totum $c + a$, ita ablatum $c + a$ ad a erit etiam vt reliquum b ad reliquum c ita $c + a$ ad a, & diuidendo vt $b - c$ ad c ita c ad a.

Vides igitur elegantius conclusum fuisse illud idem quod supra nulla adhibita æqualitate, sed tantum per proportionalium vsum.

Compositio autem resolutioni respondens in se habet.

Quoniam igitur rectangulum A D B æquale est quadrato C D, resoluta æqualitate in proportionem, erit vt A D ad C D, ita C D ad B D; cùm itaque sit vt totum A D ad totum C D, sic ablatum C D ad ablatum B D, etiam erit, & reliquum A C ad reliquum C B, vt ablatum C B ad ablatum B D, & diuidendo, vt A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D.

SCHOLION.

Iuuat hic aduertere discrimen inter hanc Methodum, & illam qua veteres vtebantur in theorematum resolutionibus. Huic theoremati Recentiorum Methodo satisfecimus beneficio speciosa Logisticæs, Compositionem contexentes eodem ordine, quo procedit resolutio. Nunc quo pacto Veteres eidem satisfacerent videamus; hinc enim inter istas Methodos discrimen patebit.

Supponamus igitur ita esse, nempè, vt A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D. Supposito quòd rectangulum A D B æquale sit quadrato C D.

Quoniam igitur est vt A E, ad E C, vel C B, ita C B ad B D; ergo componendo erit vt A C ad C B, ita C D ad B D, & permutando vt A C ad C D, ita C B ad BD, & componendo, vt A C plus C D, hoc est A D ad C D, ita C B, plus B D, hoc est C D ad B D; ergo resoluta æqualitate in proportionem rectangulum A D B æquabitur quadrato C D. Quod ita se habet; hunc enim in modum proponitur linea diuisa.

Propositum sit inquirere quod ostenditur ab Apollonio Lib. primo Conicor. Prop. XI; nempè repetito schemate adhibito in Exemplo LXIX superioris Libri. Hæc etiam Schooten, sed nos multo aliter.

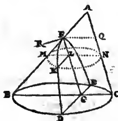
PROPOSITIO.

Sit iniunctum inquirere, cuinam plano relato ad rectam abscissam ex diametro F L sit æquale quadratum semiordinatim applicata in sectione, qua dicitur Parabole. Exemplum XIII.

Sit conus A B C cuius vertex A basis verò circulus B E C D sectio, quæ dicitur parabole D F E, cuius diameter F G, semiordinatim applicata K L, & abscissa ex diametro sit FL oporteat inquirere cui nam plano relato ad abscissam L F, æquale sit quadratum rectæ K L.

Intelligatur ducta F Q parallela ipsi M N. Quoniam igitur triangula B A C, M E L sunt similia; ergo vt A C ad C B, ita F L ad M L; quare si fiat vt c ad d, ita a ad aliam $\frac{da}{c}$, hæc ipsa erit M L. Et rursus quoniam triangula B A C, F A Q sunt similia; propterea erit vt A B ad B C, ita A F ad F Q, seu L N; quare si fiat vt b ad d, ita f ad aliam $\frac{df}{b}$ hæc ipsa erit L N. At rectangulum M L N, hoc est ducta L N, in M L, fit rectangulum æquale quadrato K L; propterea ducta $\frac{df}{b}$ in $\frac{da}{c}$, fiet productum

AB = b
AC = c
BC = d
AF = f
FL = a
KL = e



$\frac{adf}{bc}$

$\frac{d^2f}{bc}a = e^2$. Sed si fiat vt b c ad d^2, ita f, ad aliam, hæc ipsa erit $\frac{d^2f}{bc}$; ergo si fiat vt b c ad d^2, ita f ad aliam, hæc ipsa ducta in a, facit productum æquale e^2. Hinc

THEOREMA.

Si fuerit vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad F R. Dico rectangulum R F L, æquale esse quadrato K L.

QVoniam enim triangula B A C, M E L similia sunt, propterea erit, vt A C ad C B, ita F L ad M L. Et rursus quoniam triangula B A C, F A Q similia sunt, propterea erit vt A B ad B C, ita A F ad F Q, seu N L; Ducta autem L N in M L, facit rectangulum æquale quadrato K L. Et si fiat vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad aliam, quæ sit R F, hæc ipsa ducta in F L facit rectangulum æquale rectangulo M L N; ergo si fiat vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad aliam F R, hæc ipsa ducta in F L, faciet rectangulum æquale quadrato K L. Quod oportebat ostendere.

Vides igitur hoc artificio, eximium illud Apollonij Theorema adinueniri, & adinuentum demonstrari.

Aliter autem in Exemplo LXIX processimus. Diximus enim, quoniam ob similitudinem triangulorum B A C, M E L, vt est c ad d, ita a ad $\frac{da}{c}$, & ob similitudinem triangulorum B A C, F A Q, vt b ad d, ita f ad $\frac{df}{b}$; proportionalibus verò per proportionalia multiplicatis, proportionalia fiunt; ergo vt b c ad d^2, ita f a ad $\frac{d^2f}{bc}a$. Sed si fuerit vt b c, ad d^2, ita f ad aliam, nempe $\frac{d^2f}{bc}$, hæc ipsa ducta in a, facit $\frac{d^2f}{bc}a$; propterea rectangulum factum ab hac quarta proportionali $\frac{d^2f}{bc}$ & a æquabitur ei, cui erat æquale rectangulum factum ex $\frac{df}{b}$ ducta in $\frac{da}{c}$. Sed hoc æquatur e^2, ob circuli naturam; ergo huic etiam æquabitur rectangulum factum ex quarta proportionali iam dicta in a; hinc itaque Theorema.

$\frac{d^2f}{bc}$ est RF.

Si fiat vt rectangulum B A C ad quadratum B C, ita A F ad F R. Dico rectangulum R F L, æquale esse quadrato K L.

Alias etiam proprietates eiusdem sectionis in tertia huius operis parte non dissimili Methodo persequemur.

PROPOSITIO.

Exemplum XIV.

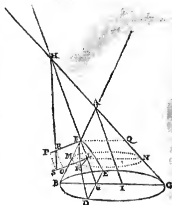
Sit iniunctum inquirere, cui nam plano relato ad rectam abscissam ex diametro sit æquale quadratum semiordinatim applicata in sectione, quæ dicitur Hyperbole.

SIt conus B A C, cuius vertex A, basis autem circulus B E C D, sectio quæ dicitur hyperbole sit D F E; cuius diameter G F, abscissa ex diametro esto L F, semiordinatim applicata K L sitque propositum inquirere, cui nam plano relato ad rectam L F, æquale sit quadratum K L.

$BI = b$
$AI = c$
$IC = d$
$HF = q$
$FL = a$ eritq: $HL = q + a$.
$KL = e$.

Quoniam igitur triangula C A I, N H L sunt similia; est vt A I ad I C, ita H L ad L N. quare si fiat vt c ad d, ita q + a ad $\frac{dq + da}{c}$ hæc ipsa erit L N.

Et rursus quoniam triangula B A I; M F L, similia sunt, propterea erit, vt A I ad B I. Ita F L, ad M L, quare si fiat, vt c ad b, ita a ad $\frac{ba}{c}$ hec ipsa erit M L, at rectangulum M L N, hoc est ducta M L in L N. fit productum æquale quadrato K L. propterea ducta $\frac{dq + da}{c}$ in $\frac{ba}{c}$ fit productum $\frac{bdqa + bda^2}{c^2}$ æquale e^2. Sed si fiat vt c^2 ad b d, ita q ad quartam $\frac{bdq}{c^2}$ hæc ipsa erit R F. Rursus si fiat, vt c^2 ad b d hoc est H F, ad F R, ita a; hoc est F L, seu R O ad $\frac{bda}{c^2}$, erit quidem tanta O S, quare S L, seu P F, erit $\frac{bdq}{c^2} + \frac{bda}{c^2}$ seu $\frac{bdq + bda}{c^2}$ quo ducto in a hoc est F L fiet $\frac{bdqa + bda^2}{c^2}$, sed hoc erat æquale e^2 ergo rectangulum ex $\frac{bdq}{c^2} + \frac{bda}{c^2}$ in a æquabitur e^2.



THEO-

THEOREMA.

Si fuerit vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita H F ad R F, & rursus si fiat vt quadratum A I ad rectangulum B I C ita F L seu R O ad aliam O S seu P R, & hac P R plus R F ducatur in F L, vt fiat rectangulum P F L, Dico rectangulum P F L aquale esse quadrato K L.

Demonstratio procedit non absimili modo ac superior.

Quoniam igitur triangula C A I, N H L, sunt similia; ergo vt A I ad I C, ita H L, ad L N. Rursus ob similitudinem triangulorum B A I, M F L, erit vt A I ad B I, ita F L ad M L; at si ducatur M L in L N, fit productum, siue rectangulum æquale quadrato K L; verùm si fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita H F ad R F. Rursus si fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita F L, seu R O, ad aliam O S, seu P R, quæ plus R F, ducta in F L, facit rectangulum M L N, sed hoc rectangulum erat æquale quadrato K L; ergo si fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita H F, ad R F; & rursus fiat vt quadratum A I, ad rectangulum B I C, ita F L, seu R O ad aliam O S, seu P R, & P R plus R F ducatur in F L, fiet rectangulum æquale quadrato K L.

PROPOSITIO.

Sit iniunctum inquirere, cui nam plano rel[illegible]o ad F L, sit æquale quadratum semiordinatum applicatæ K L, in sectione, quæ dicitur Ellipsis.

SIt conus B A C cuius vertex A; basis autem circulus cuius diameter B C; sectio, quæ dicitur ellipsis sit K F H, cuius diameter F H.

Notentur magnitudines characteribus ad resolutionem idoneis, vt hic a latere cernis. Deinde

$BI = b.$
$AI = c.$
$CI = d.$
$FH = q.$
$FL = a.$ & erit $LH = q - a$
$FI = e.$

Quoniam triangula A C I, & H N L, sunt similia propterea vt A I ad I C, ita H L ad L N, atque adeo, vt c ad d, ita q -- a ad $\frac{dq - da}{c}$, itaque L N erit $\frac{dq - da}{c}$. Et quoniam rursus triangula A B I, M F L, sunt similia; proinde vt AI ad BI, ita F L ad M L, hoc est vt c ad b, ita a ad $\frac{ba}{c}$, itaque M L erit $\frac{ba}{c}$, at si ducatur M L in L N, fit rectangulum æquale quadrato K L; itaque $\frac{ba}{c}$ ductum in $\frac{dq - da}{c}$ facit productum $\frac{bdqa - bdaa}{cc}$ æquale e^2.

At si fiat vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita F H ad quartam F R, seu vt c^2 ad b d ita q ad $\frac{bdq}{cc}$ erit hæc ipsa F R.

Si verò fiat vt F H ad F R: ita F L seu P S ad P R, hoc est vt c^2 ad b d ita a ad $\frac{bda}{cc}$ hæc ipsa erit P R, at $\frac{bdq}{cc} - \frac{bda}{cc}$ ductum in a facit $\frac{bdqa - bdaa}{cc}$, nempe rectangulum ex $\frac{ba}{c}$ in $\frac{dq - da}{c}$, quod erat æquale e^2; quare rectangulum ex $\frac{bdq}{cc} - \frac{bda}{cc}$, in a erit æquale e^2. Hinc

THEOREMA.

Si fiat vt quadratum A I ad rectangulum B I C, ita F H ad F R, & vt F H ad F R ita F L seu P S ad P R. Dico rectangulum P F L aquale esse quadrato K L.

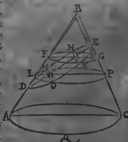
Demonstratio patet &c.

PROPOSITIO

Exemplum XVI.

Proposita sit elli[illegible] D M E [illegible] ab cono A B C: cius autem a[illegible] D E, ordina[illegible] a[illegible] H K, M O. [illegible] it inueni[illegible] quæ[illegible] I K ad quadrat[illegible] N O.

TRanseat planum per H K, & fiat commun[illegible] F H G K cuius diameter F G; huiusmodi enim planum est parallelum basi. Transeat etiam per M O planum al[illegible]rum, & fiat communis sectio circulus L M P O, cuius diameter L P; est enim huiusmodi planum basi parallelum. Quoniam igitur hæc plana sunt parallela basi ipsius coni erunt inter se parall[illegible], ac o[illegible] id & eorum communes sectiones F G, L P, cum plano A B C erunt inter se parallelæ; quar[illegible] triangula E I G, E N P, erunt inter se similia; item D I F, D N L, similia erunt inter se. E I sit b: I G, c. E N, a: præterea I D sit d. F[illegible], f. D N, g. Insuper I K sit e, & N O esto u. Quoniam igitur triangula E I G, E N P sunt similia; fiat vt b ad c, [illegible] a [illegible]. Rursus quoniam triangula D N L, D I F sunt similia fiat vt d ad f, ita g ad [illegible]; ergo vt rectangulum b d ad rectangulum f c, ita rectangulum g a, ad rectangulum [illegible] a. Sed rectangulum fc, ob circuli naturam æquale est e', & re[illegible] [illegible] a, æquale est u'; ergo vt rectangulum b d, ad e, ita rectangulum g a, ad u', & permutando, vt rectangulum b d ad rec[illegible] g a [illegible] e ad u'; Hinc



THEOREMA

Si sit ellipsis D H E O, in cono A B C, cuius axis D E: ordinatim applicata H K, M O. Dico quadratum I K ad quadratum N O, esse vt rectangulum E I D, ad rectangulum E N D.

QVoniam enim triangula E I G, E N P, sunt similia, ergo vt E I ad I G, ita E N ad N P. Et rursus quoniam triangula D N L, D I F sunt similia; ergo erit vt I D ad I F, ita D N ad L N; ergo vt rectangulum E I D ad rectangulum F I G, ita rectangulum E N D, ad rectangulum L N P, sed rectangulum F I G æquale est quadrato I K, & rectangulum L N P æquale est quadrato N O; ergo vt rectangulum E I D ad quadratum I K ita rectangulum E N D ad quadratum N O; ergo permutando, vt rectangulum E I D ad rectangulum E N D, ita quadratum I K ad quadratum N O. Quod erat operæ pretium ostendere.



Can-

Cautiones, quibus indiget Analysta in Theorematis oblati Resolutione instituenda, & quid inter Antiquam, & nouam Methodum intersit. Cap. VI.

SAgacis Artificis est expeditam viam seligere, ne difficultatibus obrutus, ab opere cœpto desistat. Illud autem in primis curet, vt mentis agitatione Theorematis oblati naturam perspectam habeat, qua comperta, & sedulò quidem explorata, præparationē, si qua opus est, instituat, qua in re ipsius solertia non exiguum habebit momentum; Præparatio autem magni facienda est, cùm hinc pateat aditus ad analysin; hæc porrò maximè innotescent ex obseruatione multarum resolutionum vnius, eiusdemque Theorematis; propterea quod inde cuique planum fiet, qua ratione seligere viam liceat expeditiorem ad propositum conducentem; Sit autem in exemplum. *Quid Analysta cauendū.*

THEOREMA.

In omni circulo sumpto quouis arcu minori quàm 45 grad. eiusque duplo, erit vt tangens arcus simpli ad tangentem arcus dupli, ita differentia inter quadratum radij, & quadratum tangentis arcus simpli ad duplum quadrati radij,

HVius Theorematis variæ extant demonstrationes, in quibus variæ præparationes cernuntur; illud quidem demonstrauit Ægidius Personerius de Roberual Amicus noster, Thomas Hobbes, Petrus Carcauius, Carolus Cauendysius, D. Palicur, Ioannes Ludouicus VVolzogen, Bonauentura Caualerius, Claudius Mydorgius, Iacobus Golius, Franciscus Schooten, & nos eidem Theoremati Analyticè procedentes satisfecimus. Si quis igitur conferat prædictorum Geometrarum demonstrationes, facilè Disciplinæ fœcunditatem notabit, simulque conspiciet, qua industria liceat aptiorem viam seligere, notando videlicet, quid inter illas præparationes intersit, quarum nulla cum alia coincidit. Et hinc operosum non erit præceptum depromere,

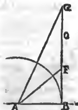
Hic non foret abs re supradictas demonstrationes in medium afferre, breuitati tamen studentes prætermisimus, contenti solùm sequentes nostras Resolutiones attulisse.

Auctoris modi, quibus proposito Theorematifit satis.

ROPOSITIO.

Iisdem positis, & propositum sit inquirere, qua sit ratio differentia quadratorum A B, B F, ad duplum quadratum A B relata ad B F & B G,.

RESOLVTIO I.



POtest resolutio institui procedendo scil. vel per æqualitatem, vel solum per terminos proportionales; per æqualitatem sic illam instituo A B sit b, B G sit c, nam A G erit ℞ $(b^2 + c^2)$ & B F esto a, vnde F G erit $c - a$; ergo cum angulus G A B, sit bisectus à recta A F erit vt $c - a$ ad a, ita ℞ $(b^2 + c^2)$ ad b: quare rectangula sub extremis, & medijs erunt æqualia; proinde a ℞ $(b^2 + c^2)$ æquabitur $bc - ba$. omnibus applicatis ad a fiet ℞ $(b^2 + c^2) = \frac{bc - ba}{a}$ ergo horum quadrata erunt æqualia, quamobrem $b^2 + c^2$ æquabitur $\frac{b^2c^2 - 2b^2ac + b^2a^2}{a^2}$, tollatur fractio instituta communi multiplicatione per a^2, & $b^2a^2 + c^2a^2$ æquabitur $b^2c^2 - 2b^2ac + b^2a^2$ vtrinque subtracto b^2a^2, & fiet $c^2a^2 = b^2c^2 - 2b^2ac$. omnibus applicatis ad c fiet $ca^2 = b^2c - 2b^2a$, & per antithesin $ca^2 + 2b^2a = b^2c$. & rursus $2b^2a = b^2c - a^2c$, seu $b^2c - a^2c = 2b^2a$. instituto parabolismo omnibus applicatis ad $b^2 - a^2$. fiet $\frac{2b^2a}{b^2 - a^2} = c$. vnde resoluta æqualitate in proportionem fit analogismus huiusmodi. Vt $b^2 - a^2$ ad $2b^2$ ita a ad c.

Hæc tamen resolutio per æqualitatem procedens, quamuis in proportionem desinat; nihilominus, minus idoneam suppeditat viam ad demonstrandum, ob ascensum in æqua-

tionibus ad quantitates imaginarias, præstat ob id hanc ommittere, quæ tamen omninò spernenda non est, cum ostendat quod quæritur; sed elegantiùs fiet progressus per terminos proportionales, vt in sequenti Resolutione.

PROPOSITIO.

Quod supra dicebatur &c. Propositum sit inquirere Auctoris suprapositi Theorematis.

RESOLVTIO II.

QVoniam igitur est vt $c - a$, ad a, ita ℞ Q($b^2 \ast c^2$) ad b; ergo eorum quadrata proportionalia erut; quamobrem vt $c^2 - 2ca + a^2$, ad a^2, ita $b^2 + c^2$, ad b^2, hoc est vt rectangulum $c^2 - 2ca + a^2$, ad a^2, ita $c^2 \ast b^2$, ad b^2; & diuidendo vt rectangulum $c^2 - 2ca$, ad a^2, ita c^2, ad b^2, & permutando, vt rectangulum $c^2 - 2ca$, ad c^2, ita a^2 ad b^2, hoc est ob communem altitudinem c, vt $c - 2a$, ad c, ita a^2, ad b^2, & conuertendo vt c, ad $c - 2a$, ita b^2, ad a^2; & per conuersionem rationis vt c, ad $2a$, ita b^2, ad $b^2 - a^2$; & subduplatis consequentibus, vt c ad a, ita $2b^2$, ad $b^2 - a^2$; & conuertendo, vt a, ad c, ita $b^2 - a^2$, ad $2b^2$. Hinc

THEOREMA.

In omni circulo sumpto quouis arcu minori quam 45 grad. eiusque duplo; erit vt tangens arcus simpli ad tangentem arcus dupli, ita differentia inter quadratum radij, & quadratum tangentis arcus simpli ad duplum quadrati radij.

Fiat F O, æqualis B F.

QVoniam igitur est vt F G ad B F, ita A G ad A B; ergo vt quadratum F G, ad quadratum F B, ita quadratum A G ad quadratum A B, hoc est vt rectangulum B G O, plus quadrato F O, seu B F, ad quadratum BF, ita quadratum B G, plus quadrato A B, ad quadratum A B; & diuidendo vt rectangulum B G O ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; & permutando, vt rectangulum B G O ad quadratum B G, ita quadratum B F ad quadratum A B, hoc est ob communem altitudinem B G, vt O G ad B G, ita quadratum B F ad quadratum A B; & conuertendo, vt B G ad O G, ita quadratum A B, ad quadratum B F; & per conuersionem rationis vt BG ad BO, ita quadratum A B ad quadratum A B, minus quadrato B F, & subduplatis consequentibus vt B G ad BF, ita duplum quadratum A B ad quadratum A B, minus quadrato B F. & conuertendo, vt B F ad B G, ita quadratum A B, minus quadrato B F, ad duplum quadratum AB. Quod erat operæ pretium ostendere.

Hunc igitur in modum suprapositi Theorematis beneficio speciosæ Logistices Resolutio procedit iuxta præcepta iam tradita. Non erit autem inutile perpendere quid intersit inter hanc resolutionis formam, & antiquam, quam hic propterea subijcere non grauabimur.

Eiusdem Theorematis ab Auctore iuxtà Methodum antiquam instituitur.

RESOLVTIO I.

SEcetur F O æqualis ipsi F B.

Quoniam igitur est vt B F, ad B G, ita quadratum A B, minus
a Coroll. 4 qu. quadrato B F, ad duplum quadratum A B; ergo conuertendo [a] vt B G, ad B F, ita duplum quadratum A B, ad quadratum A B, minus quadrato B F; duplatis autem consequentibus, vt B G, ad B O, ita quadratum A B, ad quadratum A B, minus quadrato B F, & per cō-
b Coro. 19. qu. uersionem rationis [b] vt B G ad G O, ita quadratum A B ad quadra-
c Corol. 4 qu. tum B F; & conuertendo [c] vt GO, ad BG, ita quadratum BF, ad qua-
d 1. sexti. dratum A B, hoc est ob communem altitudinem B G, vt [d] rectangulum B G O ad quadratum B G, ita quadratum B F, ad quadratum
e 16. quintis A B; & permutando [e] vt rectangulum B G O ad quadratum B F, ita
f 18. quinti. quadratum B G ad quadratum A B; & componendo [f] vt rectangulū



BGO

B G O, plus quadrato B F, ad quadratum B F, seu O F, ita quadratum B G, plus quadrato A B, ad quadratum A B, hoc est, vt [g] quadratum F G ad quadratum B F, ita [h] quadratum A G, ad quadratum AB; ergo vt [i] F G, ad B F, ita A G ad A B. Quod ita se habet &c. Cum enim angulus G A B, sit [k] bifariam diuisus à recta A F, erit ex tertia sexti, vt G F ad F B, ita A G ad A B.

g 6. secundi. h 47 prim. i 22. sexti. k 21. tertij.

COMPOSITIO.

QVoniam igitur est [α] vt F G ad B F, ita A G ad A B; ergo vt quadratum F G ad quadratum B F, ita [β] quadratum A G, ad quadratum A B, hoc est vt [γ] rectangulum B G O, plus quadrato O F, seu B F, ad quadratum B F, ita [δ] quadratum B G plus quadrato A B ad quadratum A B; & diuidendo [ε] vt rectangulum B G O, ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; & permutando [ζ] vt rectangulum B G O ad quadratum B G, ita quadratum B F ad quadratum A B, hoc est ob communem altitudinem B G, vt G O, ad B G, ita [η] quadratum B F ad quadratum A B; & conuertendo [θ] vt B G, ad G O, ita quadratum A B, ad quadratum B F; & per conuersionem rationis, vt [ι] B G ad B O, ita quadratum AB, ad quadratum AB, minus quadrato BF; subduplatis consequentibus vt BG ad BF, ita duplum quadratum AB ad quadratum A B, minus quadrato B F; & conuertendo [κ], vt BF ad BG, ita quadratum AB, minus quadrato B F, ad duplum quadratum AB.

α 21. sexti. & 3. sexti. β 22. sexti. γ 6. secundi. δ 47. primi. ε 17 quinti. ζ 16. quinti. η 1. sexti. θ Corol. 4. qu. ι Coro. 19. qu. κ Corol. 4 qu.

Ex hactenus commemoratis Resolutionibus non erit operosum intelligere, qua ratione possit ad præceptum reuocari modus ineundi viam ad oblati Theorematis Resolutionem instituendam.

Vel enim Theorema datum fuerit, solumque desideretur demonstratio, vel proponitur inquirendum tantummodò quibusdam datis. Hæc autem diuersa esse, non semel superiùs inculcauimus vtcunque se res habeat, omnis progressus, siue sit ex hypothesi ad quæsitum, siue contra, vel procedit per terminos proportionales, æqualitate nunquam adhibita, vel per proportionalia ad æqualitatem deuenit, aut contra æqualitatem in proportionalia resoluit; illud est obseruandum Præceptum paulò infra à nobis allatum.

Aduertenda quædam

Quoniam verò resolutionem postremam speciosæ Algebræ beneficio institutam, postmodum aduerti affinem non nihil esse illi, quam vnus ex prædictis exhibuit, vt aliam attulisse videar, cui nullam hactenus similem obseruaui, placuit ob id nouam hanc subijcere.

Iisdem positis, ducatur F C parallela ipsi A G, & segmento C B, æqualis fiat C D, atque C B appelletur d, quanta erit C D; at A D erit b -- 2 d, & B F sit a, & B G erit $\frac{ba}{d}$.

QVoniam igitur F C est parallela ipsi A G, ob id angulus G A F æquabitur [a] angulo A F C; sed angulus G A F æqualis est angulo F A C, ex hypothesi propterea angulus F A C æquabitur angulo A F C; quare A C æquabitur [c] C F. Cum itaque A C sit b -- d, etiam C F, erit b -- d; tam igitur illius, quàm huius quadratum erit $b^2 - 2bd + d^2$, sed B F est a, & C B est d; quorum quadrata sunt a^2 & d^2, ergo C F quadratum erit $a^2 + d^2$, cui æquabitur $b^2 - 2bd + d^2$; vtrinque subtracto d^2, residua erunt [d] æqualia; ergo $b^2 - 2bd$, æquabitur a^2; sed $b^2 - 2bd$, est [e] excessus, quo b^2 superat 2 b d; ergo 2 b d, erit excessus, quo b^2, superat a^2; sed b^2, ad 2 b d, est [f] vt b ad 2 d; ergo b^2 ad excessum quo superat a^2, erit vt b, ad 2 d; ergo 2 b^2, ad eundem excessum erit vt 2 b, ad 2 d, seu quod idem est, erit vt b, ad d; sed vt b, ad d, ob parallelas, ita estq; $\frac{ba}{d}$ ad a; ergo 2 b^2, ad 2 b d excessum prædictum, erit vt $\frac{ba}{d}$ ad a; & conuertendo [h] vt a, ad $\frac{ba}{d}$, ita 2 b d, ad 2 b^2. Hinc

a 29. primi. b 1. ax. pri. c 6. primi. d 3. ax. primi. e 2. secundi. f 1. sexti. g 2. sexti. h Corol. 4 qu.

THEOREMA.

In omni circulo sumpto quouis arcu minori, quàm 45 graduum, eiusque duplo, erit &c.

DVcatur [†] F C parallela ipsi A G, seceturque [α] C D æqualis C B. Quoniam angulus G A F æqualis est angulo F A C, ex hypothesi; sed ob parallelas A G, C F, angulus G A F æqualis est [β] angulo A F C; ergo angulus A F C æquabitur [γ] angulo F A C; ergo A C æquabitur [δ] C F; ergo quadratum A C æquabitur quadrato C F. Sed quadratum A C æqua-

† 31. primi. α 3. primi. β 29. primi. γ 1. ax. pri. δ 6. primi.

ε 6. secundi. C æquale est, rectangulo B A D, plus quadrato D C; ergo quadratum CF æquabitur ζ re-
ζ 1. ax. pri. ctangulo B A D, plus quadrato D C; sed quadratum C F æquale est, quadratis B F, C B;
η 47 primi. ergo rectangulum B A D, plus quadrato D C, æquabitur θ quadrato B F, plus quadrato
θ 1. ax. pri. B C; sed quadratum C D æquatur quadrato C B; ergo reliquum rectangulum B A D,
æquabitur ι reliquo quadrato B F; sed rectangulum A B D est κ excessus, quo quadratum
ι 3. ax. pr. A B superat rectangulum B A D; ergo rectangulum A B D erit excessus, quo quadratum
κ 2. secundi. A B, superat quadratum B F. Sed quadratum A B, ad rectangulum A B D est λ vt A B ad
λ 1. sexti. B D; ergo quadratum A B ad excessum, quo superat quadratum B F, erit vt A B ad B D;
ergo duplum quadratum A B, ad eundem excessum, erit vt dupla A B, ad B D, seu quod
μ 2. sexti. idem est, vt simpla A B, ad simplicem C B, seu ob parallelas A G, C F, vt μ B G, ad B F;
ν Corol. 4. qu. ergo, & conuertendo, excessus quadrati A B, supra quadratum B F, hoc est quadratum A
B minus quadrato B F, ad duplum quadratum A B, erit vt B F ad B G.

Eiusdem Theorematis ab Auctore iuxtà Methodum antiquam instituitur.

RESOLVTIO II.

† 31. primi. DVcatur † F C parallela ipsi A G, fecetur que a C D æqualis C B.
a 3. primi. Quoniam igitur est quadratum A B minus quadrato B F, hoc est excessus quadrati
b Corol. 4. qu. A B supra quadratum B F ad duplum quadratum A B vt B F ad B G; ergo conuertendo b
c 3. sexti. duplum quadratum A B ad eundem excessum erit, vt B G ad B F, seu c ob parallelas A G,
C F, vt A B ad C B, seu quod idem est, vt dupla A B, ad B D; ergo quadratum A B ad ex-
cessum, quo id superat quadratum B F, erit vt A B ad B D; sed quadratum A B ad rectan-
d 1. sexti. gulum A B D est d vt A B ad B D; ergo rectangulum A B D, erit excessus, quo quadratum
A B superat quadratum B F; sed rectangulum A B D est excessus, quo quadratum A B su-
perat rectangulum B A D; ergo rectangulum B A D æquabitur quadrato B F; sed quadra-
tum C D æquatur quadrato C B ergo; rectangulum B A D plus quadrato D C æquabitur
e 2. axio. pri. e quadrato B F plus quadrato B C; sed quadratum C F æquale f est quadratis B F, C B;
f 47 primi. ergo quadratum C F æquabitur g rectangulo B A D, plus quadrato D C; sed quadratum
g 4. axio. pri. A C æquale est h rectangulo B A D plus quadrato D C; ergo quadratum A C æquabitur
h 6. secundi. quadrato C F; ergo A C æquabitur C F; ergo angulus A F C æquabitur i angulo F A C;
i 6 primi. sed ob parallelas A G, C F, angulus G A F æqualis est k angulo A F C; ergo angulus G
k 19 primi. A F æqualis erit l angulo F A C. Quod ita se habet ex hypothesi.
l 1. axio. pri.

COMPOSITIO.

DVcatur † F G parallela ipsi A G, fecetur que α C D, æqualis C B.
† 31 primi. Quoniam angulus G A F æqualis est angulo F A C ex hypothesi, sed
α 3. primi. angulus G A F æqualis est β angulo A F C; ergo angulus A F C æquabitur
β 19 primi. γ angulo F A C; ergo A C æquabitur δ C F; ergo quadratum A C æquabitur qua-
γ 1. ax. pri. drato C F; sed quadratum A C æquale est ε rectangulo B A D, plus quadrato D C; ergo
δ 6. primi quadratum C F æquabitur ζ rectangulo B A D, plus quadrato D C; sed quadratum C F
ε 6 secundi. æquale est η quadratis B F, C B; ergo rectangulum B A D, plus quadrato D C æquabitur
ζ 1. ax pri. θ quadrato B F, plus quadrato C B; sed quadratum C D æquatur quadrato C B; ergo re-
η 47. primi. liquum rectangulum B A D, æquabitur ι reliquo quadrato B F; sed rectangulum A B D
θ 1. ax. pri. est κ excessus, quo quadratum A B superat rectangulum B A D; ergo rectangulum A B D
ι 3. ax. primi. erit excessus, quo quadratum A B, superat quadratum B F. Sed quadratum A B ad rectan-
κ 2. secundi. gulum A B D, est λ vt A B ad B D; ergo quadratum AB ad excessum, quo superat quadra-
λ 1. sexti. tum B F, erit vt A B ad B D; ergo duplum quadratum A B, ad eundem excessum erit, vt
dupla A B ad B D, seu quod idem est, vt simpla A B, ad simplicem C B, seu ob parallelas A
μ 2. sexti. G, CF, vt μ B G ad BF; ergo & conuertendo ν excessus quadrati AB supra quadratum B F,
ν Corol. 4. qu. hoc est quadratum A B, minus quadrato B F, ad duplum quadratum A B, erit vt B F ad
B G.

Sit autem exemplum alterum, vt sequitur Theorema, quod Schooten ad eum, qui se-
quitur modum resoluit.

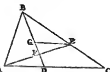
THEO-

THEOREMA.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit, & basin, rectangulum comprehensum sub segmentis baseos, vna cum quadrato rectæ secantis, æquale erit rectangulo sub trianguli lateribus comprehenso.

SIt B D æqualis b amplius, sit A B æqualis d, & A D æqualis sit c. Esto verò B C æqualis a, & D C æqualis e. Item D F, æqualis u.

Intelligatur B E æqualis facta A B, atque acta A E; intelligatur G E parallela ipsi A C. Quoniam igitur est A D ad D C, vt A B ad B C, est verò B E æqualis A B, ergo erit vt A D ad D C, ità E B ad B C; sed vt B E ad B C, ità B G ad B D, ergo vt A D ad D C, ità B G ad B D, itemque A B ad B C.



Ostendam autem B D in D C minus B D in A D applicatum ad duplum D C æquari D F, & quia propter similitudinem triangulorum A D F, F G E. Latus D F est æquale lateri F G, est enim latus A B æquale lateri B E, & angulus A B F, æqualis angulo F B E, ergo angulus AFB, æqualis erit angulo EFB, quare vterque rectus, at verò angulus G E F, æqualis est angulo F A D, ob parallelas GE, A D, quare reliquus æqualis reliquo, vnde similia sunt triangula, ob id vt E F ad F G, ità A F ad F D, & permutando vt E F ad A F, ita F G ad F D, est autem E F æqualis A F, ob id & D F erit æqualis F G; si itaque D F est u, vtique D G erit 2 u.

Quoniam est vt B G ad B D, ità A D ad D C, siue $b - 2u$ ad b, ità c ad e, propterea rectangulum sub B G, & D C æquabitur rectangulo sub B D, & A D, hoc est $be - 2eu$ æquabitur b c, vtrinque addito 2 e u fiet $be = 2eu + bc$, vtrinque sublato b c fiet $be - bc = 2eu$, omnibus applicatis ad 2 e fiet $\frac{be-bc}{2e} = u$; seu, quod idem est fiet, vt 2 e ad $e - c$, ità b ad u, nempè, vt dupla D C ad D C -- A D, ità B D ad D F.

Cùm autem duplum rectangulum B D F æquale sit quadrato A D, plus quadrato D B, minus quadrato A B, hoc est $2bu = c^2 + b^2 - d^2$, facta diuisione ex vtraque parte per 2 b prouenict $u = \frac{c^2+b^2-d^2}{2b}$ atqui superius inuentum fuit $\frac{be-bc}{2e} = u$, erit propterea $\frac{c^2+b^2-d^2}{b} = \frac{be-bc}{e}$ diuiso vtroque denominatore per 2 instituatur multiplicatio per crucem, & proueniet $c^2e + b^2e - d^2e = b^2e - b^2c$. addatur vtrinque d^2e fiet $c^2e + b^2e = d^2e + b^2e - b^2c$, tollatur vtrinque b^2e proueniet $c^2e = d^2e - b^2c$ addatur vtrinque b^2c, erit $c^2e + b^2c = d^2e$, loco autem ipsius de substituatur ca,* & proueniet $c^2e + b^2c = dca$, vtrinque facta diuisione per c fiet $ce + b^2 = da$.

* Est enim vt A D ad D C hoc est C ad E ita A B ad B C hoc est d ad a vnde c a æquatur d e

Adhibita verò cum sit multiplicatio per crucem ad intentum quo pacto conducat explicetur; liquet autem esse vt dupla D C ad D C minus A D, ita B D ad D F, hoc est vt 2 e ad $e - c$ ita b ad u; propterea fiet duplum rectangulum C D F æquale duplo rectangulo B D C minus rectangulo A D B, nempe $2eu = be - bc$.

Præterea vt est B D ad D C, ita duplum rectangulum B D F ad duplum rectangulum C D F; assumpta communi altitudine dupla D F, hoc est vt b ad e, ita 2 b u ad 2 e u; assumpta communi altitudine 2 u; ob id cum duplum rectangulum B D F æquetur quadrato A D plus quadrato D B minus quadrato A B, & duplum rectangulum C D F æquetur rectangulo B D C minus rectangulo A D B, hoc est $2bu = c^2 + b^2 - d^2$, & $2eu = be - bc$; erit vt B D ad D C, seu quadratum B D ad rectangulum B D C assumpta communi altitudine B D, hoc est b^2 ad b e assumpta communi altitudine b ita quadratum A D plus quadrato D B minus quadrato A B ad rectangulum B D C minus rectangulo A D B hoc est $c^2 + b^2 - d^2$ ad $be - bc$; proinde & reliquum quadratum A B minus quadrato A D ad reliquum rectangulum A D B, erit vt totum ad totum, seu B D ad D C; hoc est $d^2 - c^2$ ad b c; erit vt b ad c.

At verò vt B D ad D C ita pariter est rectangulum A D B ad rectangulum A D C assumpta communi altitudine A D, hoc est vt b ad e ita b c ad c e assumpta communi altitudine c, & vt B D ad A D ita quoque est rectangulum A D B ad quadratum A D assumpta communi altitudine A D; hoc est vt b ad c ita b c ad c^2; assumpta communi altitudine c, &

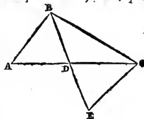
qua-

quadratum B D ad rectangulum A D B, hoc est b^2 ad bc; erunt propterea quadratum A B minus quadrato A D : rectangulum A D B : quadratum A D : hoc est $d^2 - c^2 : bc : c^2$ tres magnitudines ex vna parte; at vero quadratum B D : rectangulum A D B : rectangulum A D C : hoc est $b^2 : bc : ce$ tres aliæ ex altera parte, quæ binæ sunt acceptæ proportionales secundùm rationem perturbatam; quamobrem ex æqualitate secundum huiusmodi rationem proportionales erunt; atque adeo erit vt quadratum A B minus quadrato A D ad quadratum A D vt quadratum B D ad rectangulum A D C; hoc est vt $d^2 - c^2$ ad c^2 ita b^2 ad ce, & componendo vt quadratum A B ad quadratum AD, ita quadratum B D plus rectangulo A D C ad rectangulum A D C, hoc est vt d^2 ad c^2 ita $b^2 + ce$ ad ce; permutandoque vt quadratum A B ad quadratum B D plus rectangulo A D C, vt quadratum A D ad rectangulum A D C, hoc est vt d^2 ad $b^2 + ce$ ita c^2 ad ce, seu ita A D ad D C, nempe retenta communi altitudine A D idest c ad e, retenta communi altitudine c; at verò vt A D ad D C ita quoque est A B ad B C, hoc est c ad e, vt d ad a seu, quadratum A B ad rectangulum A B C hoc est d^2 ad de; propterea erit vt quadratum A B ad quadratum B D, plus rectangulo A D C, ita quadratum A B ad rectangulum A B C, hoc est vt d^2 ad $b^2 + ce$, ita d^2 ad da; ergo quadratum B D, plus rectangulo A D C æquabitur rectangulo A B C, hoc est $b^2 + ce$ æquabitur da.

THEOREMA.

Auctor iuxta Methodum Antiquam idem Theorema resoluit.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin; rectangulum comprehensum sub segmentis baseos vnà cum quadrato rectæ secantis, æquale erit rectangulo sub trianguli lateribus comprehenso.



ESto triangulum A B C, cuius latera A B, B C; basis autem A C, recta verò B D secet bifariam angulum A B C. Dico rectangulum A D C, plus quadrato B D, æquale esse rectangulo sub A B, & B C.

Protrahatur B D vsque ad E, vt sit quemadmodum B D ad D C, ità A D ad D E; agaturque E C.

RESOLVTIO.

QVoniam igitur rectangulum A D C, plus quadrato B D, est æquale rectangulo sub A B, & B C; est autem rectangulum A D C, plus quadrato B D, æquale rectangulo E B D, cum rectangulum A D C æquale sit rectangulo B D E; est enim vt B D ad D C, ita A D ad D E ex constructione; quadratum verò BD est commune; ergo rectangulum sub A B, & B C æquale erit rectangulo E B D. Quod ità se habet; triangulum enim A B D æquiangulum est triangulo D E C, angulus igitur A B D est æqualis angulo D C E, est autem angulus A D B æqualis angulo D C B, plus angulo D B C, seu D B A, hoc est D C E, ergo angulus A D B æquabitur angulo B C E, at verò angulus A B D est æqualis angulo E B C, quare reliquus æqualis est reliquo, ac ob id triangulum A B D est æquiangulum triangulo E B C, vndè latera circà æquales angulos erunt proportionalia, quare vt B C ad B E, ità B D ad A B; propterea rectangulum sub extremis A B, B C æquabitur rectangulo sub medijs E B, B D.

COMPOSITIO.

Quoniam rectangulum sub A B, & B C æquale est rectangulo E B D, vt ostensum est, in ipsa resolutione, rectangulum verò E B D æquale est rectangulo E D B plus quadrato BD, ergo rectangulum sub A B, & B C æquabitur rectangulo E D B plus quadrato B D. est verò rectangulum E D B æquale rectangulo A D C, ergo rectangulum sub A B, & B C æquabitur rectangulo A D C plus quadrato B D; quod erat operæ pretium ostendere.

Ex hactenus dictis obseruare licet, quid intersit inter antiquam, & nouam methodum: illa

illa siquidem, vt vidimus contrario resolutionis, hæc autem eodem ordine procedit; Illa à quæsito ad hypothesin, hæc verò contrario procedit modo.

De Problematibus Resoluendis Speciosæ Algebræ beneficio. Cap. VII.

ANalytica ferè omnis industria in Problematum resolutionibus insumebatur, cuius gratia ab ipsis hanc Artem fuisse in primis excultam, testatur Pappus Alexandrinus initio septimi Libri Mathematicarum Collectionum. Recentiores quoque de hac Matheseos parte videntur optimè meriti, cùm plura quidem adinuenerint: vnde facilis Problematum resolutiones redduntur, ad quod Speciosa Algebra conducit, etsi etiam Numerosa ad id non parum habeat momenti. *In cuius gratia instituta sit analitica.*

In Problematum resolutionibus iuxta huius Artis præcepta perficiendis, ita procedendum, vt supponamus iam factum quod quæritur, & per inde consequentia, tandem ad effectionem perueniamus. Rarò autem contingit nisi in Problematibus facilioribus, vt Analysis institui possit nulla præeunte præparatione, in quo fortassis omnis posita difficultas; Cùm enim hæc fuerit adinuenta, cætera ferè omnia se dant in conspectum. Ad præparationem autem, & ingenij alacritas, & in his Disciplinis cruditio, conducit. Primum naturæ quidem, secundùm verò studijs, vigilijsque acceptum referri debet. Non satis est enim operam nauasse primis Elementis, sed etiam oportet plurimas Propositiones inde deductas nouisse, ac propterea præ manibus habere figurarum cuiuscunque generis proprietates, à quibus Geometrica effectio ducit ortum. *In Problematibus resoluendis, quomodo procedendum.*

Duo autem in Problemate sunt, nempe Datum, ac Notum, & insuper Ignotum, atque Quæsitum. Quod autem quæritur ac ignotum est, per vocales denotare consueuimus, quod verò datum; ac notum, per consonantes. Quæstio autem proposita sedulo pependenda est, & magnitudines tam datæ, quàm quæsitæ iuxtà eius tenorem, ita tractandæ sunt, vt ratiocinando deueniamus ad id, quod fieri potest, vel nimirum ad analogismum trium terminorum, è quibus, qui postremò est loco sit quæsitus; duobus enim antecedentibus cognitis hic amplius non ignorabitur; vel ad analogismum quatuor terminorum, è quibus, qui postremum obtinet locum sit quæsitus; tribus enim prioribus cognitis, quartus prodibit &c. vel ad æquationem, siue simplicem, siue compositam, & vtraque siue plana sit, siue solida; quælibet enim Arte supra iam tradita feliciter explicatur, laterisque valor exhibetur. *Duo sunt in quocunque Problemate.*

Ex iam habita resolutione colligitur Porisma, quod nos docet, quidnam sit agendum; vt oblati Problematis effectio perficiatur, qua quidem absoluta, repetitis Analyseos vestigijs, quod constructum fuit Geometricè demonstramus. Sed hæc varijs exemplis illustrare tentabimus, à facilioribus exordientes.

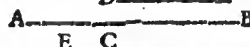
Aduertendum est autem postquam in resoluendo peruentum fuerit, vel ad analogismum, vel ad æquationem, opus esse diligenter inspicere qua linea sit opus ad oblati Problematis effectionem. Superius etenim huius tractationis initio iuxta diuersam Problematis naturam pro ipsius effectione diuersam quoque lineam adhibendam esse notauimus; quoniam videlicet fieri poterit, vt Problematis, de quo loquimur, natura proprietatem exigat, quæ non vni sed alteri cōueniat lineæ, vt exempli gratia huiusmodi potest esse problema, vt ad eius constructionem non sufficiant proprietates conuenientes circulo per lineam rectam diuiso, sed opus sit diuisione circuli per parabolen, vel per hyperbolen, vel vt requiratur vna ex sectionibus conicis diuisa per lineas rectas: vel etiam fortè aliqua alia linea consentanea Problematis naturæ, opus erit; Ita quidem superius inter duas datas rectas lineas duas alias in continua ratione medias adinuenimus beneficio circuli dissecti per parabolem; si quis porro contenderet illud idem assequi, vt incauti quidam è veteribus facere consueuerunt beneficio circuli dissecti per lineam rectam, grauiter in Arte peccaret, ignorans ipsius Problematis conditionem, quæ postulat pro sui effectione lineam longè diuersam. Sic præterea plani anguli trisectionem exhibuimus media hyperbole per lineam rectam diuisa circulo extrinsecùs accersito; si quis autem illud idem per rectam lineam dissecantem circulum comparare niteretur non exiguæ foret redarguendus inscitiæ, cum inde cuique constaret, haud ab ipso bene fuisse introspectam Problematis naturam, quæ pro sui *Notanda quædam pro resoluendis Problematibus.*

con-

constructione circulo diuiso per rectam lineam contenta non est.

Genus Problematum tripartitum. Quoniam autem tripartitum est Problematum genus. Aliud siquidem planum, nimirum illud quod per circulum, lineamque rectam resolui potest; aliud solidum, quod pro sui solutione conicas sectiones exposcit; aliud demum lineare, quod resolui non potest nisi per lineas magis compositas, vel saltem diuersas ab ipsis sectionibus conicis, cuiusmodi est Quadratrix, Conchoides, Cyssoides, Cycloides, Spiralis, quibus accedunt illæ si placet, quas proprio marte nos adinuenimus, & quidem multitudine plures vtilitate non spernendas, quas haud infelici omine Mediceas dixeramus.

Notandum. Instituta autem Analysi si peruentum fuerit ad æquationem solidam, ita tamen vt modis iam explicatis ad planam reduci possit, tunc nulli dubium quin Problema illud per circulum lineamque rectam resolui possit; secus autem si æquatio ad planam reduci nequeat; certum enim tunc omnino ad Problematis constructionem non sufficere circulum cum linea recta, sed opus esse, aut sectionibus conicis, aut aliquo alio lineæ genere longe diuerso à linea recta, & circulari. Sed vt hæc melius percipiantur, intelligamus resolutionem propositam ad æquationem esse deductam, in qua sit b -- d = 2 a, quæ quidem æquatio pertinet ad circulum; Hinc enim Porisma *Recta data minus excessu dato æqualis est duplo partis minoris*.



Si enim data recta sit A B secanda, vt pars maior, minorem superet excessu æquali datæ rectæ lineæ D. Constructio sic se habet. A recta A B auferenda est B C æqualis ipsi D: reliqua verò C A secanda bifariam in E; nam A E minor pars, & E B maior erit. Hæc tamen pro sui effectione circulum requirunt, vt ex Elementis perspicuum est; datis enim duabus rectis inæqualibus, vt à maiore segmentum æquale minori auferatur, opus est circulo.

Notanda quædam. Hic igitur diligenter est aduertendum, quando dicimus æquationem ad circulum pertinere nil aliud à nobis intelligi nisi quod ad exhibendam ignotam quantitatem, atque adeò quantitatem quæsitam opus esse circulo, vel saltem circulum sufficere, si tamen per rectam secetur, id enim semper subintelligendum, sed hic est operæ pretium aduertere, in quo nonnulli decepti sunt existimantes idem esse Problema resolui, per locum planum, ac per circulum recta linea dissectum; ad locum enim pertinet Problema locale, at non omne Problema locale est; propterea quod locus, vt supra nos docuimus est spatium illud, quod totum Problemati, vel Theoremati satisfacit: vnde dicebamus Theorema locale illud esse, exempli gratia, inter duas parallelas super eadem, vel æqualibus basibus constituta parallelogramma sunt inter se æqualia; totum enim illud spatium inter parallelas Problemati satisfacit. Sic etiam de alijs Theorematibus quæ localia dicuntur, nec aliam ob causam sic appellantur.

Problema locale. Non dissimiliter Problema locale dicetur; quando totum spatium nempe tota linea recta, tota linea circularis, tota parabolica &c. Problemati satisfacit; ita profectò se habet inter cætera Problema illud, quod ad calcem superioris Libri de Deductione tractantes attulimus in Exemplo ; tota enim illa circumferentia semicirculi Problemati satisfacit; & ità se habebant loca plana de quibus differuit Apollonius, & hac ratione datur locus ad lineam rectā, seu in linea recta, vel qui est in linea recta, datur locus, qui est parabola, siuo linea parabolica; sic datur locus, qui est hyperbola seu linea hyperbolica, item datur locus, qui est ellipsis, seu linea elliptica. Quando igitur locus est linea recta quodcunque punctum acceptum in ipsa recta linea problemati satisfacit; si verò fuerit in circuli circumferentia hæc ipsa Problemati satisfaciet; vtrouis modo se habeat locus dicetur planus, quod si locus fuerit parabolæ, hyperbole, vel ellipsis, locus dicetur solidus. Non idem est igitur Problematis effectionem ad locum pertinere planum, vel solidum, non idem est inquam, ac ad æquationem illam explicandam requiri lineam rectam, vel circularem; propterea quod nulla est Problematis effectio quamuis simplicissima, quę per lineā rectam tātummodo, circumferentia non accepta perfici possit, & nihilominus datur locus, qui est linea recta. Quando enim locus est linea recta non propterea effectio absolui potest circumferentia neglecta; si namque rectilineus angulus alteri angulo rectilineo fieri debet æqualis, vel recta, rectæ ducenda est parallela, quantumuis locus esse possit linea recta, non propterea id fine circulo potest absolui; & in hoc mihi videntur allucinati quamplurimi promiscuè hæc vsurpantes.

Si

Si tamen per locum aliquis intelligat lineam ipsam, quæcunque sit, licet non tota sed tantummodo punctum ipsius Problemati satisfaciet, admitti poterit modus ille loquendi, quod scilicet Problema dicatur solutum per locum planum, quando solutum fuerit per circulum cum linea recta; item per locum solidum, cùm constructio ipsius per Conicas sectiones absoluta fuerit. *Quo sensu admitti possit.*

Deinde si æquatio fuerit $ra - sa = bs$, quæ quidem pendet ab analogismo vt $r - s$ ad s, ita b, ad a: vnde Porisma. Vt differentia terminorum rationis datæ ad terminum minorem, ita est data ad adiunctam, qui quidem analogismus linea indiget recta cum circulo. *Exempla de æquationibus planis.*

Ita pariter si fuerit $ra + sa = sb - rb$, quæ quidem pendet ab analogismo vt $r + s$ ad $s - r$, ita b, ad a; hæc indigent linea recta cum circulo, & sic de similibus, nempè si fuerit vt $r + s$ ad s, ita b, ad a; item sit $2a^2$ æquetur b^2, vel sa^2 æquetur b^2; præterea si fuerit vt s ad r, ita b^2 ad a^2. Insuper vt $2r - s$ ad s, ita b^2, ad a^2; item vt $R(g^2 - d^2)$ ad $R(4b^2 + g^2 - d^2)$ ita d ad a.

Nec dissimili modo, cum æquationes fuerint affectæ intra planorum limites vt $a^2 + ba = z^2$; item $a^2 - ba = z^2$; præterea $ba - a^2 = z^2$; hæ omnes enim æquationes ad circulum pertinent, nempè huiusmodi sunt vt per circulum & lineam rectam ijs satisfieri possit.

At verò si fuerint æquationes $a^3 + 3b^2a = z$ sol., præterea $a^3 - 3b^2a = z$ sol. & $3b^2a - a^3 = z$ sol. eius sunt generis vt per circulum & lineam rectam absolui non possint, siquidem ad earum explicationem opus est trisectione anguli rectilinei. Insuper inuentione duarum mediarum in continua ratione, quæ per circulum cum linea recta præstari non possunt. Vnde Problemata solida nuncupantur quemadmodum, & æquationes ipsæ, quæ in huiusmodi Problematibus inuoluuntur. *Æquationes solidæ.*

Instituta igitur Analysi alicuius Problematis obseruare præstat qua nam sit opus linea ad effectionem ipsius, & quidem multoties non vna est, nam aliquando contingit, vt idem Problema resolui possit; atque adeo eius effectio perfici per conicas sectiones, & etiam per circulum. *Instituendi Problematis resolutionem quid obseruandum.*

Non rarò tamen contingit vt Problemati satisfieri possit per plures conicas sectiones in infinitum, & quidem eiusdem speciei, nempè parabolas, hyperbolas, vel ellipses, methodicè tunc proceditur inquirendo quænam æquationes ad constructionem Problematis conducant; fieri enim potest, vt ad id conducant æquationes pertinentes ad circulum, & ellipsim, vel ad circulum & parabolen &c.

Multoties autem euenit, vt instituta Resolutione, peruentum sit ad quantitates imaginarias, vel saltem ad solidas quantitates, inter quas detur æqualitas, ad cuius explicationem opus est Algorithmo in quantitatibus prædictis; hoc tamen terrere non debet Analystam, nam, vt inferius constabit, adhuc via Regia proceditur, in huiusmodi resolutionibus. Quod vt aliquo exemplo illustremus sit. *Quando peruentum est ad quantitates imaginarias, quid agendum.*

PROBLEMA.

Sit iniunctum quatuor quantitates Geometricè proportionales reperire, ita vt differentia quadratorum, quæ fiunt ab illis, sint in harmonica ratione.

INstituta Resolutione, tandem adhibita decenti antithesi, atque parabolismo, ad æquationem deuenitur: vnde colligitur Porisma, vt eligantur tres quantitates, quarum quadrata sint harmonicè proportionalia, & quadrato-quadratum minoris iungatur cum producto ex quadratis duorum minorum, summa diuidatur per quadratum maioris multatum minoris quadrato; hinc enim comparabitur quadratum minimi &c. Et nihilominus effectio Geometrica abstinet ab huiusmodi quantitatibus, quoniam id totum ad analogysmum inter plana, atque adeò latera reuocatur.

Item si proponatur

PROBLEMA.

Tres quantitates proportionales inæquales adinuenire, quæ cum alia quauis data, quadrilaterum circulo quidem inscriptibile, efficiant.

Exemplum alterum.

POst enim debitam reductionem secundùm Artis præcepta, ad æquationem illam deuenitur, ex qua Porisma deducitur, vt ex quadrato diametri datæ tollatur quadrati m quadrantis diametri, residuum verò ducatur in quadratum diametri, & ex producto auferatur duplum productum ex cubo quadrantis diametri in diametrum; reliquum verò diuidatur per quadratum diametri, quotientis capiatur dimidium, ex cuius quadrato subtrahatur quadrato-quadratum quadrantis diametri, residui latus quadratum supradicto detractum & additum dimidio dabit quadrata minoris, maiorisque lateris inscribendi. Et nihilominus in effectione Geometrica huiusmodi quantitates vitantur. Totum autem id ad analogismum reuocatur inter plana, atque adeo latera &c.

Præcepta pro Resoluendis Problematibus beneficio Speciosæ Algebræ varijs Exemplis illustrantur. Cap. VIII.

AVt enim æquatio simplex est aut affecta, & vtraque vel plana, vel solida.

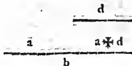
PRIMVM EXEMPLORVM GENVS
Ad quod Problemata pertinent Plana, in quibus simplex æquatio contingit.

PROBLEMA.

Exemplum I.

Propositum latus ità dispescere, vt maior pars minorem, dato superet excessu.

RESOLVTIO.

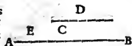


PRopositum sit latus b, diuidendum in duas partes, quarum maior, minorem superet dato excessu d; Sit iam factum, atque pars minor esto a; ergo maior erit a ✠ d; hoc enim pacto pars maior minorem superabit excessu dato d; & quoniam hæ sunt partes totius b: propterea earum summa debet æquari b; quare 2 a ✠ d (hæc enim est summa consurgens ex a, & a ✠ d) debet æquari b; Cùm igitur sit 2 a ✠ d = b − d ergo $\frac{b-d}{2}$ = a. Hìc autem sistendum siquidem datæ magnitudines ex vna æquationis parte existunt, ex alia verò quantitas quæsita. Hinc deducitur.

PORISMA.

Propositum latus multetur excessu dato, nam residuum bisectum, maiorem partem exhibebit:

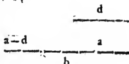
COMPOSITIO.



PRopositum sit latus diuidendum AB, & quidem in duas partes, quarum excessus sit D; abs A B auferatur BC æqualis ipsi D; & reliqua A C bifariam diuidatur in E: nam A E pars erit minor; reliqua verò E B maior. Quoniam enim A E, E C sunt æquales, proinde E B excedet A E excessu C B; sed C B, est æqualis D; ergo E B excedit A E excessu D; sed A E, E B conficiunt A B latus propositum; ergo diuisum est propositum latus A B, in duas pertes prout Problema requirit.

ALIA

ALIA RESOLVTIO.

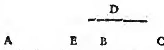


Pars maior esto a; ergo minor erit a – d; tota proinde erit 2 a – d, sed eadem est data b; ergo 2 a – d æquabitur b; & per antithesin fiet 2 a ⩵ b + d; quare facto parabolismo $\frac{b+d}{2}$ æquabitur a. Hinc

PORISMA.

Proposito lateri diuidendo addatur data differentia, nam aggregati dimidium maiorem partem exhibebit.

COMPOSITIO.



Propositum sit latus diuidendum A B, data verò differentia D; protracta A B in C, ita vt B C sit æqualis D: atque tota A C bissecetur in E, nam A E erit pars maior, minor autem reliqua E B. Quoniam enim A E, E C sunt æquales, quanto excessu ipsa E C superat E B, tanto quidem eandem E B superabit A E; sed E C superat E B excessu, qui est æqualis ipsi D; ergo A E superabit E B eodem excessu D; sed A E, E B conficiunt propositum latus; ergo illud diuisimus, vt Problema requirit.

SCHOLION.

Hoc idem in planis siue superficiebus, & solidis locum habet. Vt Propositum sit b pl. diuidendum in duas partes, quæ dato d pl. differant. Pars minor esto a pl. ergo maior erit a pl. † d pl. harum aggregatum est 2 a pl. † d pl. quod æquabitur b pl.; & per antithesin 2 a pl. æquabitur b pl. – d pl. ergo a pl. ⩵ $\frac{b\,pl.-d\,pl.}{2}$. Cæterùm vt quantitates veluti determinatæ tractentur b pl. intelligi debet redactum ad quadratum, item & d pl. unde, & a pl.; quare fit a ⩵ $\frac{b-d}{2}$ & hinc elicitur Porisma.

Non ignorandum tamen hoc idem Problema alia ratione concipi posse; perinde enim est, ac illud proposuisse.

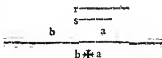
Data differentia laterum, & aggregato eorundem, reperire latera.

Estque Zeteticum primum Primi Libri apud Vietam, vbi laterum aggregatum idem est, quod latus propositum diuidendum, cuius quæsitæ partes sunt quæsita latera, & partium excessus est laterum quæsitorum differentia.

PROBLEMA.

Proposito lateri latus adiungere, vt datum cum adiuncto, ad adiunctum datam habeat rationem. Oportet autem rationem datam esse maioris ad minus. Exemplum II.

RESOLVTIO.



Propositum sit latus b, cui sit adiungendum alterum, vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem vt r ad s.

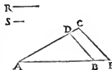
Sit iam factum, & latus adiungendum esto a; ergo aggregatum ex dato, & adiuncto erit b + a; at iuxtà quæstionis tenorem, vt r ad s, ita debet esse b + a, ad a; ergo diuidendo, vt r – s ad s, ita b ad a; tribus autem terminis datis, quartus nequit ignorari. Hinc

PORISMA.

Vt differentia terminorum data rationis ad terminum minorem, ita latus datum ad adiunctum fieri debet.

COMPOSITIO.

Propositum sit latus A B, cui sit adiungendum alterum, ita vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem R ad S, maioris ad minus; Constituatur A C faciens cum AB quemlibet angulum C A B, & ipsa quidem A C fiat æqualis R: mox verò secetur D C æqualis S, ita vt differentia terminorum R, & S, sit A D: agatur DB, cui fiat parallela C E. Dico B E esse latus adiunctum ipsi A B, ita vt A E ad B E, sit vt R ad S. Quoniam enim D B, C E sunt parallelæ; ergo vt A D ad D C, ita A B ad B E; quare componendo vt A C ad D C, ita A E ad BE; sed vt A C ad D C, ex constructione, ita R ad S; ergo vt R ad S, ita A E ad B E. Lateri igitur proposito A B adiunximus latus B E, ita vt datum cum adiuncto ad adiunctum datam habeat rationem. Quod facere oportebat.



MONITVM.

Aduertendum est quando in ipsa resolutione nos incurrimus in terminos plures proportionales, ita vt quæsitæ magnitudines à datis magnitudinibus, vt in superiori resolutione, non separentur, tunc adhibenda est cura pro separatione, quod diuidendo perficitur.

Non rarò contingit, vt æquatio, compositionem, siue affectionem præseferat, & tamen simplex æquatio est vt in sequenti Problemate.

SCHOLION.

Superius Problema hunc etiam in modum enunciari potuisset:

Data differentia duorum laterum, & ratione eorundem, reperire latera.

Differentia siquidem laterum est latus datum cui fieri debet additio latusque maius è duobus quæsitis est datum cum adiuncto at verò minus est ipsum adiunctum. Vt itaque vides hoc in idem recidit cum illo.

PROBLEMA.

Exemplum III. *Propositum latus A B vtcunque diuisum in C, ita protrahere ad D, vt rectangulum A D B, quadrato C D sit æquale.*

RESOLVTIO.

Sit iam factum, & pars A C dicatur b: at C B sit c: latus adiungendum B D esto a; itaque A D erit b + c + a; & C D, erit c + a, rectangulum A D B sub latere dato cum adiuncto & adiuncto, nempe sub b + c + a, & a, erit b a + c a + a^2; At quadratum ex C D erit c^2 + 2 c a + a^2; huic autem æquari debet prædictum rectangulum. Vtrinque auferatur a^2 similia siquidem tanquam superflua sunt reijcienda, & remanebunt b a + c a = c^2 + 2 c a. Vtrinque auferatur c a, & fiet b a = c^2 + c a; vtrinque auferatur c a, vt nota quantitas c^2 constituat vnam æquationis partem, cui altera comparatur, & fit b a - c a = c^2; cùm autem per repetitam antithesin ad hanc æquationem peruentum erit instituatur parabolismus per b - c, nam inde quidem emerget æquatio $\frac{c^2}{b-c}$ = a. Vnde resoluta æquatione in analogismum vt suo loco docuimus, fit vt b - c, ad c, ita c, ad a. Hinc

PO-

PORISMA.

Fiat vt differentia segmentorum A C, C B ad C B, ita C B ad aliud; hoc enim erit latus adiungendum.

COMPOSITIO.

Secetur E C æqualis C B, & fiat vt reliqua A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D. Dico rectangulum A D B æquale esse quadrato C D.

A———————————D
E C B

Quoniam igitur est vt A E ad E C, vel C B, ita C B ad B D, ex constructione; reuocata proportione ad æqualitatem, rectangulum sub A E, B D, æquabitur quadrato C B, vtrinque addito rectangulo sub E C, vel C B, & B D; ergo rectangulum sub AC, & B D, æquabitur rectangulo sub C D, & C B. Rursus addito vtrinque rectangulo sub C D, & DB, ergo rectangulum sub A D, & D B, hoc est rectangulum A D B æquabitur quadrato C D. Quod facere oportebat.

S C H O L I O N.

Ex dictis facile intelliges Analyseos præsidio constare conditionem Problemati præfigendam, sine qua Problemati fieri satis non potest, nam ex datis quæsitum inueniri nequit; debet enim A C, maior esse ipsa C B, vt ex A C subtrahi possit B C; hæc enim subtractio ad huiusmodi Problematis solutionem requiritur; & quidem si A C foret æqualis vel minor quam C B, Problema foret impossibile; nam AC cum fuerit æqualis ipsi C B, non poterit rectangulum A D B æquale esse quadrato C D: nam A B foret bifariam diuisa in C, eidemque adiecta B D; atque adeo rectangulum A D B, vnà cum quadrato C B per sextam secundi æquale esset quadrato C D; solum igitur rectangulum A D B, non posset esse æquale quadrato C D, sed minus, & multo minus etiam si A C supponeretur minor quam C B, vt constat. Notandum.

Sed aliter per proportionalia procedendo sic instituetur secunda Resolutio.

RESOLVTIO.

Quoniam igitur b a † c a † a^2 æquatur c^2 † 2 c a † a^2 ergo reuocata æqualitate ad proportionem, erit vt b † c † a ad c † a, ita c † a ad a; ergo diuidendo, vt b ad c † a, ita c ad a; ergo permutando, vt b ad c, ita c † a ad a; ergo diuidendo, vt b -- c ad c, ita c ad a. Hinc

A———————————D
C B

PORISMA.

Fiat vt differentia segmentorum propositæ lineæ ad lineæ segmentum minus, ita huiusmodi segmentum ad aliud; hoc enim erit, quod quæretur.

COMPOSITIO.

Sit proposita recta A B, cui fieri debeat additio &c. cum autem ipsa supponatur secta in C fiat, vt A E differentia segmentorum A C, C B ad C B, ita C B ad aliam B D; Dico B D problemati satisfacere. Quoniam enim est, vt A E ad E C seu C B, ita C B ad B D; ergo componendo vt AC ad C B, ita C D ad B D, ergo permutando erit A C ad C D, ita C B ad B D, ergo componendo vt A D ad C D, ita C D ad B D, & reuocata proportione ad æqualitatem rectangulum sub A D & B D hoc est rectangnlum A B D, æquabitur quadrato C D. Quod facere oportebat.

b c a
A E C B D

Con-

Conspectus prioris Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis
$ba + ca + a^2 = c^2 + 2ca + a^2$,
Vtrinque auferatur a^2.
$ba + ca = c^2 + 2ca$,
Vtrinque auferatur ca.
$ba = c^2 + ca$.
Vtrinque auferatur ca
$b - a - ca = c^2$.
Instituto parabolisma fit
$\frac{c^2}{b-a} = a$. ergo
Reuocata æquatione ad proportionem
Vt b c ad c ita c ad a.
Finis Resolutionis.

Finis Compositionis
seu ADB = quadrato CD
ACBD + CBD + quad BD = quad: CB + 2 CBD + quad BD
Vtrinque addatur quadratum BD.
ACBD + CBD = quadr. CB + 2 CBD.
Vtrinque addatur CBD.
ACBD = quadrato CB + CBD.
Vtrinque addatur CBD
ACBD -- CBD = quadrato CB.
Reuocata proportione ad æqualitatem
Vt AE ad EC vel CB ita CB ad BD.
Principium Compositionis.

Conspectus secundæ Resolutionis, atque Compositionis.

Initium Resolutionis.
$ba + ca + a^2 = c^2 + 2ca + a^2$
Reuocata æqualitate ad proportionem
Vt $b + c + a$ ad $c + a$ ita $c + a$ ad a,
diuidendo
Vt b ad $c + a$ ita c ad a.
permutando
Vt b ad c ita $c + a$. ad a
diuidendo
Vt $b - c$ ad c ita c ad a.
Finis Resolutionis.

Finis Compositionis.
seu ADB = quadrato CD.
AC, BD + CBD + quad: BD = quad. CB + bis CBD + quad. BD
Reuocata proportione ad æqualitatem
Vt AD ad CD ita CD ad BD.
componendo
Vt AC ad CD ita CB ad BD.
permutando
Vt AC ad CB ita CD ad BD
componendo
Vt AE ad EC seu CB ita CB ad BD.
Initium Compositionis.

Superius Problema fuit propositum de proportione æqualis ad æquale; præclarius foret si proponeretur vniuersaliter de quacunque ratione, videlicet.

Propositum latus AB, vtcunque diuisum in C, ita protrahere ad D, vt rectangulum ADB, ad quadratum CD, datam habeat rationem.

Problema.

Exemplum V.

Propositum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum sub partibus ad quadratum differentiæ partium datam habeat rationem.

RESOLVTIO.

Datum sit latus diuidendum $2b$, proportio verò data sit vt r ad s. Pars vna est $b + a$, alia erit $b - a$, ita vt differentia partium sit $2a$, rectangulum verò sub partibus erit $b^2 - a^2$: quadratum differentiæ partium erit $4a^2$; vt autem est r, ad s, ita debet esse $b^2 - a^2$, ad $4a^2$, seu vt $4r$, ad s, ita $b^2 - a^2$, ad a^2; & componendo erit, vt $4r + s$ ad s, ita b^2 ad a^2. Hinc deducitur.

R
S
2 b
b + a   b − a

PORISMA.

Vt est quadruplum primi termini plus termino secundo ad ipsum terminum secundum, ita est quadratum dimidij lateris diuidendi, ad quadratum dimidiæ differentiæ partium.

COM-

COMPOSITIO.

DAtum sit latus A B diuidendum, vt Problema iubet; dataque sit ratio, vt L ad K; a puncto A ducatur linea ad partes B, faciens angulum quemcunque cũ A B, & ex ipsa abscindatur A G, quadrupla termini primi L, ita vt F G sit æqualis L, & A F sit tripla ipsius F G. Deinde fiat G H segmentum æquale ipsi K, duplicetur G H segmentum in E, & super A E describatur semicirculus A I E: mox à puncto H excitetur [a] perpendicularis H I, cui fiat [b] æqualis H D, & A B diuidatur [c] bifariam in M, ducaturque H M, cui [d] à puncto D agatur parallela D C; & NM [e] fiat æqualis ipsi M C; erit autem N C differentia partium A C, C B; siquidem ab æqualibus A M, M B, auferuntur æquales N M, M C; ideo A N, C B sunt æquales; quare A C, C B, differunt per N C; & factum est quod Porisma iubet.

a 11. primi.
b 3. primi.
c 10. primi.
d 31. primi.
e 3. primi.

Nunc ad demonstrationem accedamus, quam per Analyseos filum deducemus.

Quoniam vt est [f] A H ad H E, seu G H, ita etiam quadratum ex A M dimidia totius diuidendæ A B, ad quadratum ex M C, dimidia differentia partium A C, C B, erit [g] diuidendo vt A G, ad G H, seu H E, ita quadratum ex A M, minus quadrato ex M N, ad quadratum ex M N, seu vt F G ad G H, ita quadratum A M, minus quadrato M N, ad quadratum M N quater. At verò quadratum ex A M minus quadrato ex M N, æquale est rectangulo sub partibus A C, C B, & quadratum quater ex dimidia differentia N M, est æquale totius differentiæ N C, quadrato; ergo vt est F G ad G H, ita erit rectangulum A C B, nempe rectangulum sub partibus ad quadratum differentiæ partium N C; sed F G est ad G H, vt L, ad K, itaque secta est A B, in C, vt Problema postulat &c. Quod oportebat &c.

f Cor. 20. sexti
g 17. quinti.

Est enim vt A H ad H D seu H I ita A M ad M C; vnde vt quad. A H ad quad. H I, atq; adeo vt A H ad H E ita quadr. A M ad quadr. M C.

Exemplum V.

Problema.

In dato triangulo E G C, quadratum inscribere.

Hoc antiquum Problema est ab alijs solutum, nos tamen alia via resolutionem, compositionemque instituemus.

RESOLVTIO.

CAdat C K perpendicularis ad E G, & appelletur b; segmentum autem E K nuncupetur d: & segmentum K G esto f: at verò segmentum C M esto a; ergo M K, erit b-a. Vt autem est C K ad K E, ita C M ad M N; vt itaque b, ad d, ita fiat a, ad aliud, illudque erit $\frac{da}{b}$, quod æquabitur ipsi N M. Rursus vt C K, ad K G, ita C M ad M L; quamobrem erit vt b, ad f, ita a, ad $\frac{fa}{b}$, & ita $\frac{fa}{b}$ æquabitur M L. Quapropter erit æquatio huiusmodi $\frac{da}{b} + \frac{fa}{b} = b - a$; atque adeo $da + fa$ æquabitur $b^2 - ab$: & per antithesin $da + fa + ab$ æquabitur b^2; quæ quidem æquatio si ad proportionem reuocetur, erunt proportionales hi termini, nimirum d † f † b . b . a.

Hinc autem deducitur.

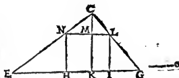
PORISMA.

Sumatur linea, quæ sit æqualis basi trianguli dati plus perpendiculari cadente à vertice ipsius, & fiat vt hoc aggregatum ad lineam perpendicularem iam dictam, ita hæc ad aliam; hæc

enim

enim tertia proportionalis, erit radicis pretium, atque differentia inter perpendicularem, & latus inscribendi quadrati.

COMPOSITIO.



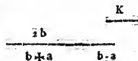
DAtum sit triangulum E G C, in quo quadratum describere oporteat.

Sumatur E O, ita vt sit æqualis basi E G, plus C K perpendiculari; & fiat vt E O ad C K, ita C K ad C M; erit proinde rectangulum sub E O, & C M æquale quadrato ex K C; & quia G O, C K sunt æquales, erit rectangulum sub C M, & G O, æquale rectangulo K C M; quo vtrinque sublato erit rectangulum sub E G, & C M æquale quadrato ex C K, minus rectangulo K C M; ergo rectangulum sub E G, C M æquale erit rectangulo C K M; Vt igitur E G ad C K, ita M K ad C M, & vt E G ad C K, ita N L ad C M; ergo N L est æqualis M K, vel N H; est itaque H L quadratum ex H I, quæsitum. Descripsimus itaque quadratum in proposito triangulo. Quod facere oportebat.

Exemplum VII.

Problema.

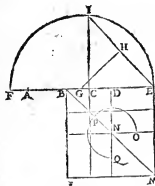
Data summa duorum laterum, & differentia quadratorum ab ipsis, reperire latera, seu datum latus diuidere &c.



PRopositum latus diuidendum, vel summa laterum sit 2b; & recta k possit differentiam quadratorum. Differentia laterum sit a; pars vna, vel vnum ex lateribus erit b + a; aliud b - a, adeo vt simul faciant 2b; differentia quadratorum est 4 b a; hæc autem æquabitur k^2. Itaque proportionales erunt b. K. 4 a. Hinc

PORISMA.

Sume dimidium lateris diuidendi, vel summæ laterum; deinde rectam, quæ potest quadratorum differentiam; his autem tertia reperiatur proportionalis; hæc enim quadruplum erit differentia partium, vel laterum quæsitorum.



DAtum sit latus diuidendum A E, secetur bifariam in C, ad punctum C excitetur perpendicularis C I, quæ possit differentiam quadratorum partium: agatur EI, quæ bifariam secetur in H; hinc agatur HG ad rectos angulos secans AE, in G (necessario occurret ipsi AE, vt aliàs dictum est) centro G, interuallo GE, describatur circulus, qui necessariò transibit per I, cũ ducta GI, GE, sint æquales, & peripheria secet E A protractam in F; secetur autem F C in quatuor æquales partes, quarum vna sit B C; Dico quæsitas lateris partes esse A B, B E, adeò vt quadrata istarum partium differant quadrato ex C I. Secetur C D æqualis ipsi C B, & erit D E æqualis A B; constituatur figura vt vides facto B L M E quadrato super B E; quadratum B M, differet à quadrato NM, seu quadrato ex DE, hoc est quadrato ex A B per gnomonem O P Q, seu per quadruplum rectangulum E C B, hoc est per rectangulum E C F; sed hoc rectangulum est æquale quadrato ex CI; ergo diuisum est latus A E, in puncto B, quemadmodum Problema

ma iubet. Manifestum est autem rectam, quæ potest planum datum debere esse minorem ipsomet latere diuidendo; quod animaduertisse oportet pro conditione propositi resoluendi Problematis.

Secundum Exemplorum genus, ad quod pertinent illa Problemata, in quorum Resolutionibus æquationes affectæ intercedunt, non trascendentes tamen Planorum Limites.

Sequitur agendum de Problematibus illis, quorum resolutio æquationes affectas exposcit; sit igitur

Problema.

Dato rectangulo sub lateribus, & differentia laterum, inuenire latera. Exemplum 1.

RESOLVTIO.

DAta sit laterum differentia b, & rectangulum esto z^2; latus minus esto a, maius erit b + a ducatur b + a in a, fit $ba + a^2 = z^2$, explicata æquatione fiet vnius radicis pretium ℞ $(\frac{1}{4}b^2 + z^2) - \frac{1}{2}b$. Hinc



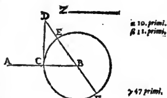
PORISMA.

Quadrato dimidij data differentiæ addatur planum, & huius aggregati lateri subtrahatur dimidium differentiæ, residuum enim erit latus minus; vnde maius non latebit.

COMPOSITIO.

DAta sit differentia laterum A B; planum autem, cui æquale est rectangulum, sit Z, quad., seu quadr. ex C D; α secetur A B bifariam in C, & ex puncto C, β excitetur perpendicularis C D, agatur D B, modo centro B, interuallo B C describatur circulus secans B D in E; protrahatur D B ad F; & factum erit, quod Porisma iubet. Quadrato siquidem ex C B dimidio differentiæ datæ, addidimus quadratum ex C D; etenim D C B angulus rectus est; ac proinde quadratum ex B D æquale γ erit quadratis ex C D, C B. & ab ipso latere D B abstulimus B E dimidium differentiæ; at protracta D B ad F, additur E D, ipsi E F, quæ est differentia æqualis datæ A B. Dico latus minus esse E D, & maius D F. Quoniam enim D C δ tangit circulum in C, ε erit rectangulum F D E æquale quadrato C D, seu Z quadr. Latera verò E D, D F, differunt per E F, hoc est A B, inuenimus ergo latera &c. Quod facere oportebat.

α 10. primi.
β 11. primi.
γ 47 primi.
δ Cor. 16. tert.
ε 36. tertij.

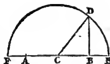


RESOLVTIO II.

Vel latus vnum esto a, aliud erit a + b, nempè latus maius; quamobrem $a^2 + ba = z^2$; atque adeo a + b, z, a, erunt proportionalia. Dato autem medio è tribus lateribus proportionalibus, & differentia extremorum dantur latera.

COMPOSITIO.

a 10. primi. ß 11. primi. SIt enim differentia A B, a secetur bifariã in C; sit recta B D ß perpendicularis media inter duas, quarum differentia A B, ducatur C D, modo centro C interuallo C D describatur periferia in E, F vtrinque ipsam A B productam secans; erit F B latus maius, vt B E minus, medium autem B D. Quoniam igitur F A, & B E, sunt æquales, est itaque A B differentia laterum, & rectangulum F B E, γ æquale quadrato ex B D; factum est igitur quod oportebat. Inuenimus enim latera F B, B E, quorum differentia est A B data, & rectangulum F B E æquale est dato plano, scilicet quadrato ex B D &c.



γ Ex constructione.

PROBLEMA.

Exemplum 11.

Propositis duobus lateribus, alterum ita diuidere, vt rectangulum sub indiuiso, & altero segmentorum diuisi, ad quadratum reliqui segmenti datam habeat rationem.

d ——
r ——

b
a   b — a

PRopositum latus esto b; diuidendum quidem alterum sit d; ratio vt d ad r. Pars vna sit a, alia erit b — a, hoc modo simul sumptæ conficiunt b; si verò b — a, ducatur in d, producetur d b — d a; & erit d b — d a, ad a^2, vt d ad r; ob id fiet æquatio huiusmodi d b r = d a^2. Instituto parabolismo, nimirum omnibus diuisis per d, fiet æquatio huiusmodi b r — r a = a^2; & per antithesin a^2 + r a = b r. Reperiatur media proportionalis inter b, & r, sitque illa z, cuius quadratum z^2. Itaque erit a^2 + r a = z^2, cuius ℞ Q erit ℞ Q($\frac{1}{4}r^2$ + z^2) — $\frac{1}{2}$ r.

Possumus etiam deuenire in notitiam ℞ Q huius æquationis, si habito rectangulo sub extremis, & differentia extremarum, reperiamus extrema atque adeo sint a † r. ℞ Q(b r;) a. termini proportionales. Hinc

PORISMA.

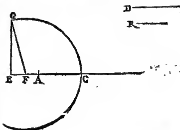
Inter totum latus diuidendum, & secundum terminum datæ rationis reperiatur latus medio loco proportionale; Deinde quadratum dimidij secundi termini addatur quadrato lateris tam dicti, & ex aggregati latere auferatur dimidium prædictum, nam reliquum erit radix, quæ sit a &c. Vel fiat quod potest rectangulum sub latere secto, & sub secundo termino datæ rationis, latus medio loco proportionale inter extrema, quorum differentia sit terminus idem secundus rationis datæ.

COMPOSITIO.

DAta sint duo latera, quorum vnum A B, alterum D, & illud ita sit diuidendum, vt rectangulum sub D indiuiso, & segmentorũ vno diuisi, ad quadratum alterius segmenti sit vt D ad R.

a 10. primi. ß 11. primi. Sumatur E A, quæ sit æqualis datæ R, bifariam a diuidatur in F; modo ß excitetur E G, quæ possit rectangulum sub A B, & R: ducatur G F; centro F, interuallo F G describatur circulus secans datum latus diuidendum A B, in C. Dico rectangulum sub C B, & D, esse ad quadratum ex A C altera parte, vt D ad R. Quoniam igitur rectangulum E C A, hoc est A C quadratum, plus rectangulo C A E, æquale est E G quadrato, hoc est rectangulo sub A B, & R, hoc est rectangulo E A B; per antithesin rectangulum E A B, minus rectangulo E A C, hoc est rectangulum sub E A, & C B, æquale erit A C quadrato. Sed rectangulum sub D, & B C, γ est ad rectangulum sub B C, & E A, vt D ad E

γ 1. sexti.



A, hoc

A, hoc est vt D ad R; ergo rectangulum factum, sub D, & C B, est ad quadratum ex A C, quòd erat æquale rectangulo sub E A, & C B; erit, inquam, vt D ad R. Quod facere oportebat. Diuisum est igitur latus datum A B in puncto C sic, vt rectangulum sub vna parte C B comprehensum, & sub dato latere D, ad quadratum alterius partis A C, habet datam rationem, vt D ad R. Quod facere oportebat. 7 quinti.

Aliter eidem Problemati satisfaciemus.

DAta sint latera A B, B D, & oporteat, exempli gratia, diuidere B D, ea lege vt rectangulum sub insecto latere A B, & segmento vno lateris B D ad quadratum alterius segmenti eiusdem B D, datam habeat rationem vt A B ad D E. Inter B D, D E reperiatur latus z, medio loco proportionale, erit quidem quadratum ex z æquale rectangulo sub B D, D E. Deinde habito quadrato ex z; & differentia extremorum laterum D E, reperiantur extrema, quorum maius sit CE: minus autem C D.



α 13 sexti. β 17 sexti.

Quoniam igitur quadratum ex z, vel rectangulum B D E æquale est rectangulo E C D, ex constructione; si commune subtrahatur rectangulum C D E, remanebit rectangulum sub B C, D E, æquale quadrato ex C D; sed rectangulum A B C, est ad rectangulum sub B C, D E, vt A B ad D E; ergo rectangulum A B C, erit ad quadratum C D, vt A B ad D E. Quod facere oportebat. γ 1. secundi. δ 1. eiusdem. ε 1. sexti. ζ 7 quinti.

Problema.

Propositum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum sub ipsis æquale sit plano facto ex differentia partium in latus aliud datum. Exemplum. III.

RESOLVTIO.

PRopositum sit latus b diuidendum in duas partes, vt rectangulum sub ipsis æquale sit plano facto ex differentia partium in aliud datum latus d. Pars vna esto a, alia erit b − a: rectangulum sub his est b a − a²; & quoniam b = 2 a est differentia partium, si hæc ducatur in d, fiet productum, quod æquabitur ipsi b a − a²; productum autem istud est b d − 2 d a; proinde fiet æquatio huiusmodi, nimirum b a − a² = b d − 2 d a; & per Antithesin fiet b a ✱ 2 d a, seu b a † 2 d a − a² = b d; huius autem æquationis radix eruetur iuxta Artis præcepta; in qua quidem extractione per b ✱ 2 d, nos intelligamus g, quod hic liberum sit magnitudines ad libitum nominare, ad confusionem euitandam; atque adeò fiet ½ g − ℞ Q(¼ g² − b d) & erit pars minor. Hinc,

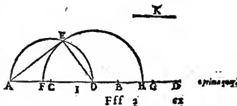
b d
a b−a

PORISMA.

Ad latus diuidendum addatur duplum alterius dati; & hoc aggregatum bisecetur; ab eius autem quadrato subducatur rectangulum factum à datis lateribus; nempè à diuidendo, & ab altero: residui sumatur latus, quod si subtrahatur ab illo dicto dimidio, habebitur pars minor lateris diuidendi: vnde maior non latebit.

COMPOSITIO.

PRopositum sit latus diuidendum A B; sitque latus alterum K: oporteat diuidere vt imperatum est. Producatur A B vsque ad D, sic vt B D sit dupla ipsius K, adeo vt B G, G D sint æquales vni K, & B D dupla ipsius. Tota verò A D diuidatur bifariam in O, & super A O describatur semicirculus A E O, in quo accommodetur A E, quæ possit rectāg. sub AB, & K, ducatur OE, quæ poterit differ. inter quad. a prima quart.



ex A O, & A E; centro O, interuallo O E describatur circulus E F H, secans D A in F. Dico AF partem esse minorem dati lateris A B, & F B, maiorem; adeo vt rectangulum sub A F, F B sit æquale rectangulo sub differentia istarum partium, & data recta K. Secetur B I æqualis A F, & erit F I differentia partium A F, F B. Quoniam igitur A E O angulus rectus est, erit A E tangens circuli F E H; proinde rectangulum H A F erit æquale quadrato ex A E; sed rectangulo H A F est æquale rectangulum D F A, ob id hoc illi erit æquale. Itaque rectangulum D A F minus quadrato ex A F, est æquale quadrato ex A E, hoc est rectangulum sub A B, plus dupla K in A F, æquale est rectangulo A B G; hoc enim ex constructione est æquale quadrato ex A E. Quamobrem rectangulum D A F minus quadrato ex A F æquale est rectangulo A B G, minus rectangulo sub B G in A F bis; hoc est rectangulo sub F I, & B G; hoc est K; ergo rectangulum A F B sub partibus æquale est rectangulo sub F I differentia partium, & K data.

Problema.

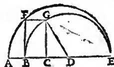
Exemplum IV. *Data ratione interualli quadratorum minoris extremi, & medij ad quadratum maioris, inuenire tria latera proportionalia.*

DAta sit ratio vt s, ad r, minoris ad maius; sumatur autem r, pro maiori extremo: minus verò sit a; ob id r a æquabitur quadrato medij; quamobrem interuallum quadratorum minoris, & medij erit $r\,a - a^2$; Vt autem est s, ad r, ita debet esse $r\,a - a^2$ ad r^2; quamobrem $r^2 a - r\,a^2$ æquabitur $r^2 s$. Omnibus autem applicatis ad r, fiet $r\,a - a^2 = r\,s$; huius autem æquationis radix est $\frac{1}{2} r - ℞ (\frac{1}{4} r^2 - r\,s)$ & erit minus extremum. Hinc verò

PORISMA.

Sumatur dimidium termini maioris datæ rationis, & ab eius quadrato subtrahatur rectangulum factum sub ipsis terminis; residui verò latus quadratum subtrahatur à prædicto dimidio, & remanebit latus minus.

Oportet autem rectam, quæ potest prædictum rectangulum minorem esse dimidio maioris termini; seu debet rectangulum minus esse quadrato ex dimidio termini maioris.



In Schemate intelligatur ducta recta BG. DAti sint rationis termini A B, B E, ille minor, hic maior; super AE, eorum aggregato describatur semicirculus AFE, & super BE, semicirculus BGE; agatur perpendicularis BF, à puncto F, acta FG parallela ipsi AE, occurret necessariò peripheriæ; quandoquidem minor B F supponitur, semidiametro circuli B G E ducatur G C perpendicularis, & factum erit, quod Porisma iubet; ducta D G.

Nam à quadrato ex G D ducta nimirum à centro D ad punctum G, subtractum est quadratū ex G C, & reliquum factum est quadratum ex C D; latus autem C D subtractū fuit à BD, dimidio BE & remansit BC, additum autem fuit D E, & factum est C E; Iam dico BC esse minus latus ex quæsitis, dum B E est latus maius. Quoniam

13. sexti. A B, B F, B E, sunt in continua ratione, vt est A B ad B E, ita est, quadratum B F, seu CG, ad quadratum BE; sed BC, BG, BE sunt in ratione continua, & quadratum ex C G est differentia inter quadratum B C primi lateris, & B G secundi; ergo adinuenta sunt tria latera B C, B G, B E, secundum præscriptam conditionem, vt differentia quadratorum minoris, & medij ad quadratum maioris, habet datum proportionem.

PROBLEMA.

Exemplum V. *Dato vno ex cruribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataque differentia segmentorum baseos, triangulum reperire.*

Hoc

Hoc Problema Gheraldus proponit, & ei satisfacit. Nos autem aliter illud resoluemus, & componemus. Datum sit latus maius b, differentia segmentorum data sit d; oporteat reperire triangulum. Segmentum minus esto a; ergo maius erit $d + a$; tota itaque basis erit $d + 2a$: quare erit vt $d + 2a$, ad b, ita b, ad $d + a$. quamobrem $d^2 + 3da + 2a^2$ æquabitur b^2; & per antithesin erit $3da + 2a^2 = b^2 - d^2$; ergo dimidia erunt æqualia.

$$\begin{array}{r} d + 2a \\ d + a \\ \hline da + 2a^2 \\ d^2 + 2da \quad \\ \hline d^2 + 3da + 2a^2 \end{array}$$

$$\frac{3da}{2} + a^2 = \frac{b^2 - d^2}{2}, \text{ seu } \frac{3da}{2} + a^2 = \frac{b^2 - d^2}{2}.$$

Ad confusionem tollendam pro dimidio ipsius 3 d substituatur g, & pro dimidio ipsius $b^2 - d^2$, intelligatur z^2, & erit, explicata æquatione secundum artem, Radix huius æquationis hæc $\text{℞}\,Q(\frac{1}{4}g^2 + z^2) - \frac{1}{2}g$. Hinc autem deducitur.

PORISMA.

Sumatur triplum datæ differentiæ, & ad quadratum quartæ partis ipsius addatur differentia inter dimidium quadrati ex dato latere, & dimidium quadrati ex data differentia; huius autem aggregati latus quadratum minuatur quarta parte tripli datæ differentiæ; nam hæc erit segmentum minus.

Datum sit crus maius circa rectum A B, sitque differentia segmentorum C B; sumatur F H triplum ipsius C B, & eius quarta pars sit G H; adeò vt eiusdem pars dimidia sit P H: ad punctum H excitetur perpendicularis H I æqualis ipsi AE, quæ possit differentiam inter quadratum rectæ A D; nimirum dimidium quadrati ex A B, & quadratum ex B O, scilicet dimidium quadrati ex differentia C B, connectatur G I, cui fiat æqualis G L, &

Intelligatur triangulum quæsitum Q A B, cuius latus maius AB sit datum, & differentia segmentorum baseos Q R, R B, a perpendiculari A R data sit C B.

Intelligere enim oportet, quod sit descripti semicirculi A E D super A D peripheria.

Item descripti semicirculi C O E super C B, peripheria bifariam diuidatur in O, & actæ sint C O, B O; cui æqualis D E applicetur in A E D, & agatur A E.

factum erit, quod Porisma iubet. Fiat autem segmento H L æquale L M; protrahatur H M ad N, vt M N, sit æqualis C B, datæ differentiæ segmentorum; nempe idem super H N describatur semicirculus, & excitetur L K perpendicularis. Agantur autem H K, K N. Dico triangulum H K N, esse illud quod quæritur.

Quoniam enim angulus H K N est rectus, differentia segmentorum H L, L M, est M N datę ex constructione æqualis; est vero latus K N maius, quàm K H, vt infra constabit. Reliquum est vt ostendamus latus K N, esse æquale dato lateri A B. Quoniam P H secta est bifariam in G, & ei addita H L, erit rectangulum P L H, hoc est P H L plus quadrato H L, vnà cum quadrato G H, æquale quadrato G L, hoc est quadrato G I, hoc est quadratis G H, H I; communi ablato quadrato G H, remanebit rectangulum P H L, plus quadrato H L æquale quadrato H I; ergo duplum rectangulum duplo quadrato, nempè rectangulum F H L, plus duplo quadrato H L, æquale duplo quadr. H I, hoc est duplo differentiæ inter quadr. dimidium ex latere dato,& dimid. ex data differentia; ergo quod idē est, æquabitur quadr. dati lateris A B, minus quadr. datæ differentiæ B C; Quamobrem quadratum differentiæ B C, hoc est M N, plus rectangulo F H L, plus duplo quadrato H L, æquabitur quadrato ex A B, sed quadratum M N, plus rectangulo F H L, plus duplo quadrato H L, est æquale quadrato K N; ergo quadratum K N æquatur quadrato A B; ergo recta K N æqualis est rectæ A B &c.

Quod autem quadratum MN, plus rectangulo FHL, plus duplo quadrato H L, sit æquale quadrato K N, ostenditur ex eo quia quadratum K N est æquale rectangulo H N L; sed rectangulo H N L, est æquale rectangulum F H L, plus quadrato M N, plus duplo quadrato H L; siquidem H L, est æqualis L M, & F H tripla est ex constructione ipsius M N; & HNL æquale est triplo rectangulo LMN, plus duplo quadrato LM, vnà cum quadrato MN ergo &c. Facilè porrò est demonstrare latus K N maius esse latere HK. Si enim KH, KN essent æqualia latera, etiam segmenta H L, L N essent æqualia, quod est falsum, cùm segmenta ponantur differre interuallo M N, neque potest H K maius esse quàm K N; quandoquidem segmentum H L, maius esset segmento L N, cùm tamen segmentum H L sit minus vt patet; est ergo minus H K, quam K N &c.

Hìc autem occurrit Problema Florentiæ mihi propositum resoluendum ab Adolescente, cui nomen erat Italicè *Paulino del Bono*; erat autem huiusmodi.

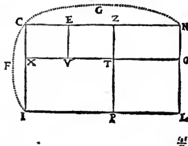
Problema.

Exemplum VI. *Propositum sit rectangulum, in quo oporteat describere rectangulum alterum, vt in infra posita figura, ita vt hoc sit quarta pars illius.*

RESOLVTIO I.

INtelligatur rectangulum I C N L respondens ipsi A B C D, Vide figuram ad pag. 415. & in hoc P T O L respondeat alteri, quod est quarta pars illius G E F H. Deinde

Supponatur iam factum, adeo ut rectangulum in medio constitutum æquale quartæ parti totius sit P O, cui quidem æquale sit V E N O, atque adeo quarta etiam pars totius; debet igitur inuestigari X I &c. Ratio verò quam debet habere I N ad P O sit vt R ad S erit X V æqualis V T.



Latus maius C N appelletur g, & latus C I nuncupetur f: rectangulum IN ad PO, debet esse vt r, ad s.

Supponamus autem XI ignotā esse a, ac proinde rectangulum I N, erit f g rectangnlum P O, erit $\frac{fgs}{r}$; recta verò T O erit $\frac{fgs}{ra}$, & recta C X, erit $f - a$; Præterea X T, recta erit $g - \frac{fgs}{ra}$; quamobrem rectangulum X Z erit $gf - \frac{ffgs}{ra} - ga + \frac{fgs}{r}$; rectangulum autem T N erit $\frac{ffgs}{ra} - \frac{fgs}{r}$. Duplum autem rectangulum V N, seu X Z, plus duplo rectangulo T N est $gf - \frac{ffgs}{ra} - ga + \frac{fgs}{r} +$

$\frac{fgs}{ra}$

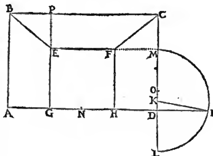
$\frac{fg\,f\,bis}{ra} - \frac{fg\,f\,bis}{r}$, seu quod idem est g d -- g a - $\frac{fgf}{r}$ ✠ $\frac{fgfa}{ra}$; duplum autem rectangulum P O est $\frac{fg\,f\,bis}{r}$; Cùm autem rectangula illa V N, P O, sint ex hypothesi æqualia; ergo etiam eorum dupla æqualia erunt; quamobrem g f -- g a — $\frac{fgf}{r}$ ✠ $\frac{fgfa}{ra}$ = $\frac{fgf\,bis}{r}$; si verò vtrinque addatur $\frac{fgf}{r}$ fiet æquatio g f - g a ✠ $\frac{fgfa}{ra}$ = $\frac{fg\,f\,ter}{r}$; omnib. autem applicatis ad g, fiet f - a † $\frac{ffa}{ra}$ = $\frac{ff\,ter}{r}$; illa autem fractio $\frac{sf}{r}$ reuocetur ad integram magnitudinem, quæ sit z; ergo f — a ✠ $\frac{zf}{a}$ æquabitur z ter; omnibus autem ductis in a, fiet æquatio f a -- a² ✠ z f = z a ter, & per antithesin fiet a² -- f a -- z a ter = z f; at verò loco ipsius f — z ter substituatur b; ergo a² — b a æquabitur z f, huius vero æquationis radix erit nota si sumatur $\frac{1}{4}$ b², nempè quadratum dimidiæ coefficientis, & addatur z f, comparationis homogeneo, propterea quod huius aggregati lateri quadrato ℞ ($\frac{1}{4}$ b² ✠ z f) si addatur dimidia coefficiens $\frac{1}{2}$ b, fiet ℞ ($\frac{1}{4}$ b² † z f) ✠ $\frac{1}{2}$ b pro radicis valore; hinc

PORISMA.

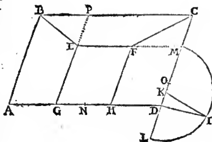
Applicetur rectangulum sub f, latere minori propositi rectanguli, & sub s minori termino datæ rationis, ad r terminum maiorem, & proueniat z; huius autem triplo subtracto ex f, remaneat b; ad huius autem dimidij quadratum addatur rectangulum sub z, inuenta ex illa applicatione, & f latere minori, ex huiusmodi aggregato eruatur latus quadratum hoc est reperiatur recta potens illud aggregatum, quæ addita dimidio b substituta in locum ipsius f — z 3, exhibebit quæsitam radicem.

COMPOSITIO.

DAtum sit parallelogrammum A B C D, & sit iniunctum intrà illud constituere parallelogrammum G E F H, ea conditione seruata, vt si ducantur B E, F C, spatia G E F H, B E F C, A G E B, H E C D, sint inter se æqualia, adeòut vnumquodque ipsorum sit quarta pars totius parallelogrammi dati.



Ex alterutro extremorum lateris A D, puta, vel ad A, vel ad D, excitetur D I, ad rectos angulos quidem; sit autem D I æqualis dimidio lateris D C; sumatur autem D K suboctupla ad D C, seu sit octaua pars ipsius D C. Deinde ducatur K I, cui fiat æqualis K M; modo centro K, interuallo K M, describatur peripheria MIL, secans CD protractam in L: factum erit quod Porisma iubet. Sumatur autem D O quarta pars totius D C, & fiat, vt M D, ad D N, dimidium totius A D, ita D O ad aliam, puta G N, vel N H; construatur figura vt vides, adeo vt H F sit æqualis ipsi D M, & E F parallela rectæ A D, vt G E, & H F parallelæ tum inter se, tum lateribus A B, D C; actis vero B E, F C, protrahatur E F in M, & G E, in P. Dico iam intra datum parallelogrammum esse descriptum parallelogrammum, vt quæritur.



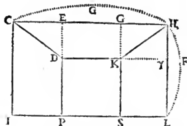
Quoniam enim assumpta fuerunt, recta quidem D K suboctupla, recta verò D O subquadru-

pla;

Vt D A ad H G, ita C D ad O M; ergo
Rectangulum D A O M = rectangulo H G C D.
Praterea
O C = 3 D O; ob id
Rectangulum O C D A = rectangulo triplo D O D A; ergo
Rectangulum 3 O D A = rectangulo D A O C, hoc est
Rectangulo D A M C + rectangulo D A O M, hoc est
+ rectangulo H G C D, hoc est plus duobus rectangulis C M H G
Et M D H G, hoc est & rectangulo O D A; sed
Rectangulum 3 O D A = rectangulo D A M C + rectangulo C M H G
+ rectangulo O D A, dempto vtrinque rectangulo O D A remanet
Rectangulum 2 O D A = rectangulo C M H G + rectangulo D A M C, hoc est
+ tribus rectangulis M C D H; M C H G; M C G A; sed
Rectangulum M C G A = rectangulo C M D H; ergo
2 Rectangulum O D A aquabitur 2 rectangulo M C H G plus 2 rectangulo M C D H; ergo
Rectangulum O D A = rectangulo M C H G + rectangulo M C D H, vel
Rectangulo M C D G, sed eidem rectangulo M C D G = rectangulum C M E
cùm E M = D G; ergo
Rectangulum O D A = rectangulo C M E, sed eidem rectangulo O D A
= M D H G; ergo
Rectangulum C M E = M D H G, sed
Rectangulum 4 O D A = C D A; ergo
Rectangulum 4 C M E, vel 4 M D H G, hoc est rectangulum 4 E F H G
= C D A rectangulo.

Aliter etiam hoc idem Problema resoluetur hunc in modum.

RESOLVTIO II.



Sit iam factum & C H appelletur g: item H L nuncupetur f, at vero E G differentia partium E H, C E, sit 2 a; adeo vt dimidium differentiæ E G, qua differunt partes C E, E H, seu C G, G H, sit a, itaque E H erit $\frac{1}{2}$ g + a. Est autem E G, vt diximus 2 a; modò fiant duæ magnitudines rationem habentes, vt $\frac{1}{2}$ g + a ad 2 a, quæ simul collectæ conficiant f: ducatur f in illas partes, nempè in $\frac{1}{2}$ g + a, & fiet $\frac{1}{2}$ g f + f a, & in 2 a, & fiet 2 f a. applicetur ad aggregatum ex $\frac{1}{2}$ g + a, & 2 a, nempe ad $\frac{1}{2}$ g + 3 a, & erunt quatuor partes quæsitæ proportionales $\frac{1}{2}$ g + a; 2 a; $\frac{\frac{1}{2}gf+fa}{\frac{1}{2}g+3a}$; $\frac{2fa}{\frac{1}{2}g+3a}$; productum autem abs 2 a in $\frac{\frac{1}{2}gf+fa}{\frac{1}{2}g+3a}$ est $\frac{\frac{2}{2}gfa+2fa^2}{\frac{1}{2}g+3a}$, hoc est $\frac{gfa+2fa^2}{\frac{1}{2}g+3a}$, & æquabitur *quartæ parti totius rectanguli, quæ sit K^2; tollatur fractio, & fiet $gfa + 2fa^2 = \frac{1}{2}gK^2 + 3K^2a$, ob id $gfa - 3K^2a + 2fa^2$ æquabitur $\frac{1}{2}gK^2$, seu $gfa - 3K^2a + 2fa^2$ æquabitur $\frac{1}{2}gK^2$; & per communem applicationem ad 2 f, fiet æquatio $\frac{gfa-3K^2a}{2f} + a^2 = \frac{\frac{1}{2}gK^2}{2f}$.

* D E H Y seu P D K S.

Vt autem tollatur fractio fiat vt 2 f ad $\frac{1}{2}$ g, ita K^2 ad aliud, nempè z^2, illudque retineatur pro comparationis homogeneo: Mox autem fiat nota differentia inter plana, quorum vnũ g f, alterum vero 3 K^2, eaque sit m pl., quo applicato ad 2 f, emergat b: modò superiori

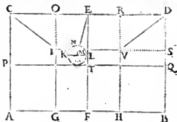
æquationi æquiualebit hæc $a^2 + ba = z^2$; huius autem æquationis Radix erit ℞ $(\frac{1}{4} b^2 + z^2) - \frac{1}{2} b$, & hinc deducitur.

PORISMA.

Sumatur duplum lateris minoris f & fiat vt hoc ad dimidium lateris maioris g, ita k^2 quarta pars totius rectanguli ad alind quod sit z^2. Deinde sumatur m pl., scilicet quarta pars totius differentia, inter rectangulum totum g f & 3 k^2, nempè tres quartas partes totius rectanguli, & huiusmodi differentia applicetur ad 2 f duplum lateris minoris, & emergat b, si namque ad quadratum ex dimidio ipsius b addatur z^2, & ex aggregati latere subtrahatur dimidium ipsius b remanebit nota radix quæsita.

COMPOSITIO.

DAtum sit parallelogrammum A C D B, & oporteat facere quod imperatum est. Diuidatur C D bifariam in E, & agatur E F parallela lateribus A C, B D; fiat autem vt duplum minus latus A C, vel B D ad D E dimidium totius C D, ita planum E Q, quarta pars totius parallelogrammi ad quadratum, cuius latus est E L. Deinde ad punctum L, recta K L fiat ad rectos angulos, & sit illa, quæ prouenit ex applicatione quartæ partis E Q, exempli gratia ad duplam D B, hoc est rectangulum sub K L, & dupla D B, sit æquale quartæ parti totius A D; secetur ipsa K L, in M quidem bifariam, & centro M, interuallo M L, vel M K, describatur circulus secans ductam E M in N: nunc centro E, interuallo E N, describatur arcus secans C D in punctis O, R. Factum erit quod Porisma iubet. Fiat autem vt O R ad O D, ita D S ad S B: agantur rectæ O G, R H, parallelæ lateribus C A, D B; ducatur I V parallela rectæ C D, vel A B, & agatur P Q coniungens puncta P, Q, in quibus illæ sectæ sunt bifariam. Dico O R esse differentiam partium lateris C D, quæsitam; & parallelogrammum I G H V æquale esse cuilibet trium reliquorum spatiorum. Quoniam enim rectangulum sub K L, & dupla D B æquale est quartæ parti totius C B, ob id quod sub dupla K L, & simpla D B, & quod sub quadrupla K L, & dimidia D B, æquabitur quartæ parti totius; sed dimidia D B est Q B; ergo quod sub quadrupla K L, & Q B continetur æquatur quartæ parti &c. Sed quartæ parti æquatur rectangulum T B; ergo quadrupla K L æqualis est ipsi T Q; quare K L subquadrupla ipsius T Q erit suboctupla totius C D, atque adeo M L erit pars decima sexta totius C D. & non dissimili modo contexemus demonstrationem ac supra fecimus &c. ibi coefficiens erat quarta pars lateris minoris D B; hic verò est octaua pars lateris maioris C D vt patet; at verò comparationis homogeneum est quadratum quartæ partis lateris maioris, vt liquet. Quemadmodum enim est duplum lateris D B, ad latus E D, ita rectangulum sub dupla D B & E D ad quadratum ex E D; ergo vt duplum lateris D B ad E D, ita quarta pars rectanguli, sub dupla D B, & E D, nempè rectangulum E Q quarta pars etiam totius A D, ad quartam partem quadrati ex E D, nempè ad quadr. ex dimidio ipsius E D &c. In priori igitur autem modo comparationis homogeneum erat quadratum ex dimidio lateris minoris D B; hic autem quadratum est ex dimidio ipsius E D, hoc est ex quarta parte totius C D &c.



TER-

TERTIVM EXEMPLORVM GENVS

Ad hoc genus pertinent ea quidem Problemata, quorum resolutiones per rectam, & circulum perfici non possunt, sed vel Conicas sectiones, vel lineas magis compositas requirunt.

Problema.

Propositam rectam QD diuisam in A, iterum secare quidem in C, vt sit quadratum QA, ad quadratum AC in ratione AC ad CD. Exempl. III. I.

RESOLVTIO.

QA vel AF =	b
AD =	d
GF =	q
AK =	a
CD =	d − a
CK =	e

Sit iam factum, & magnitudines notentur characteribus, vt à latere, & adhibita decenti præparatione iam superius significata &c. ita procedendum erit.

Quoniam igitur est vt b^2 ad a^2, ita a ad d − a, hoc est ob circulum ita a^2, ad e^2, sunt tres proportionales magnitudines, prima b, secunda a, tertia e; atque adeo vt b ad a, ita a, ad e; sed vt b, ad a, ita b − q, ad a − $\frac{qda}{bd}$; ergo vt b − q, ad a − $\frac{qda}{bd}$, ita a, ad e; ergo rectangulum $a^2 - \frac{qdaa}{bd}$, æquabitur rectangulo be − qe; sed rectangulum da − a^2, æquatur e^2; ergo æqualibus vtrinque additis, rectangulum $a^2 - \frac{qdaa}{bd}$ + da − a^2, æquabitur be − qe + e^2; sed rectangulum da − $\frac{qdaa}{bd}$ æquatur rectangulo $a^2 - \frac{qdaa}{bd}$ + rectangulo da − a^2, & rectangulum be − qe + e^2, æquatur be − qe, vnà cum e^2; ergo rectangulum da − $\frac{qdaa}{bd}$ æquabitur be − qe + e^2; sed $\frac{bd}{q}$ est ad d, vt rectangulū $\frac{bda}{q} - a^2$, ad rectangulum da − $\frac{qdaa}{bd}$; ergo rectangulum $\frac{bda}{q} - a^2$, ad rectangulum be − qe + e^2, erit vt $\frac{bd}{q}$ ad d; & conuertendo vt d ad $\frac{bd}{q}$ ita rectangulum be − qe + e^2, ad $\frac{bda}{q} - a^2$; sed vt d ad $\frac{bd}{q}$, ita q, ad b; ergo rectangulum be − qe + e^2, ad rectangulum $\frac{bda}{q} - a^2$, erit vt q, ad b; sed in Ellipsi vt rectangulum be − qe + e^2, ad rectangulum $\frac{bda}{q} - a^2$, ita quadratum $\frac{b^2 - 2qb + q^2}{4}$ ad rectangulum $\frac{b^3 - 2qb^2 + bq^2}{4q}$; ergo vt $\frac{b^2 - 2bq + q^2}{4}$ ad rectangulum $\frac{b^3 - 2b^2q + bq^2}{4q}$ erit vt q, ad b. Sed vt $\frac{b^2 - 2bq + q^2}{4}$ ad rectangulum $\frac{b^3 - 2b^2q + bq^2}{4q}$, ita latus rectum ad latus transuersum seu axim HI; ellipseos &c.; ergo vt q ad b, latus rectum ad latus transuersum ellipseos transeuntis per puncta A, K. Quod fieri potest &c. Hinc

PORISMA.

Super AD descriptus sit semicirculus AKD, & ad punctum A facta sit F A ad rectos angulos, & æqualis ipsi QA, in qua sumpto quouis puncto G protrahatur AD ad E, ita vt AD ad AE, sit vt GF ad FA; ducta autem ER, quæ sit æqualis, & parallela ipsi AG, agatur GR, quæ parallela erit ipsi AE; atque adeo completum erit rectangulum AGRE; Diuisis autem AG, ER bifariam in punctis M, & N, acta NM protrahatur ad H, ità vt quadratum AM, ad rectangulum MHN sit in ratione GF, ad FA. Et protracta MN ad I, ita vt NI sit æqualis HM, circa HI tanquam axim & latere recto, quod ad ipsum HI, velut ad latus transuersum sit in ratione vt GF, ad FA: describatur semi ellipsis, quæ necessariò transibit per puncta A, & E, secabitque circumferentiam semicirculi descripti super AD in puncto K, ex quo cadat perpendicularis KC; Erit enim quadratum QA ad quadratum AC vt AC, ad CD; protrahatur KC

ad partes C, occurratque M N in L, & G R in P; fiat autem vt A E ad A D, ita A C ad A B,

COMPOSITIO.

QVoniam igitur est vt G F ad F A, ita latus rectum ad latus transuersum ellipseos transeuntis per puncta A, K, E; sed quadratum A M, ad rectangulum M H N est vt latus rectum ad latus transuersum, siue axim H I; ergo quadratum A M, ad rectangulum M H N, erit vt G F, ad F A; sed vt rectangulum P K C, ad rectangulum A C E, descripta ellipsi transeunte per puncta A, K, E, euius axis H I, & semiordinatim applicata A M, ita est quadratum A M, ad rectangulum H M I, seu M H N, vt ostensum est; ergo rectangulum P K C, ad rectangulum A C E erit, vt G F ad F A; sed ex præparatione vt A D ad A E, ita G F, ad F A; ergo vt A D ad A E, ita rectangulum P K C, ad rectangulum A C E; ergo conuertendo, vt A E ad A D, ita rectangulum A C E ad rectangulum P K C, sed vt A E ad A D, ita rectangulum A C E, ad rectangulum ex A C in B D; ergo rectangulum ex A C in B D æquabitur rectangulo P K C; sed rectangulum ex A C in B D æquale est rectangulo A C B plus rectangulo A C D, & rectangulum P K C, æquale est rectangulo P C K plus quadrato C K; ergo rectangulum A C B, vna cum rectangulo A C D æquabitur rectangulo P C K vna cum quadrato C K; sed rectangulum A C D æquale est quadrato C K, ob circulum; ergo per subtractionem æqualium rectangulum A C B æquabitur rectangulo P C K; ergo vt P C ad B C, ita A C, ad C K; sed vt P C ad B C, ita F A ad A C; ergo sunt tres proportionales magnitudines; nempè prima Q A, siue F A; secunda A C; tertia C K; atque adeo vt quadratum Q A, ad quadratum A C, ita quadratum A C ad quadratum C K; hoc est ob circulum, ita A C ad C D. Secuimus ergo &c. Quod facere oportebat.

Problema.

Exemplum II. *Latus reperire à cuius cubo si subtraxeris solidum ex ipsa in quadratum alterius lateris dati; remaneat solidum, itidem datum.*

RESOLVTIO.

DAtum sit latus l, datumque solidum m^3, oporteat facere quod imperatum est. Latus quæsitum esto a, cuius cubus est a^3; ducto autem l^2 in a, fit l^2 a, quo subtracto ex a^3 fit $a^3 -- l^2 a$, quod æquabitur m^3; loco autem ipsius l^2 substituatur 3 b^2, ita vt 3 b^2 æquetur l^2, & loco m^3, substituatur b^2 d, ita vt b^2 d, æquetur m^3; ac propterea æquatio nouam hanc induat formam $a^3 -- 3\, b^2\, a = b^2\, d$, quæ quidem explicationem iuxta superius tradita subire potest.

COMPOSITIO.

Exponatur recta AL, ex qua abscindatur CL æqualis rectæ quæ possit tertiam partem plani coefficientis; centro autem C, interuallo CL describatur circulus BFL; fiat autem CE æqualis rectæ, quæ ducta in tertiam partem plani coefficientis puta in quadratum CL facit comparationis homogeneum. Deinde bissecetur CE in K, & ex K erigatur perpendicularis KD, agantur DC, DE, angulus verò DCE trissecetur per rectam MC, cui ex D agatur parallela DA occurrens peripheriæ in B, & rectæ LC protractæ ad partes C in A; Dico rectam AC esse quæsitam adeo vt cubus ex AC, minus triplo solido ex AC in quadratum AB æquale sit solido ex CE in idem quadratum AB. Demonstratio patet ex dictis ad paginam 362

PRO-

PROBLEMA.

Propositum latus A B, vtcunque sectum in C, iterum diuidere in D, inter C B, ita vt solidum parallelepipedum ex A D, in quadratum C D, ad cubum D B, rationem habeat datam. Exemplum III.

HVius Problematis triplex est casus; vel enim ratio data est æqualitatis, vel maioris, vel minoris inæqualitatis.

RESOLVTIO PRIMI CASVS.

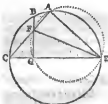
Ad primum quod attinet: pars A C sit b; at C B sit d; pars D B esto a, reliqua C D erit $d - a$; & A D erit $b + d - a$, quo ducto in $d^2 - 2da + a^2$, quadratum scilicet ipsius CD, fit productum $bd^2 + d^3 - 2bda - 3d^2a + ba^2 + 3da^2 - a^3 = a^3$; & per antithesin $2a^3 + 3d^2a + 2bda - 3da^2 - ba^2 = bd^2 + d^3$; omnibus autem diuisis per 2, fiet $a^3 + \frac{3}{2}d^2a + bda - \frac{3}{2}da^2 - \frac{1}{2}ba^2 = \frac{1}{2}bd^2 + \frac{1}{2}d^3$; quæ quidem æquatio iuxta præcepta suo loco tradita per sublationem secundi termini reuocabitur ad vnam ex illis æquationibus in quibus cubus afficitur sub latere vnde facta huiusmodi reductione, & æquatione explicata iuxta Artis præcepta, quod quæritur innotescet. Non dissimili modo, cum proportio fuerit maioris, vel minoris inæqualitatis.

PROBLEMA.

Est circulus A B C D E, in quo diameter C E, & perpendicularis B G, diametrum secans in G. Oporteat reperire in peripheria punctum verbi gratia A à quo ducta recta A C; ad diametri extremum C occurrat B G in F, itaut A F, F G, G E sint in continua ratione. Exemplum IV.

PRÆPARATIO.

INtelligatur ducta A E, & quoniam angulus C A E rectus est, itemque rectus F G E, erunt in circulo; quamobrem rectangulum E C G æquabitur rectangulo A C F; quare vt C E ad A C, ita C F ad C G, itaque cùm A F, F G, G E sint proportionales, atque adeo rectangulum sub A F, & G E æquale quadrato G F, ob id cùm G E sit excessus, quo prima C E superat quartam C G; & A F sit excessus, quo secunda A C superat tertiam C F, item quadratum F G est excessus quo quadratum C F tertiæ superat quadratum C G quartæ, eo Problema deductum est vt datis duabus lineis inter illas duæ mediæ reperiantur, ita vt quod fit ab excessu secundæ supra tertiam in excessum primæ supra quartam, æquale sit excessui, quo quadratum tertiæ superat quadratum quartæ.



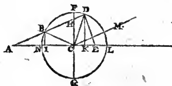
RESOLVTIO.

SVpponamus igitur C G esse b, & G E esse C, ita vt C E tota sit $b + c$; at verò C A esto a, ita vt prima sit $b + c$; secunda a, quarta b; vt autem habeatur tertia ducatur $b + c$ prima in b, quartam, & proueniet $b^2 + bc$, quo applicato ad a secundam proueniet $\frac{b^2 + bc}{a}$ pro tertia; sunt igitur quatuor quantitates proportionales. prima $b + c$: sec. a, tertia $\frac{b^2 + bc}{a}$; quarta denique b; & quia factum ab excessu primæ supra quartam in excessum secundæ supra tertiam æquale est excessui, quo quadratum tertiæ superat quadratum quartæ, cum prima sit $b + c$: excessus primæ supra quartam erit c; & quia secunda est a, tertia vero $\frac{b^2 + bc}{a}$ excessus secundæ supra tertiam erit $a - \frac{b^2 + bc}{a}$ seu $\frac{a^2 - b^2 + bc}{a}$; & quia tertia est $\frac{b^2 + bc}{a}$, quadratum erit $\frac{b^4 + 2b^3c + b^2c^2}{a^2}$, à quo si dempseris b^2, nempe quadratum quartæ remanebit $\frac{b^4 + 2b^3c + b^2c^2}{a^2} - b^2$, seu quod idem est $\frac{b^4 + 2b^3c + b^2c^2 - b^2a^2}{a^2}$ factum autem ab excessu secundæ supra tertiam in excessum primæ supra quartam erit $ca - \frac{b^2c + bc^2}{a}$ seu quod idem est $\frac{ca^2 - b^2c - bc^2}{a}$ & erit æquatio huiusmodi

jusmodi $\frac{ca^3 - b^2ca + bca}{a}$ = [illegible], decussatim autem facta multiplicatione [illegible] = [illegible] atque adeo $c\,a^4 - b^2 c\,a^2 + b\,c^2 a^2$ æquabitur $b^4 a + 2\,b^3 c\,a + b^2 c^2 a - b^2 a^3$; & per hypobibasmum $c\,a^3 - b^2 c\,a + b\,c^2 a$ æquabitur $b^4 + 2\,b^3 c + b^2 c^2 - b^2 a^2$; & per antithesin $c\,a^3 + b^2 a^2 - b^2 c\,a + b\,c^2 a$ æquabitur $b^4 + 2\,b^3 c + b^2 c^2$; omnibus autem applicatis ad c, vt potestas per se subsistat, & $a^3 + \frac{b^2 a^2}{c} - b^2 a + b\,c\,a$ æquabitur $\frac{b^4}{c} + 2\,b^3 + b^2 c$; tollantur fra-ctiones; fiat vt c ad b, ita b, ad 3 f; Deinde fiat vt c ad b, ita b^3, ad aliud quod sit g sol. ergo $a^3 + 3\,f\,a^2 - \frac{}{b^2 + bc}\,a$, æquabitur g sol. $+ 2\,b^3 + b^2 c$, ad cuius elegantiorem explicationem simplicioribus terminis vti si placet, loco $b^2 + b\,c$ substituatur d pl., & loco g sol. $+ 2\,b^3 + b^2 c$ substituatur z sol., & æquatio illa hanc induet formam; nempe $a^3 + 3\,f\,a^2 - d$ pl. a æquabitur z sol. a + f esto c; ergo ex ijs, quæ in speciosa tradidimus $c^3 - \frac{}{3ff - d\,pl.}\,c$, æquabitur z sol. - d pl. f; itaque æquatio illa cubica, quæ erat affecta sub quadrato & latere ad simplicem æquationem cubicam affectam tantummodo sub latere reuocata erit; hæc autem æquatio Geometricè explicabitur modo supra tradito.

COMPOSITIO.

Si itaque nos intelligamus quadratum A B, valere tertiam partem ipsius plani coëfficientis, quod erat 3 f² -- dp: solidum autem ex C E, in quadratum A B, esse comparationis homogeneum, quod erat z sol. -- 2 f³ -- d pl. f. erit cubus ex A C cubus è quantitate quæsita, minus triplo solido ex quadrato A B, in A C, æquale solido ex C E in quadratum A B, seu, quod idem est, cubus ex A C, minus solido ex triplo quadrato A B in A C, æquabitur solido ex quadrato A B, in C E.



Operando igitur iuxta prædicta, facile nos assequemur intentum; ac ob id in periphæria superioris Schematis reperto valore radicis, puta C A, adinuenerimus punctum A, applicando quantitatem inuentam, in circulo ex puncto C, itaut F A, F G, G E, sint in continua ratione. Quod facere oportebat.

De Cautionibus in cuiuslibet oblati Problematis Resolutione instituenda. Deque Subsidiaria coefficiente quantitate, *quam Auctor ad altos gradus in ipsamet resolutione vitandos, & adhibere consueuit. Cap. IX.*

Illud in primis Artifex curet ne se adigat viæ obscuriori; passim enim contingit, vt ex minus ac curato examine quæstionis propositæ implicatior via occurrat, quam omni studio de clinare oportet.

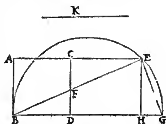
Hæc autem vt cuique magis perspecta fiant, non erit abs re si aliquod Problema nos afferamus in medium, vnde hactenus insinuata facilè quidem innotescant. Esto autem illud, quod proposuit Pappus Alexandrinus Libro septimo Prop. 72.

Problema.

Exemplum I. *Quadrato dato, & vno latere producto, aptare sub exteriori angulo rectam magnitudine datam, quæ quidem ad oppositum angulum pertingat.*

Da-

Datum sit quadratum A D, & recta quæpiam K, oporteat latus A C producere ad E vsque, ita vt ducta ab E versus B, cuiusmodi est E F sit æqualis rectæ K.



Pappus aggressus huius Problematis resolutionem eam effectionem adinuenit, quam nos quoque superiori Libro nostra Methodo consecuti sumus, adeout producere debeamus B D, in G, & facere D G æqualem rectæ, quæ potest aggregatum quadratorum, quorum vnum est B C, nempè ex B D, aliud ex K; protracto enim latere A C, donec occurrat peripheriæ in E, & ducta E B, interceptum segmentum E F æquabitur K; & Problemati satisfacit, Hæc tamen constructio non satis est obuia; perinde enim est ac assumere DG pro quātitate ignota, cùm potius C F, vel F D, vel C E, si forent assumptæ ad æquationem conducerent, ad quam etsi perueniatur per quantitates imaginarias, tamen effectionem suppeditat geometricè demonvrabilem; itaque B D, vel C D dicatur b; & E F dicatur c; at verò D F assumpta pro ignota quantitate esto a: vnde C F erit $b - a$; vtque C F; siue $b - a$ est ad F E, seu c, ita F D, seu a, est ad B F; quamobrem hæc erit $\frac{ca}{b-a}$; & quoniam triangulum B D F est rectangulum, cuius latus vnum est a, alterum b, ipsorum quadrata $a^2 + b^2$ æqualia erunt baseos quadrato $\frac{c^2a^2}{a^2-2ba+b^2}$. Quod si totum ducatur in $a^2 - 2ba + b^2$, proueniet æquatio $a^4 - 2ba^3 + 2b^2a^2 - 2b^3a + b^4 = c^2a^2$, seu quod idem est $a^4 - 2ba^3 \begin{smallmatrix}+2bb\\-cc\end{smallmatrix} a^2 - 2b^3a + b^4 = 0$, cuius Radix est $\frac{1}{2}b + ℞Q(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2) - ℞Q(\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b ℞ (b^2 + c^2))$

Hæc tamen Resolutionis ratio per viam admodum salebrosam conducit quam calcauit Cartesius; sed infra in nostro Promoto Geometra de huiusmodi resoluendi via verba faciemus. *Cartesij modus.*

Alio quoque modo huius Problematis resolutio potest institui; nempe sit B D, vel D C æqualis b; F E sit æqualis C; insuper B F sit æqualis e, & D G æqualis a. Quoniam igitur E H est æqualis C D, vel D B, & triangulum E H G simile est triangulo B D F, erit & E G æqualis B F, nempe e. Rursus quoniam triangula B G E, B E H, similia sunt, erit vt B G, nimirum $b + a$, ad G E, nempe e, ita B E, hoc est $e + c$ ad E H, hoc est b; multiplicatis extremis & medijs inter se fiet æquatio $e^2 + ce = b^2 + ba$; præterea cum triangula BFD, BEH, sint similia, si fiat vt BF, hoc est e, ad BD, seu b, ita BE, nempe $e + c$ ad BH, erit B H idem quod $\frac{be+bc}{e}$; quod si subtrahatur B H ex B G, hoc est $\frac{be+bc}{e}$, ex $b + a$, remanebit $\frac{ae-bc}{e}$ pro ipsa HG. Quoniam autē est vt BH, ad HE, ita HE ad HG, si multiplicetur BH, per H G, hoc est $\frac{be+bc}{e}$ per $\frac{ae-bc}{e}$ fiet productum $\frac{bae^2+bcae-b^2ce-b^2c^2}{ee}$ quod æquabitur b^2; hoc est quadrato ex H E; ac propterea $ae^2 - be^2$ æquabitur $\frac{+bc}{}e + bc^2$; ac proinde e^2 æquabitur $-ce + \frac{bc^2}{a-b}$; quæ autem eidem sunt æqualia, sunt etiam inter se æqualia; erat autem e^2 æquale $-ce + \frac{b^2}{+ba}$; propterea $-ce + \frac{b^2}{+ba}$ æquabitur $-ce + \frac{bc^2}{a-b}$: vtrinque sublatis æqualibus, & quę supersunt si multiplicentur per $a - b$, fiet $ba^2 - b^3 = bc^2$; ergo per antithesin ba^2 æquabitur $bc^2 + b^3$; & omnibus applicatis ad b, a^2 æquabitur $b^2 + c^2$. *Schooteny modus.*

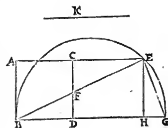
Auctoris modi, quibus superiori Problemati fit satis.

Non vnus est procedendi modus ad suprapositi Problematis resolutionem à nobis inuentus.

Primus est satis obuius, sed ad imaginarias quantitates ascendit; est autem huiusmodi, vt potestas sit quatuor dimensionum, cum omnibus parodicis gradibus, in ipsa æquatione.

RE-

RESOLVTIO I.



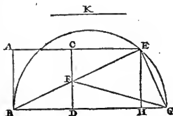
SIt B D, atque adeo C D, quidem b. F E sit c at F C esto a, ergo D F erit $b - a$; quoniam verò triangula B D F, F C E, sunt similia, proinde erit vt D F, scilicet $b - a$ ad B D nempe b. ita F C, seu a ad C E, nimirum $\frac{ba}{b-a}$, & quoniam angulus F C E, est rectus $\frac{b^2a^2}{b^2 - 2ba + a^2}$ nēpe quadr. ex $\frac{ba}{b-a}$ plus a^2, sc. quad. ex F C æqu. quad. ipsius F E. erit igitur æquatio $\frac{b^2a^2}{b^2 - 2ba + a^2} + a^2 = c^2$, & sublata fractione $2b^2a^2 - 2ba^3 + a^4 = b^2c^2 - 2bc^2a + c^2a^2$, & per repetitam antithesin fiet æquatio $2b^2a^2 - c^2a^2 + 2bc^2a - 2ba^3 + a^4 = b^2c^2$. seu $a^4 - 2ba^3 \frac{+2bb}{-cc} a^2 + 2bc^2a - b^2c^2 = 0$.

Qua verò Arte ex huiusmodi æquatione eruatur Geometricè Radix, reductionis præsidio, in Speciosa explicui, & iterum in meo Promoto Geometra explicabo. Hac igitur resoluendi ratione prætermissa; ad aliam accedam sic se habentem.

RESOLVTIO II.

Positio hic fit iuxta secundum modum supra expositum; vnde G E est c, & D G est a.

QVoniam igitur H G est $\frac{ac - bc}{a}$, cuius quadratum est $\frac{a^2c^2 - 2bc^2a + b^2c^2}{a^2}$ est autem D F, æqualis ipsi H G, vt mox constabit; ergo quadratum ipsius D F, erit itidem $\frac{a^2c^2 - 2bc^2a + b^2c^2}{a^2}$ cui si addatur a^2, nempe quadratum ipsius D G. fiet $\frac{a^2c^2 - 2bc^2a + b^2c^2}{a^2} + a^2$, sed hoc aggregatum æquale est aggregato quadratorum F E, E H, H G. vt infra patebit, nempe $c^2 + b^2 + \frac{a^2c^2 - 2bc^2a + b^2c^2}{a^2}$, ergo vtrinque sublatis æqualibus remanebit $a^2 = b^2 + c^2$. ergo a poterit aggregatum quadratorum ex b & c. Hinc



PORISMA.

Protrahatur B D in G, vt D G possit aggregatum quadratorum ex B D, & K. & hac erit quæsita æquationis Radix.

Lemma I.

Quod verò D F sit æqualis H G sic planum fiet. *Triangula enim B D F, E H G, sunt similia, ergo circa angulos rectos D & H, atque adeo æquales, latera erunt proportionalia, quare vt B D, ad D F, ita E H, ad H G. & permutando vt B D ad E H, ita D F, ad H G, sed B D est æqualis E H; vtraque enim est æqualis D C, ergo D F æquabitur H G.*

Lemma II.

Quod verò aggregatum quadratorum D F, D G æquale sit aggregato quadratorum F E, E H, H G, sic ostenditur *Anguli enim F D G, F E G. sunt recti, quare aggregatum quadratorum F D, D G, æquale est quadrato rectæ F G connectentis puncta F, G, cuius quadrato æquale est etiam aggregatum quadratorum F E, E G. ergo aggregatum quadratorum F D, D G erit æquale aggregato quadratorum F E, E G. Quod oportebat &c.*

COM-

Componenti siquidem constat quadratum E G aquari duobus quadratis EH, HG; ergo si quadratum D F, plus quadrato D G, aquetur quadrato F E plus quadrato E G; aequabitur etiam quadrato F E, plus quadratis E H; H G.

C O M P O S I T I O.

Protrahatur B D, vsque ad G; itaut D G possit aggregatum quadratorum B D, & K; deinde super B G, descripto semicirculo B E G, & protracta A C donec occurrat circumferentiæ in E, actaque E B, occurrente C D in F, & factum erit quod oportet. Recta siquidem E F, protracta ad partes F, occurrit puncto B, & est æqualis datæ rectæ K, vt oportet, &c.

Sic etiam obseruare licet, quod nos multoties in resoluendo viam inire solemus, quæ magis est salebrosa, cùm alioquin non desit alia expeditissima, vt si proponeretur.

P R O B L E M A.

Data recta bisecta, super ipsam constituere triangulum rectangulum, ita vt qua à vertice anguli recti ducitur ad punctum bissectionis, media sit proportionalis inter latera circa rectum. Exemplum II.

SI quis oscitanter huiusmodi Problema resoluendum assumat sic Resolutionem instituet. Proposita recta sit 2 b, dimidium eius erit b, quanta erit, quæ à vertice anguli ad bissectionis punctum; latus vnum circa rectum esto a, aliud erit $\frac{b^2}{a}$; sic enim a; b; $\frac{b^2}{a}$ constituent analogismum; at ob angulum rectum summa quadratorum æquari debet quadrato rectæ quæ supponebatur 2 b; quamobrem $a^2 + \frac{b^4}{a^2}$ æquabitur $4 b^2$; & sublata fractione $a^4 + b^4$, æquabitur $4 b^2 a^2$, & per antithesin $4 b^2 a^2 - a^4$ æquabitur b^4, cuius æquationis radix eruitur iuxta præcepta iam tradita. *Aduertenda quædam.*

Sed vide, quàm incautè incesserit Analysta; plurimis enim tricis inuoluitur, cùm tamen facillima via propositum consequi liceat, sic ratiocinando. Triangulum quæsitum cùm rectangulum sit, necessariò erit in semicirculo; hoc itaque descripto supra datam rectam imaginemur triangulum esse descriptum, cùmque recta à vertice ad bissectionis punctum hypothenusæ, seu rectæ datæ sit semidiameter circuli, subtendet sextantem totius peripheriæ, quo diuiso bifariam, hinc ductis rectis ad extrema diametri constitutum erit quæsitum triangulum, quod facile demonstrabitur. Hoc vnum exemplum adduxisse sufficiat, vt quisque cautus factus antequam ad Resolutionis aliquem modum se adigat, sedulò meditetur Problematis naturam; passim enim aduertet, nisi diligentiam adhibuisset se per viam illam fuisse incessurum, quæ ei dedecoris non parum attulisset; maximum enim existimandum est peccatum in Arte per obscura incedendo, in ea quæ obuia maximè sunt, non impingere. *Cautius procedendum Analystæ.*

Obseruandum autem, quod si resolutio ad solida ascenderit; nec alia ratione institui possit; sumpti Porismatis per modum Propositionis veritas analyticè est inquirenda; nam inde Theorema deducetur, in quo veritas demonstrabitur, & ostendetur quod Porisma dictauit; atque adeò rectè illud effectionem præcepisse; sed de hoc infra suo proprio Capite differemus. *Obseruanda quædam.*

P R O B L E M A.

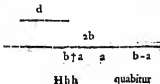
Datum latus bifariam diuisum, iterum in partes inaquales dispescere, vt rectangulum sub partibus ipsis inaqualibus ad quadratum intermedij segmenti, propositam rationem obtineat. Exemplum III.

Vulgaris Resolutio foret hunc in modum.

R E S O L V T I O I.

Data sit ratio vt b ad d.

LAtus diuidendum sit 2 b, ita vt eius dimidium sit b, pars intermedia sit a; maior enim pars erit b + a, minor verò b − a; rectangulum sub partibus erit $b^2 - a^2$; ergo vt b, ad d, ita $b^2 - a^2$, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs $b a^2$ æquabitur $d b^2 - d a^2$, & per antithesin $b a^2 + d a^2$ æ-



quabitur d b²; omnibus applicatis ad b + d, & a² æquabitur $\frac{d b^2}{b+d}$ tollatur fractio faciendo, vt b + d ad d, ita b², ad aliud planum, nempè s²; seu fiat vt b + d, ad d, ita b ad r, & inter b, r, media fit s proportionalis, erit vt b, ad r, ita b², ad s²; atque adeo vt b + d ad d; ita b² ad s², sed a² æquatur s²; vnde a, media quoque erit inter b, & r; Hinc

PORISMA.

Fiat vt dimidium lateris diuidendi plus consequenti data rationis ad ipsum terminum consequentem, ita dimidium prædictum ad aliam magnitudinem; inter hanc enim & ipsum dimidium media proportionalis, quantitatem ignotam exhibebit.

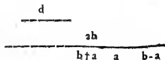
Hæc tamen Resolutio non admittit regressum nisi per comparationem solidorum. Aliter ergo adhibitis *Vicarijs* quantitatibus.

RESOLVTIO II.

Latus diuidendum sit a b, & ratio data sit vt b, ad d, vt Problema requirit; pars intermedia esto a; sic enim pars vna scilicet maior erit b † a, altera erit b — a; rectangulum sub partibus est b² — a².

Quantitates b; r, *Vicaria* ab Auctore dicuntur.

Quoniam igitur est vt b, ad d, ita b² — a² ad a²; ergo componendo erit, vt b † d, ad d, ita b², ad a²; sed vt b † d, ad d, ita sit b ad r; ergo vt b, ad r, ita erit b², ad a²; ergo erit vt b ad s, mediam proportionalem inter b, & r, ita b, ad a; ergo a, media est proportionalis inter b, & r. Hinc

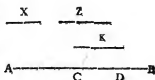


PORISMA.

Fiat vt dimidium lateris diuidendi, plus consequente data rationis ad ipsum consequentem; ita idem dimidium ad aliam magnitudinem; inter hanc enim, & ipsum dimidium media proportionalis, quantitatem ignotam exhibebit.

COMPOSITIO.

Sit A B bifariam diuisa in C, diuidenda quidem in D, vt rectangulum A D B, ad quadratum C D sit, vt A C ad X; fiat vt A C plus X, ad X, ita A C ad K, & inter A C, & K, media sit Z, cui fiat æqualis C D; Dico rectangulum A D B ad quadratum C D esse, vt A C ad X.



Ex constructione.

Quoniam enim est vt A C, plus X, ad X, ita A C ad K; est autem z media proportionalis inter A C, & K, seu C D media proportionalis inter A C, & K; ergo erit vt AC, plus X, ad X, ita quadratum A C, ad quadratum C D; ergo diuidendo erit vt A C, ad X, itá quadratum A C, seu C B, minus quadrato C D, hoc est rectangulum A D B, ad quadratum C D. Quod oportebat &c.

PROBLEMA.

Exemplum IV.

Datis duobus lateribus vnum ipsorum ita producere, vt rectangulum contentum sub composito ex dato, & adiuncto, & sub adiuncto, ad quadratum alterius itidem dati, datam habeat rationem.

RESOLVTIO I.

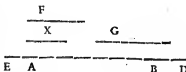
Datum sit latus b, & oporteat illi adiungere aliud, at rectangulum sub aggregato ex dato, & adiuncto, & sub adiuncto, ad quadratum alterius lateris dati d, datam habeat rationem, vt b, ad r; Latus adiungendum esto a, aggregatum erit b + a, rectangulum sub

ſub hoc,& ſub a,eſt $b a \dagger a^2$;vt autẽ eſt b,ad r,ita debet eſſe $b a \dagger a^2$,ad d^2;multiplicatis extremis, & medijs fiet $r b a \dagger r a^2 = b d^2$; omnibuſque applicatis ad r, fiet $b a \dagger a^2 = \frac{bd^2}{r}$; tollatur fractio faciendo, vt r, ad b, ita d^2, ad z^2, & erit $b a \dagger a^2 = z^2$, quæ æquatio ad analogiſmum ſi reuocetur fiet vt $b \dagger a$, ad z, ita z, ad a. Hinc

PORISMA.

Fiat vt terminus conſequens ad terminum antecedentem datæ rationis, ita quadratum ſecundi lateris dati, ad quadratum aliud, cuius latere, tanquàm medio e tribus proportionalibus, & latere, cui debet fieri additio, tanquàm differentia extremorum laterum, reperiantur extrema latera; minus enim ex his quæſitam quantitatem repræſentabit.

COMPOSITIO.



Datum ſit latus A B, cui fieri debeat additio, ita vt rectangulum ſub aggregato, ex latere A B, & addito,& ſub addito ad quadratum dati lateris F, rationem habeat vt A B ad X. Fiat vt X, ad A B, ita F quadratum, ad quadratum G;mox verò G, tanquàm medio, & A B, tanquàm differentia extremorum è tribus proportionalibus, reperiantur extrema E B, B D, quorum minus ſit B D. Dico rectangulum A D B ad quadratum F, eſſe vt A B ad X. Quoniam enim eſt, vt E B ad G, ita G ad B D, erit rectangulum E B D, ſeu A D B, hoc eſt rectangulum A B D, plus quadrato B D, æquale quadrato G; ſed vt eſt X ad A B, ita quadratum F, ad quadratum G, ex conſtructione; propterea quadratum G æquabitur rectangulo orto, ex applicatione ſolidi ſub A B, in quadratum F, ad magnitudinem X. ergo quadratum B D, vnà cum rectangulo A B D æquabitur plano prædicto; omnibus igitur ductis in X, ſolidum ſub X, in rectangulum A B D, vnà cum ſolido ex X, in quadratum B D, æquabitur ſolido ex A B in quadratum F; ergo erit vt A B ad X, ita rectangulum A B D, plus quadrato B D, hoc eſt rectangulum A D B, ad quadratum F.

Hæc tamen Compoſitio minus eſt commendabilis, quod per ſolidorum comparationem procedat repetitis Analyſeos veſtigijs; longè autem melius, ſaltem clariùs eadem effectio ſic demonſtrabitur.

Quoniam igitur eſt vt X ad A B ex conſtructione, ita quadratum F ad quadratum G; ergo conuertendo erit vt AB ad X, ita quadratum G ad quadratum F, ſed quadrato G æquale eſt rectangulum E B D, ſeu A D B ex conſtructione; ergo erit vt A B ad X, ita rectangulum A D B, ad quadratum F; hæc tamen compoſitio ac demonſtratio, non procedit per Analyſeos veſtigia.

Alia igitur ineunda reſolutio hunc in modum.

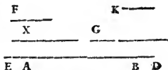
RESOLVTIO II.

Quoniam igitur eſt vt b, ad r, ita $b a \dagger a^2$ ad d^2; ſi igitur fiat vt b ad r, ita s, ad d, erit vt s, ad d, ita $b a \dagger a^2$, ad d^2; ſed vt s ad d, ita eſt rectangulum s d, ad d^2; ergo eadem eſt ratio $b a \dagger a^2$, ad d^2, quæ eſt s d, ad d^2; ergo s d æquabitur $b a \dagger a^2$; ergo vt $b \dagger a$, ad d, ita s, ad a; reperiatur media inter d, & s, datas quantitates, eaque ſit z. hinc

PORISMA.

Media iam inuenta ſit quoque media è tribus proportionalibus, extremorum autem differentia ſit latus cui fieri debet additio; reperiantur extrema latera, ex his enim minus, quæſitam repræſentabit quantitatem.

COMPOSITIO.



Datum sit latus, cui fieri debet additio A B, & oporteat huic addere latus &c. ratio data sit vt A B ad X, quam rectangulum sub aggregato ex dato, & adiuncto, & sub adiuncto, debet habere ad quadratum F; fiat vt X, ad A B, ita F ad aliam G; mox verò inter F, G, media sit K, & hac, tanquàm medio, & A B, tanquàm differentia extremorum è tribus proportionalibus, reperiantur extrema latera, quorum minus sit B D, maius autem E B. Dico rectangulum A D B, ad quadratum F, esse vt A B, ad X.

Quoniam enim ex constructione est, vt E B, seu A D, ad K, ita K ad B D; sed K est media proportionalis inter F, & G; ergo erit vt A D ad F, ita G ad B D; ergo rectangulum ADB, æquabitur rectangulo sub F, & G; ergo eadem est ratio rectanguli sub F, & G ad quadratum F, quæ est rectanguli A D B, ad idem quadratum F; sed rectangulum sub F, & G, ad quadratum F, est vt G ad F; ergo rectangulum A D B ad quadratum F, erit vt G ad F; sed vt G ad F, ita est A B ad X; ergo vt A B ad X, ita erit rectangulum A D B, ad quadratũ F.

Problema.

Exemplum VII. *E tribus lateribus continuè proportionalibus, dato medio, inuenire extrema, vt maius, plus multiplici medio, ad minus, plus æquè multiplici medio, datam rationem obtineat.*

Datum sit medium latus b, & ratio data sit vt b, ad r, quam debet habere maius plus, exempli gratia, triplo medio, ad minus plus triplo medio.

RESOLVTIO.

Latus maius quæsitum esto a; medium autem datum est b; propterea minus erit $\frac{bb}{a}$; at verò maius plus triplo medio est $a + 3b$; sed minus plus triplo medio, seu quod idem est triplum medium plus minori est $3b + \frac{bb}{a}$. Quoniam igitur est vt b, ad r, ita $a + 3b$, ad $3b + \frac{bb}{a}$; ergo permutando erit vt b, ad $a + 3b$, ita r, ad $3b + \frac{bb}{a}$, & conuertendo, vt $3b + \frac{bb}{a}$ ad r; ita $a + 3b$ ad b. Est autem vt a, ad b, ita b, ad $\frac{bb}{a}$; ac propterea, vt mox constabit, vt $b + \frac{3bb}{a}$, ad $\frac{bb}{a}$, ita $a + 3b$, ad b; ergo vt $3b + \frac{bb}{a}$, ad r, ita $b + \frac{3bb}{a}$ ad $\frac{bb}{a}$; ergo triplatis consequentibus erit vt $3b + \frac{bb}{a}$ ad 3 r, ita $b + \frac{3bb}{a}$ ad $\frac{3bb}{a}$; ergo diuidendo vt $3b - 3r + \frac{bb}{a}$, ad 3 r, ita b, ad $\frac{3bb}{a}$. Claritatis gratia, loco ipsius $3b - 3r$, substituatur m, perindeque sit ac vt $m + \frac{bb}{a}$ ad 3 r, ita b, ad $\frac{3bb}{a}$; ergo subtriplatis consequentibus erit vt $m + \frac{bb}{a}$, ad r, ita b, ad $\frac{bb}{a}$.

Vides igitur quatuor esse proportionales magnitudines, quarum extremæ $m + \frac{bb}{a}$, & $\frac{bb}{a}$, differunt per m; atque adeo per $3b - 3r$ datam magnitudinem; mediæ verò sunt r, & b datæ, rectangulum sub quibus ignorari non potest atque adeo recta, quæ illud possit. Hinc

PORISMA.

Recta, quæ potest rectangulum sub terminis datæ rationis, tanquàm media è tribus proportionalibus, differentia verò inter triplos prædictos terminos, tanquàm differentia extremarum, reperiantur ipsa extrema; minor enim quæ oritur si applicetur quadratum termini antecedentis datæ rationis, quod erat medium è tribus lateribus ad latus maius, est latus minus quæsitum &c.

Lemma.

Quod autem si fuerit vt a, ad b, ita b, ad $\frac{bb}{a}$, debeat etiam esse vt $b + \frac{3bb}{a}$ ad $\frac{bb}{a}$, ita $a + 3b$, ad b. sic planum fiet. *Cùm enim fuerint tres magnitudines proportionales, fuerintque acceptæ duæ magnitudines in eadem ratione ad secundam & tertiam, erit vt prima plus magnitudine respi-*

respiciente secundam ad secundam, ita secunda plus magnitudine respiciente tertiam ad tertiam; at verò a est prima: b, secunda: $\frac{b^2}{a}$ tertia; vtque est 3 b, ad b, ita $\frac{3b^2}{a}$ ad $\frac{b^2}{a}$; propterea, vt dicebamus quemadmodum est a † 3 b, ad b ita b † $\frac{3b^2}{a}$, ad $\frac{b^2}{a}$.

COMPOSITIO.

X

F GH A D C B E

Datum sit latus medium A B, dataque sit ratio A B ad B C; erit autem vt patet maioris ad minus, & inter A B, B C, media sit adinuenta proportionalis X, & B A protracta ad partes A in F, ita vt F B sit multiplex ipsius A B, vt Problema requirit, nempè tripla. Deinde ex F B, ablata F H tripla ipsius C B, vt remaneat H B pro differentia, quæ est inter triplos terminos datæ rationis; mox verò recta X, tanquàm media, quæ fuit adinuenta potens rectangulum A B C, & H B, tanquàm differentia extremorum laterum, reperiantur extrema B G, G H; fiat autem A D æqualis ipsi G H, & fiat vt A D ad A B, ita A B ad A E. Dico esse, vt A E, plus tripla A B, ad A D, plus tripla A B, ita A B ad B C.

Erit GH, minor quàm AB, cum X sit eadem AB minor.

Quoniam igitur ex constructione vt est G B, hoc est B H, plus G H, seu plus A D, ad X, ita X ad G H, siue A D, erit rectangulum B G H æquale quadrato X; sed eidem æquale est ex constructione rectangulum A B C; ergo rectangulum B G H æquabitur rectangulo A B C; ergo erit, vt B G, hoc est vt B H, plus H G, ad B C, ita A B, ad G H; ergo triplatis consequentibus vt B H, plus G H, ad triplam C B, hoc est ad F H, ita A B, ad triplam G H, & componendo vt B H, plus tripla C B, hoc est plus F H, hoc est vt B F, plus G H, siue A D, ad F H; ita A B, plus tripla G H, ad triplam G H; ergo subtriplatis consequentibus erit vt B F, nempe tripla A B, plus G H, siue A D, ad C B, ita A B, plus tripla G H, siue A D, ad ipsam G H, vel A D; cùmque sit vt A E ad A B, ita A B ad A D; Id enim conuertendo ex construtione; atque adeo vt A B plus tripla G H, ad G H, seu A D, ita A E, plus tripla A B ad AB; ergo vt tripla A B plus A D ad B C ita A E plus tripla A B ad A B. conuertendo propterea erit vt A B ad A E, plus tripla A B, nempè F B, ita C B ad triplam A B, seu ad F B, plus G H, vel A D; ergo permutando vt A B, ad C B, ita A E, plus F B, hoc est tripla A B, ad eadem F B, seu tripla A B, plus A D.

Quod autem diximus de multiplici ratione tripla, de alia quacunque multiplici ratione intellige. Imò potest Problema vniuersaliùs concipi.

E tribus lateribus proportionalibus dato medio, extrema reperire latera vt maius cum medio, plus aliqua magnitudine, quæcunque huius sit ratio ad medium, sit ad minus, plus eadem magnitudine in data ratione.

Problema.

Dato vno ex lateribus trianguli, rectum angulum ambientibus, datoque aggregato ex reliquo latere, & basi, reperire triangulum. Exemplum VIII.

RESOLVTIO.

d

b

Datum sit latus circa rectum d; reliquorum aggregatum sit b. Oporteat &c. latus alterum circa rectum esto a, basis igitur erit b -- a. quadratum istius est b^2 -- 2 b a ✱ a^2. illius autem quadratum est b^2 -- 2 b a; quod æquabitur d^2, & per antithesin 2 b a æquabitur b^2 -- d^2 quare fiet analogismus 2 b; ℞ (b^2 -- d^2); a. Hinc

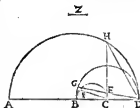
PORISMA.

Vt duplum aggregati dati, ad rectam, quæ potest differentiam inter quadratum aggregati dati, & quadratum dati lateris, ita huiusmodi linea ad aliud; hoc enim erit latus alterum circa rectum.

COM-

COMPOSITIO.

Datum sit B D, aggregatum ex latere circa rectũ, & ex basi. Datumque sit z latus alterum circa rectum. Oporteat facere &c.



Supra B D describatur semicirculus B G D, in quo accommodetur B G æqualis Z; ducaturque G D; duplicetur B D in A, & super A D, describatur semicirculus A H D; in quo accommodetur D H, æqualis D G, ex puncto autem H, cadat perpendicularis HC, secans A D in C. Mox autem supra B G describatur semicirculus B F C in quo accommodetur C F, æqualis C D ducaturque B F. Dico triangulum B F C, Problemati satisfacere. Quandoquidem triangulum B F C, vtpote constitutum in semicirculo rectangulum est, & laterum B C, C F, aggregatum æquale est aggregato dato B D; siquidem B C communis est, & C F facta est æqualis C D. Superest, vt ostendamus B F, latus alterum circa rectum æquale esse B G, siue Z lateri dato. Id autem sic demonstrabimus. Quoniam igitur est, vt A D, ad D H, seu D G, ita D G ad D C; erit rectangulum A D C, hoc est duplum rectangulum B D C, æquale quadrato G D, nempe differentiæ inter quadratum B D, & B G. vtrinque addito quadrato B G, fiet duplum rectangulum B D C, vna cum quadrato B G, æquale quadratis B G, G D, hoc est quadrato B D, vtrinque sublato duplo rectangulo B D C remanebit quadratum B G, æquale quadrato B D minus duplo rectangulo B D C; at quadratum B D minus duplo rectangulo B D C æquale est differentiæ quadratorum B C, C D, hoc est B C, C F, differentia verò quadratorum B C, C F, est quadratum B F, ergo quadratum B G æquabitur quadrato B F, ergo B G æquabitur B F, atque dato Z. Dato igitur vno ex lateribus trianguli &c. triangulum adinuenimus Quod facere oportebat &c.

Problema.

Exemplum VIIII.

Datum latus ita dispescere, vt rectangulum sub toto, & parte, ad quadratum alterius partis sit in ratione data.

RESOLVTIO I.

d

b

a   b − a

Datum sit latus b, diuidendum, vt rectangulum sub toto, & parte, ad quadratum alterius partis sit in ratione, vt b ad d. Pars vna esto a, altera erit b − a, rectangulum sub tota, & parte b − a erit $b^2 - ba$; quadratum alterius partis est a^2; ergo vt b, ad d, ita $b^2 - ba$, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs, fiet æquatio $ba^2 = db^2 - dba$; & per antithesin $ba^2 + dba$ æquabitur db^2; omnibus applicatis ad b; $a^2 + da$ æquabitur db, huius æquationis radix est $R(\frac{1}{4}d^2 + bd) - \frac{1}{2}d$. Hinc

PORISMA.

Ad quadratum dimidij termini consequentis addatur rectangulum sub eodem termino & latere diuidendo, ex aggregati latere subtrahatur dimidium ipsius termini. Vel

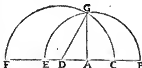
Fiant tria latera proportionalia, ita vt extremorum differentia sit terminus consequens, medium autem sit id quod potest rectangulum sub latere prædicto, & latere diuidendo; hoc est

Termino consequente datæ rationis tanquam differentia extremorum & rectangulo sub terminis ipsis tanquam rectangulo sub extremis tria latera proportionalia reperiantur; minus enim extremum ignotam quantitatem exhibebit.

COM-

COMPOSITIO.

Datum sit latus A B diuidendum, vt Problema requirit; ratio data sit vt A B ad E A, super rectam E B describatur semicirculus E G B, & ex puncto A excitetur perpendicularis A G, quæ poterit rectangulum E A B, comprehensum sub terminis E A, A B, datæ rationis; mox autem termino consequente E A bissecto quidem in D, agatur DG, & centro D, interuallo D G, describatur semicirculus F G C secans A B, in C. Dico rectangulum A B C, ad quadratum A C esse, vt A B ad E A; Protrahatur B E ad partes F, donec occurrat circumferentiæ in F.



Quoniam igitur rectangulum F A C æquale est quadrato A G, cui æquale est rectangulum B A E; ergo rectangulum F A C æquabitur rectangulo B A E, quare vt F A, ad A E, ita B A ad A C; & diuidendo vt F E, ad E A, ita B C, ad C A; Est* autem F E æqualis A C; ergo vt C A ad A E, ita B C ad C A; ergo rectangulum sub E A, & C B æquabitur quadrato A C; ob id rectangulum A B C ad quadratum A C eandem habebit rationem, quam habet ad rectangulum sub E A, & C B; sed rectangulum A B C, ad rectangulum sub E A, & C B rationem habet vt A B, ad EA, ob eandem altitudinem C B; ergo rectangulum A B C, ad quadratum A C rationem habebit vt A B ad E A.

*Est enim D E, æqualis A D; & D F, æqualis D C, ergo F E æquabitur A C.

Hæc tamen Compositio non processit per filium resolutionis, cùm hæc ad solida ascenderit. Longè igitur elegantiùs institui potest resolutio hunc in modum.

RESOLVTIO II.

Iisdem suppositis nempe quod A B sit b, & A E sit d: A C erit a, & C B, erit b - a.

Quoniam igitur est vt b, ad d, ita b^2 - b a, ad a^2; sed vt b, ad d, ob communem altitudinem b - a, ita est b^2 - b a, ad b d - d a; ergo eadem erit ratio b^2 - b a, ad a^2, & ad b d — d a; ergo b d — d a æquabitur a^2; ergo vt b — a, ad a, ita a, ad d; ergo componendo, vt b, ad a, ita a + d, ad d; & conuertendo vt d, ad d + a, ita a, ad b; At verò z possit b d, erit igitur vt d + a, ad z ita z, ad a. Hinc

PORISMA.

Termino consequente rationis datæ, tanquàm differentia extremorum & recta quæ potest rectangulum sub terminis datæ rationis tanquàm medio, reperiantur tria latera proportionalia; minus enim extremum ignotam quantitatem exhibebit.

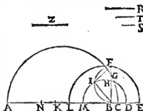
COMPOSITIO.

Eodem schemmate repetito, eademque constructione facta. Quoniam igitur est vt FA, ad A G, ita A G, ad A C; est autem A G potens rectangulum E A B; ergo erit vt Ef, ad F A, ita A C ad A B; & conuertendo vt A B ad A C, ita F A, ad E A; ergo diuidendo vt B A, minus A C, ad A C, ita F E, seu A C ad E A; ergo rectangulum B A E, minus rectangulo E A C æquabitur quadrato A C; ergo, quæ ratio est quadrati A B, minus rectangulo B A C, ad quadratum A C, eadem erit ad rectangulum B A E, minus rectangulo E A C; sed quadratum A B, minus rectangulo B A C, ad rectangulum B A E, minus rectangulo E A C, ob communem altitudinem A B, minus A C, hoc est ob communem altitudinem C B, est vt A B, ad A E; ergo vt A B ad A E, ita quadratum A B, minus rectangulo B A C, hoc est ita rectangulum A B C, ad quadratum A C.

Problema.

Propositum latus in duas partes diuidere vt harum vtriusque, non tamen eadem data partes sico-

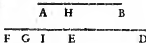
B E æqualis R, & L B sit æqualis Z; super L E describatur peripheria L F E secans G B protractam in F; super B F describatur peripheria B I F, in qua aptetur B I æqualis BG; & agatur FI, cui fiat æqualis B H: mox sit D E æqualis T, vt B D sit differentia inter B E, & D E. puncto in A B tanquam centro describatur peripheria transiens per puncta D, H, vt sæpe dictum fuit secans A B in M, eritque B M particula habens ad suam partem proportionem, vt S, ad T; fiat igitur vt S ad T, ita B M, ad BK, & quidem B K erit pars, si itaque N K signetur æqualis L M, habebitur particula N K, quæ ad A K habebit rationem vt S ad R, & cum M B conficiet magnitudinem L B seu Z. Hactenus effectio Geometrica. Demonstratio sic se habet.



Quoniam igitur M B oritur ex applicatione quadrati B F, minus quadrato ex B G, seu B I, hoc est quadrati F I, seu B H, ad B E, minus D E, hoc est ad B D, seu quod idem est ex applicatione rectanguli L B E, minus rectangulo A B C ad B E minus D E; fiet M B E rectangulum minus rectangulo sub M B, in D E æquale rectangulo L B E, minus A B C rectangulo, atque adeo rectangulum L B E, minus rectangulo M B E, plus rectangulo M B in D E, æquabitur A B C rectangulo; applicatis autem omnibus ad B C fiet $\frac{LBE - MBE + MB \text{ in } DE}{BC} = AB$, seu $\frac{LBE - MBE}{BC} + \frac{MB \text{ in } DE}{BC}$, seu $\frac{LM \text{ in } BE}{BC} + \frac{MB \text{ in } DE}{BC} = AB$, hoc est ortiua magnitudo ex prædicta applicatione æqualis A B. magnitudo ortiua ex applicatione L B E minus M B E ad B C sit Y. & ex applicatione M B in D E ad B C sit Z; sic enim hæc ad Geometricam phrasin erunt eleganter traducta; vnde Y plus Z æquabitur A B. Cumque sit vt B C ad D E, ita M B, ad Z quod oritur ex applicatione M B in D E ad B C, factumq; sit vt B C ad D E, seu vt S ad T, ita M B, ad K B, erit K B, id quod ex huiusmodi applicatione oritur, nempe æqualis Z quod cum Y latere oriente ex applicatione L B E, minus M B E ad B C, efficiet A B, efficit autem A B si addatur ipsi A K; ergo A K erit quod ex huiusmodi oritur applicatione, & æquabitur Y. Reliquum verò est, vt N K ostendatur esse ad A K, seu Y vt B C ad B E, seu vt S ad R; nam cum M B facit magnitudinem æqualem L B, seu Z. Quoniam ergo est vt B C ad B E, ita L B, minus M B, hoc est L M, hoc est N K ad id quod oritur ex applicatione L B E, minus M B E, ad B C; sed A K seu Y, est id, quod oritur ex huiusmodi applicatione vt dictum est; ergo vt B C ad B E, seu vt S ad R, ita erit N K ad A K. Diuisum est ergo latus A B in K, ita vt particula eius M B, ad quam K B est vt T ad S, vna cum N K particula, ad quam pars A K rationem habet vt R ad S, conficit datam magnitudinem Z. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Si ratio fuerit multiplex, hunc in modum ratiocinandum. Latus diuidendum sit A B; conficiendum verò F I. Sumatur F D sextuplum ipsius F I, à quo subtrahatur E D æqualis A B; residuum F E diuidatur in quatuor partes; eiusq; pars quarta sit F G, hæc enim erit quantitas quæsita; Si itaque in A B, signetur A H æqualis dupla F G, erit quidem AH vna ex partibus, cuius dimidium, nempe F G, vna cum G I sexta parte ipsius H B, conficiet F I.



Et quoniam F G, vna cum G I, conficit F I latus conficiendum; estque F G, dimidium ipsius A H ex constructione; superest ostendendum G I, esse sextam partem ipsius H B.

Quoniam igitur F G, quarta pars est ipsius F E; hoc est, quarta pars est recta F D, sextupli, conficiendi lateris F I, minus E D, seu A B, latere diuidendo; propterea quadrupla F G, æquabitur sextuplo F I minus E D; ergo per antithesin F D, hoc est sextuplum F I minus quadruplo F G, hoc est F E, æquabitur E D seu A B; Itaque pars vna ipsius A B, erit dupla F G nempe A H; altera, puta H B erit F D, nempe sextuplum F I minus sextuplo F G. Hunc enim in modum dupla F G, addita ipsi F D, nempe sextuplo F I, minus sextuplo F G, facit E D, seu A B, est autem

F I minus F G hoc est G I sexta pars sextupli F I minus sextuplo F G. quod erat æquale H B. ergo G I erit sexta pars ipsius H B. Quod erat opera pretium efficere.

Problema.

Exemplum IX.

Latus reperire, à quo ablatis duobus datis lateribus, residua constitutam inter se rationem habeant.

DAta sint duo latera b, d, illud quidem maius hoc autem minus, ratio autem quam habere debet residuum maius sit vt r, ad s; latus de quo quæritur esto a, à quo si auferatur d, fiet residuum maius, si verò ab eodem auferatur b; fiet residuum minus; vt autem est r ad s maius ad minus, ita debet esse a -- d; ad a -- b; resoluto analogismo in æqualitatem, fiet æquatio s a -- s d = r a -- r b. & post debitas transpositiones, fiet demum r a -- s a = r b -- s d; quod si aquatio magis per diuisionem explicetur, fiet æquatio $\frac{rb - sd}{r - s}$ = a, qua reuocata ad analogismum, fiet r -- s. ad ℞ (r b -- s d) ita hoc ad a. Hinc

PORISMA.

Latus quadratum differentia duorum rectangulorum, seu quod idem est, recta qua potest differentiam duorum rectangulorum, quorum vnum sit sub dato latere maiori, maiorique termino data rationis; aliud verò sub dato latere minori, minorique termino rationis data, medio loco proportionalis est inter differentiam terminorum rationis data, & latus de quo quæritur.

COMPOSITIO.

DAta sint duo latera B E, C E, ratio verò constituta sit vt R ad S. protrahatur B E vsque ad H, & E H æqualis sit ipsi R: at verò inter B E, E H, media reperiatur proportionalis E M; [a] signetur autem E F æqualis S, & inter C E, E F media reperiatur E N; [b] super M E describatur peripheria M K E; facto autem centro E, interuallo E N, describatur arcus NK secans peripheriam M K E in K, ducaturque K M, cui fiat æqualis E L; at verò secetur G H æqualis E F, agaturque G L, quæ bifariã secetur in I. ducatur I D ad rectos angulos supra G L occurrens B E in D; centro autem D, interuallo D G describatur peripheria, quæ necessario transibit per I, vt ex Elementis facile constare potest; secet autem E B protractam ad partes B in A; & factum erit quod Porisma iubet. Dico latus quæsitum esse A E, ita vt residuum maius A C ad residuum minus A B sit vt E H ad E F. Quoniam enim E G, E L, & A E, sunt continuè proportionales, & E G est differentia inter E H, & E F, ita vt æqualis sit ipsi E H, minus E F, & quadratum ex E L æquale est rectangulo B E H, minus rectangulo C E F; quadratum autem ex E L si applicetur ad E G, emergit A E; [c] rectangulum ergo A E H, minus rectangulo sub G H, vel E F, & A E æquale erit rectangulo sub E H, & B E, minus rectangulo sub E F, & C E; proinde rectangulum A E F, minus rectangulo C E F, æquale erit rectangulo A E H, minus rectangulo B E H; propterea erit vt E H, ad E F, seu G H, ita A E, minus C E, hoc est A C ad A E, minus B E, hoc est ad A B; sed E H, ad E F, vel G H, est vt R ad S, immò sunt ipsemet R, & S; ergo vt R ad S, ita erit A C ad A B; inuentum est ergo latus A E, à quo si auferamus duo data quidem latera, B E, C E, residua nimirum A C, A B, sunt in ratione vt R ad S.

[a] Nempe super B H, descripto semicirculo, erigatur perpendicularis EM

[b] Nempe super C F descripto semicirculo &c.

[c] Ductis omnibus in E G, hoc est E H minus GH seu EF.

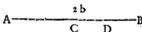
Problema.

Exemplum X.

Propositam rectam A B, bifariam sectam in C, secare iterum in D, inter C, B, vt quadratum A D,

AD, ad aggregatum rectangulorum A C D, A D C, rationem habeat datam: Oportet autem rationem esse maioris ad minus, minorem tamen sesquitertia.

RESOLVTIO I.



VVlgus Analystarum ita procederet A B esto 2 b: vnde A C erit b, quemadmodum & C B; at verò C D esto a, vnde D B, erit b - a, & AD, erit b + a; ratio autem data sit vt r ad s, maioris ad minus, minor tamen ratione sesquitertia. Cùm igitur A D sit b + a, quadratum ipsius erit $b^2 + 2ba + a^2$; sed rectangulum A C D, erit b a: at rectangulum A D C erit $ba + a^2$, horum aggregatum est $2ba + a^2$; vt igitur est r ad s, ita debet esse $b^2 + 2ba + a^2$ ad $2ba + a^2$, multiplicatis extremis, & medijs, $2rba + ra^2$ æquabitur $sb^2 + 2sba + sa^2$; & per antithesin $2rba - 2sba + ra^2 - sa^2$, æquabitur sb^2; omnibus applicatis ad r - s, quantitas, in quam ducitur potestas, & $-\frac{2rba - 2sba}{r-s} + a^2$, æquabitur $\frac{sb^2}{r-s}$; ad tollendam fractionem fiat, vt r - s, ad s, ita b^2, ad z^2. Deinde vt r - s, ad r - s, ita 2 b, ad 2 b; vnde $2ba + a^2$ æquabitur z^2, cuius radix est ℞ $(b^2 + z^2) - b$. Et hinc colligitur Porisma &c.

Sed hæc resoluendi ratio vt vulgaris est, ita minus instituto accommodata; non enim suppeditat viam ad componendum, nisi per obscuram solidorum comparationem; longè tamen elegantius sic procedere licebit, per proportionalia nimirum, discurrendo hunc in modum.

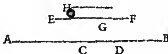
RESOLVTIO II.

QVoniam igitur est vt r ad s, ita $b^2 + 2ba + a^2$, ad $2ba + a^2$; ergo per conuersionem rationis erit vt r, ad r - s, ita $b^2 + 2ba + a^2$, ad b^2, & conuertendo, vt r - s, ad r, ita b^2, ad $b^2 + 2ba + a^2$; ergo vt $r^2 - 2rs + s^2$, ad $r^2 - rs$, hoc est vt quadratum ex r - s, ad quadratum mediæ inter r - s, & r, ita b^2, ad $b^2 + 2ba + a^2$; ergo vt r - s, ad ℞ $(r^2 - rs)$ quæ breuitatis gratia nuncupetur g, ita erit b, ad b + a. Hinc

PORISMA.

Fiat vt differentia terminorum rationis data ad mediam proportionalem inter huiusmodi differentiam, & terminum maiorem, ita dimidium lineæ diuidendæ ad aliam; huius enim excessus (excedet autem supra dimidium iam dictum) radicis valorem exhibebit.

COMPOSITIO.



PRoposita sit recta A B bifariam diuisa in C, & ratio data sit vt E F, ad F G, oporteat facere quod iniunctum est. Inter E G differentiam terminorum datæ rationis, & EF terminum maiorem sit adinuenta quædam proportionalis media H; fiat autem iuxta Porisma vt E G ad H, ita A C ad A D, erit enim C D radicis valor, ita vt quadratum ipsius AD, ad aggregatum rectangulorum A C D, A D C, sit vt E F ad F G; hoc autem repetitis Analyseos vestigijs sic demonstrabimus.

Quoniam enim ex constructione est vt E G ad H, ita A C, ad A D; ergo eorum quadrata proportionalia erunt; vt igitur quadratum E G ad quadratum H, ita quadratum A C, ad quadratum A D; ergo vt E G ad E F, ita quadratum A C ad quadratum A D, & conuertendo: ergo vt E F, ad E G, ita quadratum A D, ad quadratum A C; & per conuersionem rationis erit vt E F ad G F, ita quadratum A D, ad excessum, quo quadratum A D superat quadratum A C; huiusmodi autem excessus est duplum rectangulum A C D, plus quadrato C D, seu quod idem est rectangulum A C D, plus rectangulo A D C; ergo vt E F, ad G F, ita quadratum A D, ad aggregatum rectangulorum A C D, A D C. Propositam ergo rectam A B bifariam diuisam in C, secuimus iterum in D, prout Problema requirit.

Vides igitur non satis esse calluisse Algebram, sed oportet etiam in rebus Geometricis eius vsum nouisse.

Determinationis autem ratio ea est.

Lemma I.

Quod autem ratio debet esse maioris ad minus, minor verò ratione sesquitertia, sic ostenditur.

RESOLVTIO.

*Q*Voniam $2\,b\,a + a^2$, *minus est quam* $b^2 + 2\,b^2$; *est autem* b^2 *tertia pars illius aggregati* $b^2 + 2\,b^2$, *hoc est* $3\,b^2$; *ergo tertia pars aggregati* $2\,b\,a + a^2$ *minor erit quàm* b^2; *atque adeo* b^2 *maius erit quam tertia pars aggregati* $2\,b\,a + a^2$; *ergo componendo* $b^2 + 2\,b\,a + a^2$, *maius erit quam sexquitertiũ* $2\,b\,a \dagger a^2$, *sed* $b^2 \dagger 2\,b\,a \dagger a^2$, *est quadratum ex* $b \dagger a$, *&* $2\,b\,a \dagger a^2$, *idem est quod aggregatum rectangulorum* $b\,a$, *&* $b\,a \dagger a^2$ *quorum vnum scilicet continetur sub b, & a, aliud vero sub* $b \dagger a$, *& a; ergo proportio data debet esse maioris ad minus, minor tamen, quàm sexquitertia.*

COMPOSITIO.

QVoniam aggregatum rectangulorum A C D, & A D C minus est aggregato rectangulorum A C B, & A B C; hoc est duplum rectangulum A C D plus quadrato C D, minus est triplo quadrato A C; sed quadratum A C tertia est pars, vtpote subtriplum; ergo tertia pars rectanguli A C D plus quadrato C D minor est, quam quadratum A C; atque adeo quadratum A C maius erit prædicta tertia parte; ergo componendo quadratum A C, plus duplo rectangulo A C D, vnà cum quadrato C D, hoc est quadratum ex A D, maius erit quam sexquitertium dupli rectanguli A C D, plus quadrato C D, seu maius erit quàm sexquitertium aggregati rectangulorum A C D, & A D C, ergo &c.

Problema.

Exemplum. *Dato latere vtcunque diuiso vt multiplex pars vna plus multiplici aggregato ex altera parte & latere adiuncto ad multiplicem eandem partem plus aggregato iam dicto sit in data ratione.*

RESOLVTIO I.

DAtum sit latus D B vtcunque diuisum in A, eique sit opus addere B C, ea lege vt quadrupla D A plus tripla A C, ad duplam D A plus A C, sit vt A B, ad B C.

d		b		a	
D		A		B	C

Propositum latus A B sit b; & D A, sit d: at verò latus addendum esto a; vt autem A B ad B C, hoc est vt b ad a, ita debeat esse quadrupla D A, plus tripla A C, hoc est $4\,d + 3\,b \dagger 3\,a$, ad duplam D A plus A C, hoc est ad $2\,d \dagger b \dagger a$; factum igitur sub extremis æquabitur facto sub medijs; ac ob id $4\,d\,a \dagger 3\,b\,a \dagger 3\,a^2$ æquabitur $2\,b\,d \dagger b^2 \dagger b\,a$; & per antithesin $4\,d\,a \dagger 2\,b\,a \dagger 3\,a^2$ æquabitur $2\,b\,d \dagger b^2$; omnibus diuisis per 3, fiet $\frac{4}{3}\,d\,a \dagger \frac{2}{3}\,b\,a \dagger a^2 = \frac{2}{3}\,b\,d \dagger \frac{1}{3}\,b^2$; loco autem ipsius $\frac{4}{3}\,d \dagger \frac{2}{3}\,b$, ad confusionem tollendam substituatur p; & loco $\frac{2}{3}\,b\,d \dagger \frac{1}{3}\,b^2$, substituatur z^2; erit quidem æquatio $p\,a \dagger a^2 = z^2$, cuius radix $R(\frac{1}{4}\,p^2 \dagger z^2) - \frac{1}{2}\,p$. Hinc

PORISMA.

Sumatur dimidium aggregati ex quatuor tertijs partibus ipsius D A, & duabus tertijs partibus ipsius A B, eius autem quadratum addatur ad aggregatum è duabus tertijs partibus rectanguli D A B, tertiaque parte quadrati ex A B; aggregati verò latus multetur supradicto dimidio; quod enim superest erit quantitas quæsita B C; vnde quæsita quantitas B C data erit.

RE-

RESOLVTIO II.

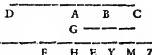
IDem quoque Porisma colligeretur ita ratiocinando. Quoniam est vt b ad a; ita $4d + 3b + 3a$. ad $2d + b + a$. ergo per conuersionem rationis vt b ad $b - a$, ita $4d + 3b + 3a$. ad $2d + 2b + 2a$, & permutando vt b ad $4d + 3b + 3a$, ita $b - a$ ad $2d + 2b + 2a$; vnde fit æqualitas $2bd + 2b^2 + 2ba = 4bd + 3b^2 - 4da - 3a^2$ & per antithesin $4da + 2ba + 3a^2 = 2bd + b^2$.

Omnibus autem diuisis per 3; & $\frac{4}{3}da + \frac{2}{3}ba + a^2 = \frac{2}{3}bd + \frac{1}{3}b^2$. sed elegantius hunc in modum.

RESOLVTIO III.

Quoniam est vt $4d + 3b + 3a$ ad $2d + b + a$; ita b ad a, ergo permutando vt $4d + 3b + 3a$ ad b, ita $2d + b + a$ ad a, ergo diuidendo vt $4d + 2b + 3a$ ad b ita $2d + b$ ad a ergo fiet æquatio $4da + 2ba + 3a^2 = 2bd + b^2$ ergo $\frac{4}{3}da + \frac{2}{3}ba + a^2 = \frac{2}{3}bd + \frac{1}{3}b^2$. Hinc idem Porisma.

COMPOSITIO.



EXponatur Y Z æqualis A B & protrahatur in E, vt E Y sit tertia pars ipsius Y Z, seu A B. Deinde Z E, sic producatum in F, vt E F sit duæ tertiæ partes ipsius D A; mox autem inter F Y, & Y Z media reperiatur proportionalis G; Deinde protrahatur Z F, ad partes F, & accipiatur Y H æqualis duplæ E Y, seu duabus tertijs partibus ipsius A B; item K H æqualis duplæ F E; ac propterea quatuor tertijs partibus ipsius D A; mox autem recta K Y tanquam differentia extremorum, & quadrato ex G, tanquam rectangulo sub lateribus, è tribus lateribus proportionalibus reperiantur extrema latera I Y, Y M; producatur D B in C, ita vt B C sit æqualis Y M. Dico D B productam esse vt Problema requirit.

Quoniam enim rectangulum I Y M æquale est quadrato ex G, cui æquale est rectangulum F Y Z ergo rectangulum I Y M, seu K M Y [a] æquabitur rectangulo F Y Z, hoc est rectangulum sub K H, nempe sub quatuor tertijs partibus ipsius D A in Y M, plus rectangulo sub H Y, nempe sub duabus tertijs partibus ipsius A B, in Y M, vnà cum quadrato Y M æquabitur rectangulo sub F E hoc est sub duabus tertijs partibus ipsius D A in Y Z, seu A B plus rectangulo sub E Y, hoc est tertia parte ipsius Y Z, seu A B, hoc est plus tertia parte quadrati ipsius Y Z, seu A B; ergo triplatis omnibus rectangulum sub quadrupla D A, & Y M, seu B C plus rectangulo sub dupla A B in B C plus triplo quadrato ipsius B C æquabitur rectangulo sub dupla D A in A B plus quadrato A B, reuocata æqualitate ad proportionem, erit vt quadrupla D A, plus dupla A B, plus tripla B C, ad A B, ita dupla D A plus A B ad B C; ergo componendo vt quadrupla A D, plus tripla A B, plus tripla B C ad A B, ita dupla D A plus A B, plus B C ad B C; & permutando vt quadrupla D A, plus tripla A B, plus tripla B C, hoc est vt quadrupla D A plus tripla A C ad duplam D A, plus A B, plus B C, hoc est ad duplam D A plus A C, ita A B, ad B C.

[a] est enim IK, æqualis Y M.

Vsu quam sæpissime accidit vt nos in resoluendo viam ineamus, quæ quamuis feliciter ad finem conducat, tamen opus est eruditione multa cùm alioquin resolutio possit institui per viam magis obuiam, quod vt clariùs appareat, iu[illegible]abit exemplum afferre; nempè

Data perpendiculari, aggregato laterum trianguli, ac differentia segmentorum baseos; reperire triangulum.

Hoc Problema proponit etiam Gheraldus; viam tamen non adeò obuiam calcando; siquidem multas veritates supponit, atque adeò Theoremata demonstrata, quorum cognitio fortasse non statim incidit in mentem Analystæ; est tamen ea resolutionis ratio regia, profectò, quippequæ ea industria procedit, vt à quantitatibus solidis, & etiam imaginarijs declinet. In hac autem resolutione ignota quantitas est basis, & [illegible]ectione comparata in compo-

In huius Problematis resolutione Gheraldus, viam minus obuiã calcauit.

componendo: solùm superest ostendendum constructi trianguli laterum aggregatum æquale esse magnitudini datæ.

Est autem & alia Resolutionis forma, quæ facilè in cuiusque mentem venire potest, in qua ignota quantitas baseos segmentum minus supponitur, eamque Neotericus quidam adhibuit, quamuis in componendo aliqua ex parte defecisse videatur, quæ vt meliùs intelligantur, sit supradictum.

PROBLEMA.

Exemplum XII. *Data perpendiculari, aggregato crurum trianguli, & differentia segmentorum baseos; reperire triangulum.*

RESOLVTIO.

Datum sit crurum trianguli quidem aggregatum b; perpendicularis verò c; differentia segmentorum baseos d.

Et oporteat facere quod imperatum est.

Quoniam igitur est vt laterum aggregatum ad basim, ita differentia segmentorum baseos ad differentiam crurum; si supponamus basim esse a, atque fecerimus, vt b, ad a, ita d, ad aliud, puta $\frac{da}{b}$; hoc plane erit differentia crurum; sed quadratum aggregati crurum plus quadrato differentiæ eorundem, duplum est quadratorum ab ijsdem; propterea $b^2 + \frac{d^2a^2}{b^2}$ æquabitur duplo quadratorum à cruribus; sed hoc æquale est duplo quadratorum à segmentis baseos, plus quadruplo quadrato perpendicularis; ergo $b^2 + \frac{d^2a^2}{b^2}$ æquabitur duplo quadratorum à segmentis $+ 4c^2$; sed duplum quadratorum à segmentis, æquale est quad. baseos, plus quad. differentiæ segmentorum eiusdem; ergo $b^2 + \frac{d^2a^2}{b^2}$ æquabitur $a^2 + d^2 + 4c^2$; Vt autem cognita ab incognitis separentur, nequit vtrinque auferri a^2, & b^2, cùm a^2 vtpotè quadratum baseos maius sit quadrato differentiæ crurum; satis igitur est auferre $\frac{d^2a^2}{b^2}$; d^2, & $4c^2$: vnde $b^2 - d^2 - 4c^2$ æquabitur $a^2 - \frac{d^2a^2}{b^2}$, vel ducto a^2, in b^2, & $b^2 - d^2 - 4c^2$, æquabitur $\frac{b^2a^2 - d^2a^2}{b^2}$, vel loco illius fractionis hęc reponatur $\frac{b^2 - d^2}{b^2}a^2$; cui æquabitur illud idem $b^2 - d^2 - 4c^2$. Resoluta autem fractione iam dicta in sua membra, æqualitas in proportionem transmutabitur; vnde fiet vt $b^2 - d^2$, ad $b^2 - d^2 - 4c^2$, ita b^2, ad a^2; atque adeò eorum latera proportionalia erunt, nempè vt ℞ $(b^2 - d^2)$ ad ℞ $(b^2 - d^2 - 4c^2)$ ita b, ad a; Vnde,

PORISMA.

Vt recta, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum trianguli superat quadratum differentiæ segmentorum baseos, ad rectam, cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata facta ex differentia segmentorum baseos, & perpendiculari dupla; ita crurum aggregatum ad basim.

Hinc autem diligenter est obseruandum, quod ad innumeras resolutiones contexendas conducit, non esse opus semper omnia speciebus in resolutione exhibere, in quo Tyrones plurimùm allucinantur; vides enim duplum quadratorum à cruribus characteribus non exprimi, quod fieri quidem posset; si namque basis est a, differentia segmentorum verò d, segmentum maius foret $d + \frac{a-d}{2}$, segmentum minus esset $\frac{a-d}{2}$. Si igitur quadraticè duceretur $d + \frac{a-d}{2}$ fieret productum $d^2 + da - d^2 + \frac{a^2 - 2da + d^2}{4}$, cui addito c^2, fieret aggregatum, cuius latus esset crus maius: sic de crure minori. Quia tamen hic nulla emergit vtilitas in resoluendo; propterea superuacaneum est characteribus exhibere quadrata crurum, & multò minùs ipsa crura; sed satis sit nominatim dicere quadrata crurum, duplum quadratorum à cruribus &c. Sic de segmentis baseos eorumque quadratis.

COMPOSITIO.

Datum sit laterum aggregatum A B, perpendicularis Z, & differentia segmentorum baseos Y: rectæ AB, tanquàm diametro, descripto semicirculo AEB, aptetur in eo B C æqualis Y: agatur C A: secetur C D æqualis duplæ Z, ducatur D B, cui æqualis in circulo aptetur B E; agatur A E, cui æqualis secetur A F; & per F ducatur F G parallela ipsi C B; erit autem A G trianguli quæsiti basis; factum est enim quod Porisma iubet; à quadrato siqui-

Z ———
Y ————

to ſiquidē aggregati laterum AB, ſubtractum eſt quadratum C B differentiæ ſegmentorum; itaque A C poteſt exceſſum quadrati aggregati laterum ſupra quadratum differentiæ ſegmentorum: & quoniam C D eſt æqualis duplæ Z perpendiculari, B D poterit, ob angulum rectum ad C, quadruplum quadratum perpendicularis, plus quadrato C B, differentiæ ſegmentorum; cùmque E B facta ſit æqualis D B, ipſa quidem A E, hoc eſt illi æqualis A F, poterit exceſſum, quo quadratum A B aggregati laterum ſuperat aggregatum ex quadruplo quadrato perpendicularis, & quadrato differentiæ ſegmentorum, ſeu aggregatum ex quadrato duplæ perpendicularis, & quadrato differentiæ ſegmentorum; factaque eſt F G parallela ipſi C B; quare vt C A ad A F, ita B A ad A G; vnde A G, iuxta Poriſma, erit baſis trianguli quæſiti. Secetur A H æqualis Y: biſſecetur H G in I excitetur perpendicularis I K, æqualis Z: ducatur K G, item A K; & erit triangulum AKG, quod quæritur; nam ſegmentorum baſeos AI, IG, differentia eſt A H ex conſtructione æqualis Y, & perpendicularis I K ex conſtructione eſt æqualis Z. Supereſt oſtendendum crurum aggregatum A K, K G æquale eſſe datæ rectæ A B; quod ſic planum fiet.

Centro K, interuallo K G, deſcribatur circulus, qui neceſſariò tranſibit per H, ſecans A K in M, & eandem protractam in L.

Quoniam igitur quadratum A G, minus quadrato G F, æquale eſt quadrato A F, ſeu A E; at quadratum A E, eſt exceſſus, quo quadratum A B, ſuperat quadratum B E, ſeu B D, ſeu quadrata D C, C B; ergo quadratum A G, minus quadrato G F, æquabitur quadrato A B, minus quadratis D C, C B; vtrinque additis quadratis G F, B C, C D; ergo quadratum A G, plus quadrato B C, plus quadrato C D, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; ſed quadratum B C æquale eſt quadrato A H, & quadratum C D quadruplum eſt quadrati I K, cùm C D ſit eius dupla; ergo quadratum A G plus quadrato A H, plus quadruplo quadrato I K, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; quadratum autem A G, plus quadrato A H æquale eſt duplo quadratorum A I, I G; ergo duplum quadratorum A I, I G, plus quadruplo quadrato I K, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; ſed duplum quadratorum A I, I G, plus quadruplo quadrato I K, æquale eſt duplo quadratorum A K, K G; ergo duplum quadratorum A K, K G, æquabitur quadrato A B, plus quadrato G F; ſed duplum quadratorum A K, K G, ſiue A K, K L, æquale eſt quadrato A L, plus quadrato A M; ergo quadrata A L, A M, quadratis A B, G F, erunt æqualia; Cùmque ſit ut A G ad G F, ità A B, ad B C, ſiue A H, rectangulum H A G, ſeu rectangulum M A L æquabitur rectangulo ſub A B, & G F; erant autem quadrata A L, A M æqualia quadratis A B, G F; ergo A M æquabitur G F, & A L æquabitur A B; ſed A L æqualis eſt aggregato crurum A K, K G; ergo A B æquabitur aggregato crurum A K, K G.

Superius autem Poriſma coincidit cum eo, quod potius Arithmeticum eſt, nimirum; *Quadratum aggregati crurum multiplicetur per quadratum aggregati crurum multatum quadruplo quadrato perpendicularis, & quadrato differentiæ ſegmentorum baſeos; productum verò diuidatur per differentiam quadrati aggregati crurum, & quadrati differentiæ ſegmentorum baſeos; quadratum enim inde baſeos trianguli quæſiti innoteſcet.* *Superius Poriſma cum alio coincidit.*

Proportionalia ſiquidem latera cùm fuerint quatuor, quatuor etiam erunt quadrata proportionalia, & contra; at analogiſmus æquipollet multiplicationi, ac diuiſioni.

Longè tamen eſt in promptu magis hæc alia Reſolutionis ratio.

Sit b, crurum aggregatum, & c, perpendicularis; at verò d differentia ſegmentorum baſeos. Segmentum verò minus eſto a, ſegmentum maius erit a † d, vnde tota baſis erit 2 a † d. Quoniam igitur eſt vt aggregatum crurum ad baſim, ità differentia ſegmentorum baſeos ad differentiam crurum; propterea ſi fiat vt b, ad 2 a † d, ita d, ad aliud, nempe $\frac{2ad+d^2}{b}$; hæc erit differentia crurum; at verò ſi differentia addatur aggregato crurum fit duplum crus maius nempe b $+ \frac{2ad+d^2}{b}$, cuius dimidium $\frac{b^2+d^2+2ad}{2b}$ erit crus maius; ſi eadem *Secunda Reſolutio.*

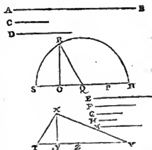
differen-

differentia subtrahatur fiet $b - \frac{d^2 + da}{b}$ duplum crus minus ac ob id $\frac{b^2 - d^2 - 2da}{2b}$ erit simplum crus minus. Vtrumbibet autem potest adhiberi, sed quia quantitas incognita fuit posita segmentum minus, ob id adhibendam est crus minus, cuius quadratum est $\frac{b^4 - 2b^2d^2 + d^4 - 4b^2da + 4d^3a + 4d^2a^2}{4b^2}$ quod æquabitur $a^2 + c^2$, nempe aggregato quadratorum à segmento minori, & perpendiculari, tollatur fractio ductis omnibus scilicet in $4b^2$, & $4b^2a^2 + 4b^2c^2$ æquabitur $b^4 - 2b^2d^2 + d^4 + 4b^2da + 4d^3a + 4d^2a^2$; & per antithesin $4b^2a^2 - 4d^2a^2 + 4b^2da - 4d^3a$, æquabitur $b^4 + d^4 - 4b^2c^2 - 2b^2d^2$; omnibus autem applicatis ad $4b^2 - 4d^2$, & $a^2 + \frac{4b^2d - 4d^3}{4b^2 - 4d^2}a$, æquabitur $\frac{b^4 + d^4 - 4b^2c^2 - 2b^2d^2}{4b^2 - 4d^2}$; tollantur fractiones, & fiat vt $4b^2 - 4d^2$, ad $4b^2 - 4d^2$, nempe plana denominatoris ad plana, quæ habentur in numeratore, ita d, ad aliud, & hoc erit idem d; vnde d a, idem erit quod $\frac{4b^2d - 4d^3}{4b^2 - 4d^2}a$, deinde fiat vt $4b^2 - 4d^2$, ad b^2, ita b^2, ad aliud, illudque sit K^2; mox vt $4b^2 - 4d^2$ ad d^2 ita d^2 ad aliud l^2 & ad $4b^2$, ita c^2, ad m^2, & insuper vt $4b^2 - 4d^2$, ad $2b^2$, ita d^2 ad n^2; at aggregatum ex m^2, & n^2, subducatur ex $K^2 + l^2$, residuumque sit z^2, eritque æquatio illa superior fractionibus implicata adhanc reuocata simplicissimam $a^2 + da = z^2$; cuius radix est ℞$(\frac{1}{4}d^2 + z^2) - \frac{1}{2}d$. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt excessus quo quadruplum quadratum aggregati crurum superat quadruplum quadratum differentiæ segmentorum baseos, ad quadratum aggregati crurum, ita hoc quadratum ad aliud, deinde vt idem ad quad. differentiæ segmentorum, ita hoc quadratum ad aliud, claritatis gratia, dictum illud sit primum, & hoc secundum inuentum; mox vt idem excessus iam dictus ad quadruplum quadratum aggregati laterum, ita quad. perpendicularis ad aliud tertium inuentum, & vt idem excessus ad quadratum duplum aggregati laterum, ità quadratum differentia segmentorum ad quartum inuentum; ex primo & secondo quidem inuento subtrabantur tertium; & quartum, residuum autem addatur ad quadratum è dimidio differentia segmenoorum baseos; ex aggregati autem latere subtrahatur dictum dimidium, quod enim superest erit ignota quantitas.

COMPOSITIO.



DAtum sit crurum aggregatum A B; differentia segmentorum baseos D, perpendicularis autem C. Fiat quod Porisma iubet, nimirum vt excessus quo quadruplum quadratum A B superat quadruplum quadratum D ad quadratum A B, ita quadratum A B, ad quadratum E, primum inuentum. Mox vt idem excessus iam dictus ad quadratum D ita quadratum D ad quadratum F secundum inuentum; deinde vt idem excessus, ad quadruplum quadratum A B, ita quadratum C ad quadratum G, tertium inuentum, & vt idem excessus ad duplum quadratum A B, ita quadratum D ad quadratum H, quartum inuentum; ex quadrato autem E, plus quadrato F subductis quadratis G, & H remaneat quadratum M. Exponatur autem O P, æqualis D, & quidem ex O excitetur perpendicularis O R æqualis M, ducaturque Q R, & centro Q, interuallo Q R describatur circulus vtrinque secans O P protractam in punctis S, & H, mox verò exponatur T Y æqualis S O; duplicatur in Z, & protrahatur in V, ita vt Z V sit æqualis O P; ex Y excitetur Y X, æqualis C agantur T X, V X. Dico triangulum T X V esse quod quæritur; baseos enim T V segmenta sunt T Y, Y V, quorum differentia est Z V æqualis datæ D, ex constructione, & Y X perdendicularis æqualis est itidem ex constructione datæ rectæ C; superest demonstrandum crurum TX, V X aggregatum æquale esse datæ rectæ A B.

Quoniam igitur rectangulum P S O æquale est rectangulo S O H; sed rectangulum S O H æquale est quadrato O R; ergo rectangulum P S O æquabitur quadrato O R; sed quadratum

dratum O R æquale est quadrato M; ergo rectangulum P S O æquabitur quadrato M; sed quadratum M æquale est quadrato E primo inuento, plus quadrato F, secundo inuento minus quadrato G, tertio inuento, minus quadrato H, quarto inuento ex constructione; ergo rectangulum P S O æquabitur quadrato E, primo inuento, plus quadrato F, secundo inuento, minus quadrato G tertio inuento, minus quadrato H; quarto inuento; sed rectangulum T Y V æquale est rectangulo P S O ex constructione; ergo rectangulum T Y V æquabitur quadrato E, primo inuento, plus quadrato F, secundo inuento, minus quadrato G, tertio inuento, minus quadrato H quarto inuento; sed id, nempè quadratum E, plus quadrato F, minus quadrato G, minus quadrato H, comparatum est mediantibus perpendiculari C, & differentia segmentorum D, hoc est perpendiculari X Y, & differentia segmentorum Z V, & recta A B iuxta præscriptum Porismatis; ergo rectangulum T Y V, æquabitur quadrato E, primo inuento, plus quadrato F, secundo inuento, minus quadrato G, tertio inuento minus quadrato H, quarto inuento, quatenus hæc facta sunt medijs X Y, Z V, & recta A B; ijs peractis adhibendo easdem X Y Z V; & loco ipsius A B, adhibendo aggregatum ex T X, X V idem rectangulum prouenit T Y V, vt alibi nos demonstrauimus; ergo aggregatum crurum T X, X V datæ A B; crurum aggregato æquale erit; constituimus igitur triangulum vt quærebatur. Quod oportebat efficere.

Obserua diligenter hanc demonstrandi formam eam enim adhibere licebit in resoluendis infinitis ferè Problematibus, & quidem difficillimis. *Notandum.*

Cæterum hìc notare licet superius Porisma coincidere cum illo, quod magis Arithmeticum, quàm Geometricum est, nimirum. *Quadrato quadratum aggregati crurum addatur quadrato quadrato differentia segmentorum baseos; similiter plano planum ex quadrato perpendicularis in quadratum aggregati crurum quadruplum, addatur duplo plano plano ex quadrato aggregati crurum in quadratum differentia segmentorum baseos; posterius autem aggregatum tollatur ex priore, residuum verò diuidatur per quadruplam differentiam quadrati aggregati crurum, & quadrati differentia segmentorum baseos; quotiens autem addatur quadrato quod fit à semisse differentia eorundem segmentorum, huius namque aggregati quadrata radix multata supradicta semisse, minus segmentum baseos exhibebit.* *Notanda quædam.*

Sed quamuis Resolutio superior idonea sit, tamen eo nomine minus est commendabilis, quoniam est implicatior, atque adeo præstat æqualitatem illam postremam hac animaduersione ad aliam reuocare, quæ facile ad analogismum redigi potest. Considerandum est enim cùm fuerit æquatio $4b^2a^2 - 4d^2a^2 + 4b^2da - 4d^3a = b^4 + d^4 - 4b^2c^2 - 2b^2d^2$; per antithesin ad hanc reuocari, quod est in huiusmodi casibus valde obseruandum, videlicet $b^4 - 4b^2c^2 - b^2d^2 = b^2d^2 + 4b^2da + 4b^2a^2 - d^4 - 4d^3a - 4d^2a^2$; sed huius æquationis vtrunq; membrum diuisionem subire potest per communem diuisorem $b^2 - d^2$; vnde fit æquatio huiusmodi $\frac{b^4 - 4b^2c^2 - b^2d^2}{b^2 - d^2} = d^2 + 4da + 4a^2$; quoniam verò $b^4 - 4b^2c^2 - b^2d^2$ fit ducto $b^2 - 4c^2 - d^2$, in b^2; propterea æquatio illa in analogismum transformabitur, nempe vt $b^2 - d^2$ ad $b^2 - 4c^2 - d^2$, ita b^2 ad $d^2 + 4da + 4a^2$; atque horum etiam latera proportionalia erunt, nempe R $(b^2 - d^2)$ R $(b^2 - 4c^2 - d^2)$; b; $2a + d$; latus enim ipsius b^2 est b, & latus ipsius $d^2 + 4da + 4a^2$, est $2a + d$, nimirum basis, vnde colligitur illud idem Porisma, quod Ghetaldus ex sua Resolutione collegerat. *Instituitur noua & quidem expeditior resolutio.*

PORISMA.

Vt recta cuius quadratum æquale est excessui quo quadratum aggregati crurum trianguli superat quadratum differentia segmentorum baseos ad rectam cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum aggregati crurum superat quadrata, qua fiunt ex differentia segmentorum baseos, & perpendiculari dupla, ita est aggregatum crurum ad basim.

Hoc tamen interest inter hanc, & eam, qua vsus est Ghetaldus Resolutione, quod Compositio per illam perfici potest repetitis Analyseos vestigijs, secus autem per istam; Vnde cogimur quod Porisma dictat suscipere per modum Theorematis demonstrandum.

Huic porro Resolutioni respondentem compositionem non afferimus, nam supra eodem Porismate dictante compositionem adduximus per Analyseos vestigia procedentem.

Problema.

Exemplum XIII. *Data differentia crurum alicuius trianguli & perpendiculari, una cum differentia segmentorum baseos, reperire triangulum.*

RESOLVTIO I.

His suppositis; data sit differentia crurum b, perpendicularis c differentia segmentorum baseos d. Oporteat reperire triangulum. Trianguli basis esto a, & quia est vt b ad d, ita a, ad $\frac{da}{b}$, ob id aggregatum crurum erit $\frac{da}{b}$.

Quia verò quadratum aggregati crurũ; plus quadrato differentiæ eorundem duplum est quadratorum à cruribus; propterea $\frac{d^2a^2}{b^2} + b^2$, æquabitur duplo quadratorum à cruribus. At verò duplum quadratorum à cruribus æquale est duplo quadratorum à baseos segmentis, plus quadruplo quadrato à perpendiculari; ergo $\frac{d^2a^2}{b^2} + b^2$ æquabitur $a^2 + d^2 + 4c^2$.

Vtrinque auferatur a^2, & b^2; ergo
$\frac{d^2a^2}{b^2} - a^2$ æquabitur $4c^2 + d^2 - b^2$, hoc est $\frac{d^2a^2 - b^2a^2}{b^2} = 4c^2 + d^2 - b^2$; nam $\frac{b^2a^2}{b^2}$ idem est quod a^2 vt patet, seu quod idem est $\frac{d^2a^2 - b^2a^2}{b^2}$ æquabitur $4c^2 + d^2 - b^2$; resoluatur fractio in sua membra ita vt æqualitas in proportionem transmutetur &
$d^2 - b^2$; $4c^2 + d^2 - b^2$; b^2; a^2 erunt proportionalia, &
℞$(d^2 - b^2)$; ℞$(4c^2 + d^2 - b^2)$; b; a. Hinc

PORISMA.

Vt recta cuius quadratum æquale est excessui, quo quadratum differentiæ segmentorum baseos trianguli superat quadratum differentiæ crurum, ad rectam cuius quadratum æquale est quadrato perpendicularis duplæ, vnà cum prædicto quadratorum excessu, ita differentia crurum ad basin.

COMPOSITIO.

Hvius Problematis compositionem repetitis Analyseos vestigijs, attulit Ghetaldus, &c.

RESOLVTIO II.

Data sit differentia crurum b, perpendicularis c; & differentia segmentorum baseos d reperire triangulum. Basis esto a, ergo $a - d$ erit duplum segmentum minus, quare simplum segmentum minus erit $\frac{a-d}{2}$ cuius quadratum $\frac{a^2 - 2da + d^2}{4}$ vna cùm c^2 nempe quadrato perpendicularis, æquabitur quadrato cruris minoris; sed crus minus est etiam $\frac{da - b^2}{2b}$ cuius quadratum est $\frac{d^2a^2 - 2b^2da + b^4}{4b^2}$ & hoc æquabitur $\frac{a^2 - 2da + d^2 + 4c^2}{4}$. Per multiplicationem decussatim factam $4b^2a^2 - 8b^2da + 4b^2d^2 + 16b^2c^2 = 4d^2a^2 - 8b^2da + 4b^4$ & per antithesin $4b^2a^2 + 4b^2d^2 + 16b^2c^2 = 4d^2a^2 + 4b^4$ omnibus verò diuisis per 4 & $b^2a^2 + b^2d^2 + b^2c^2 = 4d^2a^2 + b^4$ & per antithesin $d^2a^2 - b^2a^2$ æquabitur $b^2d^2 + 4b^2c^2 - b^4$ ergo facto parabolismo; & a^2 æquabitur $\frac{b^2d^2 + 4b^2c^2 - b^4}{d^2 - b^2}$, fiat autem, vt b. ad d ita d. ad g. & a^2 æquabitur $\frac{db^2 + 4b^2c^2 - b^4}{b^2g - b^2}$ omnibus applicatis ad b, quæ in fractione existunt, & a^2 æquabitur $\frac{db + 4bc^2 - b^3}{g - b}$. Hinc,

PORISMA.

Fiat, vt differentia crurum ad differentiam segmentorum baseos, ita hæc differentia, ad aliam magnitudinem, quæ dicitur g tertia proportionalis. Mox verò ad hanc magnitudinem minus differentia crurum applicetur excessus, quo solidum ex illa inuenta g tertia proportionali in quadratum differentiæ crurum plus solido à differentia crurum in quadruplum quadratum perpendicularis, superat cubum differentiæ crurum; siquidem ortina, magnitudo erit, quadratum à basi quæsiti trianguli.

Coincidit autem cum illo.

Qua-

Quadratum differentiæ segmentorum baseos diuidatur per differentiam crurum, quotiens autem ducatur in quadratum differentiæ crurum, productum addatur solido ex quadruplo quadrato perpendicularis in differentiam crurum, ex aggregato tollatur cubus eiusdem crurum differentiæ; residuum verò, diuidatur per interuallum quotientis supradicti, & differentiæ crurum, & habebitur quadratum baseos trianguli quæsiti.

Huius autem resolutionis Porismate dictante, Geometricam effectionem perficere licebit; eamque demonstrare, methodo adhibita in superiori Problemate.

In Analyticis quoque Compositio rationis locum habet, vnde sequenti Problemate, rem illustrabimus; de hoc tamen eodem Problemate, Cap. sequenti redibit sermo.

PROBLEMA.

Datum latus, A B vtcùnque sectum in D, diuidere illud iterum in C inter A D, ita vt rectangulum B A C, ad rectangulum C D B datam habent rationem. Exemplum XIV.

RESOLVTIO.

Data sit recta A B diuisa quidem in partes A D, D B, quarum illa dicatur b, hæc autem d; proportio data sit vt s, ad d; Pars A C esto a, pars C D erit b -- a, tota A B erit b + d; rectangulum sub tota & a est b a + d a, at rectangulum sub C D, & D B est b d -- d a; quare erit vt s, ad d, ita b d + d a, ad b d -- d a; proportione autem ad æqualitatem reuocata fiet æquatio huiusmodi d b a + d² a = s b d -- s d a; & per antithesin fiet d b a + d² a + s d a = s b d. Omnibus autem applicatis ad d, fiet b a + d a + s a = s b; & æqualitate ad proportionem reuocata erit. Vt b † d † s, ad s, ita b, ad a. Hinc.

A C D B

PORISMA.

Vt est aggregatum ex latere diuidendo, & ex priori termino datæ rationis ad terminum priorem, ita lateris diuidendi pars prior ad radicem quæsitam.

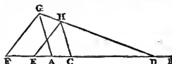
Potuissem etiã repetitis Analyseos vestigijs Compositionem per solidorum comparationem contexere, vel alio modo vt Capite sequenti Resolutione instituta declinato ascensu ad gradus altos, demonstrationem perficere; lubet nihilominus hìc per compositionem rationis id totum absoluere.

COMPOSITIO.

Data sit recta A B, secta quidem in D, oporteat iterum illam diuidere in C, vt rectangulum B A C ad rectangulum C D B, rationem habeat quam S, ad D B.

Protrahatur B A in F, ita vt F A sit æqualis aggregato ex S, & D B, & quidem E A sit æqualis D B, & F E, sit æqualis S; mox verò ad punctum D, accomodata sit quedam recta G D faciens angulum quemcunque G D F. Deinde sumpto in G D quouis puncto H, agatur E H, cui fiat parallela F G; mox ducatur G A, cui ex H agatur parallela H C; & factũ erit quod Porisma iubet. Dico rectam A B sectam esse quidem in C, vt Problema requirit.

Rectangulum B A C, ad rectangulum C D B rationem habet compositam ex A B, ad D B, & ex A C ad C D; sed vt A B, ad D B; ita E D, ad E A; proinde rectangulum B A C, ad rectangulum C D B rationem habet compositam ex ratione E D ad E A, & ex ratione A C, ad C D, hoc * est F E ad E D; sed ratio F E ad E A composita est ex proportione F E ad E D, & ex E D, ad E A. Sumpto nimirum intermedio termino E D, vt patet; ergo rectangulum B A C ad rectangulum C D B rationem habet compositam ex ijs proportionibus, ex quibus componitur ratio F E ad E A, seu D B. Quamobrem vt F E, hoc est vt S ad D B, ita rectangulum B A C ad rectangulum C D B. Quod erat &c.



* est enim vt A C ad C D ita G H ad H D, & ita F E ad E D.

Problema.

Exemplum XV. *Duo latera reperire vt vtrunque ab altero datum segmentum accipiens ad residuum, constitutam habeat rationem.*

RESOLVTIO.

Data sint duo segmenta b, & d, illud maius, hoc verò minus. Oporteat duo reperire latera, vt si ex his primum accipiat à posteriori segmentum d, ad residuum rationem habeat vt r, ad s, at verò secundum, siue posterius si accipiat à primo, seu à priori segmentum b, ad residuum rationem habeat vt t ad s.

d —— b ——

T——
R——
S—

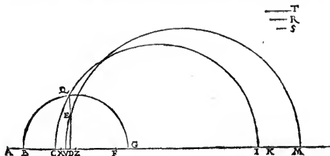
Posterius latus quæsitum esto a † d; sic enim dando d lateri priori, remanebit a, vt autem est s, ad r, ita a residuum sc. iam dictum ablato segmento d, ad $\frac{ra}{s}$; ergo $\frac{ra}{s}$ erit latus prius quæsitum, accepto segmento d, à posteriori; itaque antequam reciperet segmentum illud erat $\frac{ra}{s}$ - d; reliquum est vt posterius latus acquirendo segmentum b, à primo, sit ad residuum in ratione vt t, ad s; Secundum autem latus erat a † d, quod accipiendo à priori segmētū b, euadit a † d † b & ab ipso priori latere nimirum $\frac{ra}{s}$ - d si auferatur segmētū b, remanebit $\frac{ra}{s}$ -- d -- b; ergo vt t, ad s, ita debet esse a † d, † b ad $\frac{ra}{s}$ — d — b; reuocata autem analogia ad æqualitatem s a † s d † s b æquabitur $\frac{tra}{s}$ — t d -- t b; reuocetur fractio illa $\frac{tr}{s}$ ad integram magnitudinem, faciendo nimirum vt s ad r, ita t, ad aliam magnitudinem g, erit enim g a idem quod $\frac{tra}{s}$; quamobrem s a † s d † s b, æquabitur g a — t d — t b; & per antithesin g a -- s a æquabitur s d † s b † t d † t b; & æqualitate ad proportionem reuocata erit vt g -- s, ad s † t, ita b † d, ad a. Hinc.

PORISMA.

Vt est differentia terminorum, quorum vnus est terminus s, è tribus datæ rationis, alter verò est latus inuentum in tollenda fractione ad aggregatum terminorum s, & t, ita aggregatum duorum datorum segmentorum ad latus posteris quæsitum multatu tamen eo segmento quo multandum est.

COMPOSITIO.

Data sint duo segmenta D F, F I, hoc maius, illud verò minus. Oporteat reperire latera, vt si prius accipiat à posteriori segmentum D F, ad residuum habeat rationem vt r ad s, posterius verò si accipiat à priori segmentum F I, ad residuum sit vt t ad s. Protrahatur I D ad C, ita vt C D sit æqualis aggregato terminorum T, & S.



Aggregatum autem datorum terminorum sit D I, at verò inter C D, D I media reperiatur D Q id autem fit si super C I, describatur semicirculus, & ex puncto D erigatur perpendicularis D Q, cuius quadratum applicetur ad B D differentiam inter terminum quarto loco

to loco proportionalem ad S, R, T, inter hunc, inquam, terminum & terminum S, id autem fiet, si describatur semicirculus cuius centrũ sit in ipsa recta B I, & eius peripheria transeat per puncta B, Q itaut secet D I in G ortiua verò magnitudo sit D G; protrahatur I C ad partes C in A, ita vt A D sit æqualis D G. Dico A F constantem ex A D, D F esse posterius latus è duobus quæsitis. Ad habendum autem primum quæsitum latus, secetur V D æqualis S, & X D æqualis R; fiat autem vt V D, ad D X, ita A D ad aliam, nempè D M; seu, quod idem est, ducatur A D, in X D, hoc est inter A D, X D media reperiatur proportionalis D E, cuius quadratum applicetur ad V D, & proueniat D M; erit enim F M latus prius è duobus quæsitis. Superest ostendendum A I esse ad I M vt T, ad S. Fiat D Z æqualis V D, seu S; erit autem B Z quarta proportionalis ad S, R, T.

Quoniam igitur est, vt B Z minus D Z, hoc est B D, ad C D, ita D I, hoc est D F, plus F I, ad A D; ergo reuocata proportione ad æqualitatem, erit rectangulum sub B Z, & A D, minus rectangulo sub D Z, seu V D, & A D, hoc est minus rectangulo A D V, erit, inquam, æquale rectangulo V D F, plus rectangulo sub V D, & F I, vnà cum rectangulo sub C V, & D F, plus rectangulo sub C V, & F I; & per antithesin rectangulum A D V, plus rectang. V D F, vna cum rectangulo sub V D, & F I, æquabitur rectangulo sub B Z, & A D, minus rectangulo sub C V, & D F minus rectangulo sub C V, & F I. Quoniam autem erat, vt S ad R, ita T, ad G in resolutione; hoc est in Compositione vt V D, ad D X, ita C V ad B Z; propterea reuocata æqualitate ad proportionem, erit vt C V ad D V, seu D Z, ita A D, plus D F, plus F I, ad D M, minus D F, minus F I; hoc est ad I M; sed vt C V ad D V, ita T ad S; ergo vt T ad S, ita erit A I ad I M; ipsa autem D M respondet fractioni in resolutione, [illegible], hoc est ipsa D M est, quæ oritur ex applicatione rectanguli A D X ad magnitudinem V D, cùm factum sit, vt V D ad D X, ita A D ad D M: ergo si data sunt duo segmenta D F, F I; prius latus è duobus quæsitis erit F M; & posterius erit A F; cùm si F M accipiat D F, ab A F, fiat D M; quæ ad residuum A D; sit in ratione vt R ad S, ex constructione; & A F, si accipiat ab F M, segmentum F I, datum fiat A I; quæ ad residuum I M; ex demonstratis est, vt T ad S. Duo igitur latera nos adiuuenimus &c. Quod facere operæ erat pretium.

Aduerte autem, rectangulum sub B Z, & A D, æquale esse rectangulo sub C V, & D M; vnde non immeritò hoc loco illius substituitur in compositione. Æqualitas autem iam dicta sic fit manifesta; Vt enim est V D, ad D X, ex constructione ita A D, ad D M; sed vt V D ad D X, pariter ex constructione, ita est C V ad B Z; ergo vt C V ad B Z, ita A D ad D M; ergo rectangulum sub extremis C V, D M, æquabitur rectangulo sub medijs B Z, A D.

Bily quoque hoc assumpsit Problema, resoluendum, & componendum, sed quid inter eius, & nostram resolutionem intersit, tu ipse iudex videto.

Lemma.

Si sint quatuor termini proportionales, est differentia primi & tertij ad differentiam primi, & quarti minus differentia inter primum & secundum vt est primus terminus ad secundum. Rursus.

Si sint quatuor termini proportionales, vt est primus ad tertium, ita interuallum inter primum & secundum ad differentiam primi & quarti multatam differentia inter primum, & tertium.

Sint quatuor termini proportionales A, B, C, D. Dico esse differentiam primi & tertij ad differentiam extremorũ minus &c. Quoniam enim vt est A, ad B, ita C, ad D, erit permutando vt A ad C, ita B ad D; & diuidendo, vt A minus C, ad C, ita B minus D, ad D, & rursus permutando erit vt A minus C,

A	B	C	D
A	C	B	D
A -- C	C	B -- D	D
A -- C	B -- D	C	D
A	B	A - C	B -- D

ad B, minus D, ita C ad B; sed C ad D est vt A ad B; ergo vt A ad B, ita erit A minus C ad B, minus D. Quoniam autem si ex A minus D differentia primi & quarti subtrahatur A, minus B differentia primi & secundi remanet B minus D differentia secundi & quarti; est autem A, minus C differentia primi & tertij suntque A, & B primus & secundus; ergo

erunt

erunt in quatuor proportionalibus terminis, vt primus ad secundum ita differentia primi & tertij ad differentiam primi & quarti multatam differentia primi & secundi.
Secunda pars permutando demonstrabitur eodem modo &c.

Problema.

Exemplum XVI. *Propositum latus bis diuidere in duas partes ea lege vt maior pars è prima diuisione sit ad minorem ex secunda in data ratione maioris ad minus, & maior ex secunda sit ad minorem ex prima in alia ratione quoque maioris ad minus.*

RESOLVTIO.

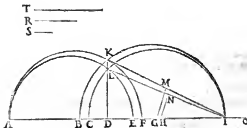
Datum sit b latus diuidendum bis in duas partes ea lege vt maior pars è prima diuisione ad minorem ex secunda sit in ratione vt r, ad s, maioris ad minus, at verò maior è secunda ad minorem è prima sit pariter in ratione data maioris ad minus vt t ad s.

Minor è secunda diuisione esto a; hæc autem debet esse ad maiorem è prima vt s, ad r; maior igitur è prima diuisione erit $\frac{ra}{s}$. proinde minor è prima diuisione erit $b - \frac{ra}{s}$; Cùm autem vt est s ad t, ita debeat esse hæc pars ad maiorem è secunda diuisione; ergo maior hæc è secunda diuisione erit $\frac{tb}{s} - \frac{tra}{ss}$. Quoniam autem hæc pars vna cum minori parte è secunda diuisione debet esse æqualis dato lateri b. proinde orietur æquatio huiusmodi. $\frac{tb}{s} - \frac{tra}{ss} - a = b$. & per antithesin $\frac{tb}{s} - b = \frac{tra}{ss} - a$. Literetur autem æquatio à fractionibus, & primo omnia multiplicentur per s, & erit $tb - sb = \frac{tra}{s} - sa$. Fiat igitur vt s, ad r, ita t ad aliud, illudque sit g; erit proinde æquatio $tb - sb = ga - sa$, seu quod idem est $t - s\ (b = g - s)\ a$; ergo fiet analogismus $g - s;\ t - s;\ b;\ a$. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt s ad t, ita r ad aliud quippiam illudque sit g, à quo subtrahatur s, vt autem est hoc residuum, ad differentiam inter t, & s, ita latus diuidendum ad alind, illudque erit minor pars è secunda diuisione.

COMPOSITIO.



Datum sit latus diuidendum A D; proportiones verò sint vt R ad S, & vt T ad S. Protrahatur A D ad E, vt D E sit æqualis differentiæ duorum terminorum S & R; at verò inter A D D E media reperiatur proportionalis D L deinde protracta A D vsque ad F, ita vt D F sit æqualis differentiæ duorum terminorum S, & T; at verò inter A D, & D F, media reperiatur proportionalis, quæ sit D K; mox verò vt S ad T, ita fiat R ad aliam quæ sit D O, à qua obscindatur I O, quæ sit æqualis minori termino S; ad residuum autem D I, applicetur quadratum ex D K, nempe ducatur L I, quæ bifariam fece-

tur

tur in N, & hinc ad rectos angulos ducatur N H &c. Deinde ducatur K I, quæ bifariam secetur in M &c. Centris autem inuentis H, G, & interuallis H I, G I, describantur semicirculi I L C, I K B, qui necessario transibunt per puncta L, K. Dico A D sectum esse quidem in punctis B, C, vt imperatum est, adeo vt A C, sit ad D B, quemadmodum R ad S, & A B, sit ad C D, vt T ad S. Quoniam enim rectangulum C D I, æquale est quadrato ex D L, eidem verò æquale est rectangulum A D E; proinde rectangulum C D I æquale erit rectangulo A D E; atque adeo vt D I ad A D, ita D F ad C D, & permutando vt D I, ad D E, ita erit A D ad C D, & diuidendo vt I E, ad E D, ita A C ad C D. Quia verò rectangulum I D B æquale est rectangulo A D F, erit vt I D ad A D, ita D F ad B D, vt autem I D ad A D, ita erat D E ad C D; ergo vt D F ad B D, ita D E ad CD; conuertendo, & permutando vt D E ad D F, ita C D ad B D; sed erat vt I E ad E D, ita A C ad C D, vt supra diximus estque vt D E, ad D F, ita C D ad B D; ergo ex æquali erit vt I E ad D F, ita A C ad B D. Sed I E ad D F est vt R ad S; ergo vt R ad S, ita erit A C, ad B D. Suo modo pariter ostendemus A B, esse ad C D, quemadmodum T ad S. Ex Elementis

Quod autem I E sit ad D F vt R ad S sic ostenditur; vt enim est S a I T, ita fecimus R ad D O, at verò differentia inter S & D O facta est D I, a quâ subtracta est D E differentia inter R & S; reliqua igitur E I, erit ad D F differentiam duorum terminorum S, & T, erit inquam vt R ad S conuertendo &c. per ea quæ in antecedenti Lemmate demonstraui mus. Vnde liquet etiam I F esse ad D E, atque adeo A B ad C D, vt T, ad S. Diuisimus igitur &c. Quod facere oportebat.

PROBLEMA.

Propositum latus in tres partes dispescere, ea lege, vt alicuius extremarum assumpta media ad extremam reliquam constitutam rationem habeat. Exemplum XVII.

RESOLVTIO.

Latus diuidendum datum sit b; ratioque data, quam habere debet summa ex prima, & secunda parte, ad tertiam, sit vt r ad s. at verò ratio quam habere debet aggregatum ex secunda, & tertia ad primam sit vt t ad s.

Tertia pars esto a; vt autem est s ad r; ita quidem est a, ad $\frac{ra}{s}$ ergo aggregatum ex prima, & secunda erit $\frac{ra}{s}$. quare omnium summa erit a $+$ $\frac{ra}{s}$. & hæc æquabitur b. omnibus autem ductis in s. fiet æquatio s a $+$ r a $=$ s b. & reuocata æquatione ad proportionem erunt proportionales termini r $+$ s. s. b a. Hinc.

PORISMA.

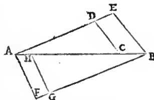
Vt aggregatum duorum terminorum prima data rationis ad terminum minorem ita latus diuidendum, ad tertiam partem quæsitam.

Deinde ponatur pars prima a; cum verò sit vt s. ad t; ita a ad $\frac{ta}{s}$ proinde $\frac{ta}{s}$ erit tertia pars cum secunda; omnesque simul erunt a $+$ $\frac{ta}{s}$ & erit æquatio a $+$ $\frac{ta}{s}$ $=$ b. omnibus ductis in s. fiet s a $+$ t a $=$ s b. quæ quidem æquatio si ad proportionem reuocetur fiet analogismus huiusmodi t $+$ s, s. b. a, Hinc,

PORISMA.

Vt aggregatum terminorum data rationis, ad terminum minorem; ita latus diuidendum, ad primam partem; Secunda autem habebitur auferendo summam inuentam ex prima & tertia, à latere dato diuidendo, residuum enim erit secunda pars quæsita.

COMPOSITIO.



Datum sit latus diuidendum A B; ea lege in tres partes, vt prima pars cum secunda, sit ad residuum vt R ad S; at verò secunda cum tertia ad primam sit vt T ad S. Agatur A D æqualis R, faciens ad A, quemcunque angulum D A B, cum recta A B; & protrahatur A D vsque ad E vt D E sit æqualis S. ducaturque E B; cui fiat D C, æquidistans. Deinde agatur B G. æqualis T. faciens ad B, quemcunque angulum cum A B nempe A B G. & protrahatur ad F. vt G F sit æqualis S. ducatur F A. cui parallela agatur G H. Dico latus A B; sectum esse in tres partes A H, H C; C B. vt Problema requirit; itaut A H assumpta media H C; sit ad extremam reliquam C B, vt R ad S & C B, assumpta media H C; ad A H sit vt T ad S.

Quoniam igitur est, vt A D, plus D E, hoc est A E, ad D E, ita A B, ad C B. erit rectangulum sub D E, & C B, plus rectangulo sub A D, & C B, æquale rectangulo sub A B, & D E. omnibus autem applicatis ad D E; erit C B plus A C; hoc enim respondet fractioni $\frac{..}{..}$; si namque rectangulum sub C B, A D, applicetur ad D E. prouenit A C, erit inquam æqualis dato lateri A B. ergo pars vna erit C B; alia A C; at verò vt A D, ad D E, ita est A C ad C B; & vt A D ad D E ita R ad S. ergo vt R ad S. ita est A C, ad C B. Non dissimili modo demonstrabimus esse B H. ad H A. vt T ad S. ergo si A H accipiat mediam H C; erit aggregatum A C ad C B. vt R ad S; & si C B accipiat H C; erit H B ad AH. vt T ad S. Diuisimus igitur propositum latus in tres partes quemadmodum Problema requirit.

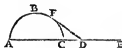
Ex resolutione constat Problema indigere determinatione.

PROBLEMA.

Exemplum XVIII. *In semicirculo A B C, est diameter A C, protracta vsque ad E, itaut A E, sit æqualis aggregato ex tangente ducta ab aliquo puncto externi segmenti C E, & ex segmento ab A; vsque ad punctum prædictum; reperire partes C D; D E.*

RESOLVTIO.

Diameter producta A E, sit b; at diameter ipsa A C sit d. Oporteat &c. Segmentum A D esto a; ergo reliqua D E siue tangens erit b -- a; at verò interceptum segmentum C D, erit a -- d. proueniet igitur æquatio $a^2 - da = b^2 - 2ba + a^2$ & per antithesin $2ba - da$ æquabitur b^2. vnde fiet analogismus vt $2b - d$. ad b. ita b. ad a. Hinc.



PORISMA.

Vt est dupla diameter producta minus simpla ad diametrum ipsam productam, ita hæc eadem, ad segmentum A D.

COMPOSITIO.

QVoniam igitur est, vt dupla A E diameter producta minus A C ad A E, ita A E ad A D; erit rectangulum sub dupla A E, & A D, minus rectangulo sub A C & A D, æquale quadrato A E; vtrinque addito quadrato A D, erit quadratum A D plus rectangulo sub dupla A E, & A D, minus rectangulo sub A C, & A D æquale quadrato A E, plus quadrato A D: vtrinque sublato rectangulo sub dupla A E, in A D, quadratum A D, minus rectangulo ex A C in A D, æquabitur quadrato A E, minus rectangulo sub dupla A E, in A D, plus quadrato A D; at verò quadratum A D, minus rectangulo ex A C in A D, hoc est minus rectangulum D A C, idem est, quod rectangulum A D C; quadratum autem A E, minus rectangulo sub dupla A E, & A D, hoc est minus duplo rectangulo E A D, plus quadrato A D, idem est, quod quadratum D E; ergo rectangulum A D C æquabitur quadrato D E; sed rectangulum A D C, æquale est quadrato tangentis D F, ergo tangens D F æqualis erit ipsi D E. In semicirculo igitur A B C &c. quod facere oportebat,

Problema.

Dati semicirculi diametrum producere eousque vt ab huius extremo ducta tangente, & à puncto contactus perpendiculari cadente, rectangulum comprehensum sub tangente & huiusmodi perpendiculari ad rectangulum sub diametro, & segmento minori ipsius, è duobus factis à perpendiculari cadente, datam rationem obtineat. Exemplum XIX.

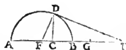
RESOLVTIO.

DIameter A B sit 2 d, eius dimidium A F, vel F B erit d, ratio autem data sit vt d, ad s. Oporteat facere quod imperatum est. Segmentum interceptum F C esto a; ergo A C erit d + a, segmentum C B erit d − a, & F E erit $\frac{d^2}{a}$ propter triangulorum similitudinem &c. insuper C E erit $\frac{d^2}{a} - a$. Recta verò potens rectangulum A C B erit ℞ ($d^2 - a^2$) & recta potens quadratum C E, plus quadrato C D, seu rectangulo A C B erit quidem ℞ ($\frac{d^4 - 2d^2a^2 + a^4}{a^2} + d^2 - a^2$) Quoniam igitur est vt d, ad s, ita rectangulum sub ℞ ($\frac{d^4 - 2d^2a^2 + a^4}{a^2} + d^2 - a^2$) & ℞ ($d^2 - a^2$) ad rectangulum sub tota diametro A B, & segmento C B, nempe $2d^2 - 2da$, ob similitudinem triangulorum vt supra diximus, erit, vt constat ex Elementis quemadmodum ℞ ($\frac{d^4 - 2d^2a^2 + a^4}{a^2} + d^2 - a^2$) ad $\frac{d^2}{a} - a$, ita d ad ℞ ($d^2 - a^2$) ergo rectangulum sub ℞ ($\frac{d^4 - 2d^2a^2 + a^4}{a^2} + d^2 - a^2$) & ℞ ($d^2 - a^2$) æquale erit rectangulo sub $\frac{d^2}{a} - a$, & d; vt igitur d ad s, ita rectangulum sub $\frac{d^2}{a} - a$, & d, ad $2d^2 - 2da$; est autem rectangulum sub $\frac{d^2}{a} - a$, & d, æquale rectangulo sub 2 d, & $\frac{1}{2}\frac{d^2}{a} - \frac{1}{2}a$; at verò vt $\frac{1}{2}\frac{d^2}{a} - \frac{1}{2}a$, ad d − a, ita sumpta communi altitudine 2 d, rectangulum sub $\frac{1}{2}\frac{d^2}{a} - \frac{1}{2}a$, & 2 d, ad rectangulum $2d^2 - 2da$; ergo erit vt $\frac{1}{2}\frac{d^2}{a} - \frac{1}{2}a$, ad d − a, ita d, ad s; duplatis autem antecedentibus erit vt $\frac{d^2}{a} - a$, ad d − a, ita 2 d, ad s; sed vt $\frac{d^2}{a} - a$, ad d − a, ita d + a, ad a; ergo vt 2 d, ad s, ita d + a ad a; quamobrem diuidendo erit vt 2 d − s, ad s, ita d, ad a. Hinc

PORISMA.

Vt excessus, quo diameter, quæ est duplum vnius termini datæ rationis superat alium terminum, ita semidiameter, quæ est simplex terminus, ad interceptum segmentum quæsitum.

COMPOSITIO.



Data sit AB diameter semicirculi ADB protrahenda quidem ad partes B &c. proportio verò data sit vt A F, vel F B ad Z. Fiat vt differentia inter A B, & Z, ad Z, ita F B ad F C. Deinde ex puncto C erigatur perpendicularis C D occurrens peripheriæ in D, ducaturque F D, in qua recta D E, angulum rectum efficiat; ipsi verò D E occurrat A B protracta in E. Dico rectangulum sub E D, D C, ad rectangulum A B C, rationem habere quam habet F B ad Z. Diuidatur C E bifariam in G. Quoniam igitur est vt A B, minus Z, ad Z, ita, F B seu A F, ad F C; erit componendo vt A B ad Z, ita A F, plus F C, ad F C; est autem vt A F plus F C, ad F C, ita C E ad C B, a ob id erit vt C E, ad C B, ita A B ad Z, & subduplatis antecedentibus erit vt C G ad C B, ita F B ad Z. Vt autem C G ad C B, ita rectangulum sub C G, & A B, ad rectangulum A B C; est autem rectangulum sub C G, & A B æquale rectangulo sub C E, & F B; ergo vt FB ad Z, ita rectangulum sub C E, & F B ad rectangulum A B C. Rectangulum autem sub D E, & recta D C æquale est rectangulo sub C E, & F B; propterea vt FB ad Z, ita rectangulum sub D E, & D C ad rectangulum A B C.

a *Ex demonstrantis ab Auctore.*

SCHOLION.

Si ducatur D B, rectangulum A B C, æquabitur quadrato D B, proinde solutum erit & illud, quod scilicet rectangulum ex D E in D C ad quadratum D B, rationem habeat datam.

Problema.

Exemplum XX.

Dato aggregato quatuor quantitatum continuè proportionalium, & aggregato quadratorum ab extremis, singulas distinguere.

RESOLVTIO.

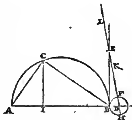
Aggregatum quatuor continuè proportionalium sit b, aggregatũ quadratorum sit d^2. Mediorum summa esto a; ergo summa extremorum erit $b - a$, cuius quadratum est $b^2 - 2ba + a^2$, ex quo si dempseris d^2 nimirum aggregatum quadratorum ab extremis, remanebit $b^2 - 2ba + a^2 - d^2$, quod erit duplum productum sub medijs vel extremis, vnde productum simplum erit $\frac{b^2 - 2ba + a^2 - d^2}{2}$ quod æquabitur $\frac{a^3}{b + 2a}$ siquidem cubus aggregati mediorum si diuidatur per aggregatum extremorum plus triplo aggregato mediorum, comparabitur productum sub medijs, vel extremis; erat autem summa mediorum a, cuius, cubus est a^3 & erat summa extremorum $b - a$, cui si addatur 3 a, nempe triplum summæ mediorum fit, $b + 2a$, per quod diuidi debet a^3, vt proueniat simplum productum sub medijs, vel extremis; decussatim autem facta multiplicatione $b^3 - 3ba^2 - bd^2 + 2a^3 - 2d^2a = 2a^3$; & per antithesin $3ba^2 + 2d^2a$ æquabitur $b^3 - bd^2$; omnibus autem applicatis ad 3 b, & $a^2 + \frac{2d^2a}{3b}$ æquabitur $\frac{b^3 - bd^2}{3b}$. Huius æquationis radix extrahatur tollantur igitur fractiones, nempe fiat vt 3 b, ad rectam, quæ possit 2 d^2, nempe duplum aggregatum quadratorum ab extremis, ita hæc ad aliam K. Deinde vt 3 b, ad b, ita $b^2 - d^2$, ad aliud z^2, & æquatio proueniet $a^2 + Ka = z^2$; & extrahatur radix iuxta præcepta. Vnde.

PORISMA.

Fiat vt triplum aggregati laterum ad rectam quæ potest duplum aggregatum quadratorum ab extremis, ita hæc ad aliam, ad cuius dimidij quadratum. Vel si places, fiat vt triplum aggregati laterum, ad rectam quæ potest aggregatum quadratorum ab extremis, ita hæc ad aliam, & ad huius quadratum addatur planum, ad quod, ita se habet differentia inter quadratum aggre-

aggregati quantitatum quatuor continuè proportionalium, & aggregatum quadratorum ab extremis, vt se habet triplum aggregatum proportionalium, ad aggregatum ipsum, hoc est planum, quod est subtriplum differentiæ prædictorum quadratorum; additione facta, sumatur aggregati latus; hoc siquidem multatum prædicto dimidio, quantitatem ignotam exhibebit.

COMPOSITIO.



Recta quidem A B sit aggregatum quatuor laterum continuè proportionalium; recta verò A C possit aggregatum quadratorum ab extremis; super A B descriptus sit semicirculus, in quo sit aptata prædicta A C; ductaque CB: cadat deinde C I perpendicularis ad AB; protrahatur A B ad D, vt B D sit tertia pars ipsius A I; mox verò sumpta BE media proportionali inter A B, & trientem ipsius I B, sit ex B excitata perpendicularis; centro autem D, interuallo D B, descripto circulo B F H, agatur E D vsque ad H, occurrens circuli peripheriæ in punctis F, & H: factumque erit quod Porisma iubet; siquidem triangula A C B, & A C I sunt α æquiangula, atque similia, ac ob id vt A B ad A C, ita erit β A C ad A I; ergo rectangulum B A I æquabitur γ quadrato A C; At verò si fiat vt tripla A B ad A B, ita A I ad aliam B D, facta erit applicatio rectanguli B A I ad triplam A B, & ortiua magnitudo erit BD, vt itaque AB triens est triplæ AB, sic ortiua magnitudo BD triens est ipsius A I; cùm igitur BD facta sit triens ipsius A I, hæc ipsa erit ortiua magnitudo iam dicta; sumendo igitur huiusmodi trientem, perinde est ac rectangulum BAI applicasse ad triplam A B, seu fecisse, vt triplum aggregati laterum ad rectam, quæ potest &c. α 8. sexti. β 4. sexti. γ 16. sexti.

Non dissimili ratiocinio demonstrabimus rectangulum A B I æquari quadrato C B, quod est differentia inter quadratum A B, summæ omnium laterum, & quadratum A C aggregatum quadratorum ab extremis; at verò si fiat vt tripla A B, ad A B, ita rectangulum A B I ad aliud, nempè rectangulum sub A B, & triente BI erit huiusmodi rectangulum ortiua magnitudo ex applicatione solidi sub rectangulo A B I in A B, ad triplam A B; est autem rectangulum ex A B I, & triente B I triens rectanguli A B I, seu quod idem est quadratum rectæ B E mediæ proportionalis inter A B, & trientem B I; perinde igitur est sumere B E mediam proportionalem inter A B, & trientem B I, ac solidum sub rectangulo A B I, in A B, applicasse ad triplam A B; seu fecisse, vt triplum aggregati laterum, ad latus ipsum, ita differentia quadratorum &c. Deinde verò quadratum B E additum fuit quadrato B D, factumque fuit quadratum D E, cuius latus D E multatum F D, nempe dimidio F H exhibuit F E.

Superest itaque demonstradum rectam F E fore mediarum duarum aggregatum continuè proportionalium è quibus omnibus aggregatum sit data A B; & aggregatum quadratorum ab extremis sit quadratum A C.

Effectionem hanc demonstrauit Bily ostendendo mediarum summam non posse esse minorem quam F E, vt F K, neque maiorem, vt F L. *Idem per analysros regressum adhibita solidorum cõparatione ostendi potest.*

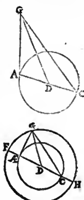
Exponitur ἐπιταγματικὴ, seu Subsidiaria Coefficiens quantitas, quam Auctor adinuenit, & quam adhibere consueuit.

Mirum est, quantam vtilitatem afferat ea, de qua loquimur, quantitas à nobis excogitata; eius enim beneficio feliciter analysis intra planorum fines instituitur, quos alioquin omninò prætergressa fuisset; est porrò quantitas prædicta, quæ assumitur, vt eius ductu, in aliam datam quantitatem, fiat planum æquale dato; perinde enim est, ac planum hoc ad datam quantitatem applicasse, & ortiuam magnitudinem assumpsisse. hoc autem artificio, vitatur multiplicatio, vnde quantitatum ascensus ad altos gradus; ac ob id in analogismo licet persistere, donec accersito parabolismo, in simplicioribus magnitudinibus analogismo facto, ad æqualitatem inter plana deuentum sit, cuius explicatione quantitas ignota perspecta fiat. *Subsidiaria coefficiens quantitas explicatur.*

Problema.

Exemplum XXXI

Datus sit circulus A B C, & in eo quaeratur punctum A, ita constitutum vt linea ab ipso per centrum D, ad alteram vsque partem puta C, duo puncta designet A, C, à quibus ad punctum datum G, ducta recta G A, G D, G C, sint proportionales.



Problema istud iucundum admodum, vt vides, nobis Florentiam transmissum Antuerpia resoluendum cum alijs quibusdam fuit; & quidem non nisi paucis diebus, proponenti satisfecimus;

Triplex casus

In primis illud est aduertendum, nimirum triplicem posse dari casum; nam, vel D G, potentia est sesquialtera ad A D, vel maiorem, vel minorem rationem habet; in primo quidem casu, recta G D, tangit circulum in A, cadens ad rectos angulos super A C; in secundo est in clinata, ad partes excernas; in tertio, ad partes internas.

Primus casus resoluitur.

In primo igitur casu satis erit ex puncto G, ducere tangentem circulum in A; ex A per D ducere A C, itemque G D, G C, erunt enim G A, G D, G C. in continua ratione. Si enim G D, quadratum est in sesquialtera ratione ad quadratum A D, si quadratum A D valet 2, quadratum G D valebit 3, quadratum A C valebit 8, & quadratum G A valebit 1; quoniam verò quadratum A C valet 8, quadratum G A valet 1, quadratum G C valebit 9; itaque quadrata ipsarum G C, G D, G A, erunt proportionalia; est enim G C potentia nonupla G A; ergo tripla magnitudine. Et quoniam G D tripla est potentia G A; ergo G D potentia ad G A, vt G C potentia ad G D; ergo G C ad G A magnitudine vt G C ad G D, potentia; ergo G C, G D, G A erunt proportionales.

Iuxta primam positionem Secundi Casus.

RESOLVTIO I.

HActenus de primo casu; ad secundum quod attinet; cum scilicet recta cadens ex puncto G perpendicularis super diametrũ A C, vtrinque protractam; procedendum, vt hic à latere. Supponatur iam factam. Quoniam igitur G A, G D, G C, sunt proportionales, etiam & earum quadrata proportionalia erunt, Intelligatur ex puncto G cadens perpendicularis super diametrum A C vtrinque protractã, & quidem in secundo casu, vt dicebamus,

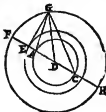
$$d - b - a$$
$$d - b - a$$
$$- da + ba + a^2$$
$$- bd + b^2 + ba$$
$$d^2 - bd - da$$
$$d^2 - 2bd - 2da + b^2 + 2ba + a^2$$
$$+ 2da \qquad - a^2$$
$$d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$$

$$d + b - a$$
$$d + b - a$$
$$- da - ba + a^2$$
$$+ bd + b^2 - ba$$
$$d^2 + bd - da$$
$$d^2 + 2bd - 2da + b^2 - 2ba + a^2$$
$$+ 2da \qquad - a^2$$
$$d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$$

$$\frac{d^2 + 2bd + b^2 - 2ba}{2} \text{ X } \frac{d^4}{d^2 - 2bd + b^2 + 2ba}$$

AD = b.
AC = 2 b.
FD seu GD = d.
FH = 2 d
FA = d − b.
FE = a
ED = d − a.
EA = d − b − a.
EC = d + b − a.
EH = 2 d − a

cebamus huiusmodi perpendicularis, cadet extra circulum, facta vero positione, vt à latere cernitur, iuxta hanc positionem E A est $d - b - a$, eius quadratum erit $d^2 - 2bd - 2da \maltese b^2 + 2ba + a^2$, cui si addideris quadratum perpendicularis G E nempè rectangulum F E H, quod est $2da - a^2$, proueniet $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$, quadratum ex A G; At E C cùm sit $d + b - a$, eius quadratum est $d^2 + 2bd - 2da + b^2 - 2ba + a^2$, cui si addideris $2da - a^2$,



$$d^2 \maltese 2bd \maltese b^2 - 2ba \text{ quadratum GC}$$
$$d^2 - 2bd \maltese b^2 \maltese 2ba \text{ quadratum GA}$$

$$2bd^2a + 4b^2da + 2b^3a - 4b^2a^2$$
$$\maltese b^2d^2 \maltese 2b^3d + b^4 - 2b^3a.$$
$$-2bd^3 - 4b^2d^2 - 2b^3d + 4b^2da.$$
$$d^4 \maltese 2bd^3 + b^2d^2 - 2bd^2a$$

$$d^4 - 2b^2d^2 + 8b^2da + b^4 - 4b^2a^2 = d^4$$
$$d^4 \maltese 8b^2da + b^4 = d^4 + 2b^2d^2 + 4b^2a^2.$$
$$8b^2da + b^4 = 2b^2d^2 + 4b^2a^2$$
$$8b^2da - 4b^2a^2 = 2b^2d^2 - b^4$$
$$8da - 4a^2 = 2d^2 - b^2$$
$$2da - a^2 = \tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{4}b^2.$$
$$d - \text{℞}\left(d^2 - \tfrac{2d^2 - b^2}{4}\right) = a.$$

nempe quadratum perpendicularis E G, proueniet $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, pro quadrato ipsius G C, ergo tria hæc quadrata $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; d^2; $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, erunt proportionalia; ergo factum sub extremis æquabitur quadrato medij; itaque $d^4 - 2b^2d^2 + 8b^2da + b^4 - 4b^2a^2$, æquabitur d^4, & operando secundum Artem, reperiemus tandem $2da - a^2$, æquari $\tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{4}b^2$, cuius æquationis radix est $d - \text{℞}\left(d^2 - \tfrac{2d^2 - b^2}{4}\right) = a$.

Hæc tamen Analysis vtpote, quæ ascendit ad quantitates imaginarias viam non suppeditat Analystæ ad componendum idoneam nisi opitulante vsu vnitatis, de quo in Geometra Promoto, cumulate disputabo.

Præstat igitur hanc aliam inire viam. Iisdem enim suppositis; cùm quadratum G C, sit $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, & quadratum G A sit $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; ergo vt $d^2 + 2bd + b^2 - 2ba$, ad d^2, ita d^2 ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; ergo diuidendo vt $2bd + b^2 - 2ba$, ad d^2, ita $2bd - b^2 - 2ba$, ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; & permutando, vt $2bd + b^2 - 2ba$, ad $2bd - b^2 - ba$, ita d^2, ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; & rursus diuidendo, vt $2b^2$, ad $2bd - b^2 - 2ba$, ita $2bd - b^2 - 2ba$, ad $d^2 - 2bd + b^2 + 2ba$; fiat autem vt b, ad d, ita d, ad r, hæc autem est quantitas, quam coefficientem subsidiariam appello; erit enim r quantitas coefficiens subsidiaria: vnde br, æquabitur d^2; quare vt $2b^2$, ad $2bd - b^2 - 2ba$, ita $2bd - b^2 - 2ba$, ad $br - 2bd + b^2 + 2ba$. Facto igitur Parabolismo per omnium applicationem ad magnitudinem b, erit vt $2b$, ad $2d - b - 2a$, ita $2d - b - 2a$, ad $r - 2d + b + 2a$; ergo factũ sub extremis æquabitur facto sub medijs; proinde $4d^2 - 4bd - 8da + b^2 + 4ba + 4a^2$, æquabitur $2br - 4bd + 2b^2 + 4ba$; vtrinque sublatis $+ 4ba$, & additis $- 4bd$, remanebit $4d^2 - 8da + b^2 + 4a^2 = 2br + 2b^2$; vtrinque sublato b^2, remanebit $4d^2 - 8da + 4a^2$, quod æquabitur $2br + b^2$; & rursus per antithesin $4d^2 - 2br - b^2$, æquabitur $8da - 4a^2$, seu quod idem est $8da - 4a^2$ æquabitur $4d^2 - 2br - b^2$; sed $2br$ æquatur $2d^2$, cùm br æquetur simplo d^2; ergo per interpretationem $4d^2 - 2br$, idem erit quod $2d^2$, quare $8da - 4a^2$ æquabitur $2d^2 - b^2$; diuisis omnibus per 4, $2da - a^2$ æquabitur $\tfrac{2}{4}d^2 - \tfrac{1}{4}b^2$; vnde $d - \text{℞}\left(d^2 - \tfrac{2d^2 - b^2}{4}\right)$ æquabitur a. Hinc.

Quantitas coefficiens subsidiaria, quã Auctor adinuenit, quia sit & eius vsus.

Po-

PORISMA.

Ex quadrato rectæ F D, subtrahatur $\frac{1}{4}$ differentiæ inter duplum quadratum F D, & quadratum A D, residui verò latus subtrahatur ex F D, quod enim remanet, erit æqualis quantitati quæsitæ F E. datur igitur F E quæsita.

Fiat, vt A D, ad F D, ita F D ad aliam Y.

COMPOSITIO.

Fiat I K æqualis A D, & exponatur N O æqualis ipsi F D, & ex quadrato ipsius N O intelligatur subtractum quadratum L M, quod est æquale quartæ parti differentiæ inter quadratum duplum N O, & quadratum I K; residuum verò sit quadratum, cuius latus Q O.

Y—— I—— K
L—— M
N Q O P

Dico N Q esse quantitatem quæsitam; adeo vt si in superiori figura ex F D subtrahatur F E æqualis ipsi N Q; & centro D, interuallo D E describatur circulus & ex puncto G, cadat G E tangens eundem, & per puncta E, & D agatur F H occurrens circunferentiæ circuli A B C in punctis A, & C, & ex his ducantur A G, C G, & ex D ipsa D G, sint A G, C G, D G in continua ratione.

Protrahatur N O in P, vt O P; sit æqualis N O.

Quoniam igitur N P diuisa est bifariam in O, & non bifariam in Q; ergo rectangulum P Q N, plus quadrato Q O æquabitur quadrato N O; vtrinque subtracto quadrato Q O; ergo rectangulum P Q N æquabitur quadrato N O, minus quadrato Q O. Sed quadratum N O, minus quadrato Q O, æquale est quadrato L M ex constructione; ergo rectangulum P Q N æquabitur quadrato L M; sed rectangulum P Q N æquale est rectangulo P N Q, minus quadrato Q N; ergo rectangulum P N Q minus quadrato Q N æquabitur quadrato L M; sed quadratum L M æquale est quartæ parti differentiæ inter duplum quadratum N O, & quadratum I K; ergo rectangulum P N Q minus quadrato N Q æquabitur quartæ parti differentiæ inter duplum quadratum N O, & quadratum I K; hoc est æquabitur dimidio quadrati N O, minus quarta parte quadrati ipsius I K. Sed rectangulum P N Q idem est quod duplum rectangulum O N Q; ergo duplum rectangulum O N Q minus quadrato N Q æquabitur dimidio quadrati N O, minus quarta parte quadrati I K; omnibusque ductis in 4; octuplum rectangulum O N Q minus quadruplo quadrato N Q æquabitur duplo quadrato N O, minus quadrato I K. Et quoniam factum fuit vt A D in superiori figura, hoc est I K ad N O, ita N O ad aliam Y, erit productum ex Y in I K æquale quadrato N O; vt igitur simplum est æquale simplo, ita duplum duplo; propterea duplum rectangulum sub I K, & Y, æquabitur duplo quadrato N O; quare quadruplum quadratum N O, minus duplo rectangulo sub I K, & Y, idem erit quod duplum quadratum N O; quare octuplum rectangulum O N Q minus quadruplo quadrato N Q, æquabitur quadruplo quadrato N O, minus duplo rectangulo ex I K in Y, minus quadrato I K, seu quod idem est quadruplum quadratum N O, minus duplo rectangulo ab I K in Y, minus quadrato I K æquabitur octuplo rectangulo O N Q minus quadruplo quadrato N Q. Et rurrursus per antithesin quadruplum quadratum O N, minus octuplo rectangulo O N Q, plus quadruplo quadrato N Q, æquabitur duplo rectangulo ab I K in Y, plus quadrato I K; vtrinque addito quadrato I K; & quadruplum quadratum O N, minus octuplo rectangulo O N Q, plus quadrato I K, plus quadruplo quadrato N Q æquabitur duplo rectangulo ab I K in Y, plus duplo quadrato I K; vtrinque addito quadruplo rectangulo sub I K in N Q, & subtrac. quadruplo rectangulo sub I K & O N, & quadruplum quad. O N, minus quadruplo rectangulo ab I K in O N, minus octuplo rectangulo O N Q, plus quadrato I K, vna cum quadruplo rectangulo ab I K in N Q plus quadruplo quadrato N Q æquabitur duplo rectangulo ab I K in Y, minus quadruplo rectangulo ab I K in O N, plus duplo quadrato I K, plus quadruplo rectangulo ab I K in N Q; ergo erit vt dupla I K ad duplam O N, minus I K, minus dupla N Q, ita dupla O N, minus I K, minus dupla N Q ad Y,

minus

minus dupla O N, plus I K plus dupla N Q; omnibusque ductis in I K, erit vt duplum quadratum I K, ad duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K, in N Q, ita duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad rectangulum ex I K in Y, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I K, vna cum duplo rectangulo ex I K in N Q; loco autem rectanguli ex I K in Y, substituatur ei æquale quadratum O N; ergo vt duplum quadratum I K, ad duplum rectangulnm ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ita duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I k, plus duplo rectangulo ex I K in N Q; Et componendo vt duplum rectangulum ex I k in O N, plus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q ad duplum rectangulum ex I K in O N, minus quadrato I K, minus rectangulo ex I K in N Q, ita quadratum O N, ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I K, plus duplo rectangulo ex I k in N Q; & permutando vt duplum rectangulum ex I K in O N, plus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad quadratum O N, ita duplum rectangulum ex I k in O N, minus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I K plus duplo rectangulo ex I K in N Q; ergo componendo erit vt quadratum O N, plus duplo rectangulo ex I K in O N plus quadrato I K, minus duplo rectangulo ex I K in N Q, ad quadratum O N, ita quadratum O N, ad quadratum O N, minus duplo rectangulo ex I K in O N, plus quadrato I k, plus duplo rectangulo ex I K in N Q; hoc est vt quadratum G C in superiori figura ad quadratum G D, ita quadratum G D ad quadratum G A; loco enim ipsius I K intelligi debet A D, vel D C; quadratum enim G C, cùm F E facta sit æqualis N Q, idem est quod quad. O N vel D G, plus duplo rectangulo A D F, vel A D G, seu A D H, plus quadrato A D, minus duplo rectangulo sub A D, & FE; quadratum verò G A idem est quod quadratum D F, vel D G, minus duplo rectangulo A D F, vel A D G, seu A D H, plus quadrato A D, plus duplo rectangulo sub A D, & F E; quare, & eorum latera proportionalia erunt; vnde, vt G C, ad G D, ita G D ad G A. Quod oportebat &c.

Iuxta primam Positionem, tertij Casus.

RESOLVTIO I.

IN præsenti autem tertio casu; si positio fieret, sic vt ignota quantitas esset F E, vt in præcedenti, incideremus in æquationem altioris gradus, & nimia affectione laborantem, vnde præstat ipsam positionem instituere vt hic à latere cernitur; Iuxta siquidem hanc hypothesin colligemus æquationem puram, in qua scilicet a^2 æquatur $\frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{4} b^2$.

GD = d
A D vel D C = b.
A C = 2 b.
E D = a.
A E = b − a.
E C = b + a.
E G = ℞ $(d^2 - a^2)$

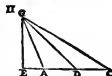
$$d^2 + b^2 - 2 b a$$
$$d^2 + b^2 + 2 b a$$
$$+ b d^2 + 2 b^3 a - 4 b^2 a^2$$
$$+ b^2 d^2 + b^4 - 2 b^3 a$$
$$d^4 + b^2 d^2 - 2 b d^2 a$$
$$d^4 + 2 b^2 d^2 + b^4 - 4 b^2 a^2 = d^4$$
$$d^4 + 2 b^2 d^2 + b^4 = d^4 + 2 b^2 a^2$$
$$2 b^2 d^2 + b^4 = 4 b^2 a^2$$
$$4 b^2 a^2 = 2 b^2 d^2 + b^4$$
$$4 a^2 = 2 d^2 + b^2$$
$$a^2 = \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{4} b^2$$



Iuxta

Iuxta secundam Positionem secundi casus.

RESOLVTIO I.



$AD = b$
$DC = b$
$DG = d$
$AC = 2b$.
$AE = a$

Quadratum DE est $a^2 + 2ba + b^2$
Quadratum GE est $d^2 - 2ba - b^2 - a^2$
Quadratum GA est $d^2 - 2ba - b^2$
Quadratum CE est $a^2 + 4ba + 4b^2$
Quadratum GC est $d^2 + 2ba + 3b^2$.

Igitur est vt $d^2 + 2ba + 3b^2$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 - 2ba - b^2$; ergo productum ab extremis æquabitur quadrato medij; proinde fiat multiplicatio, vt hìc à latere cernitur; & productum, scilicet $d^4 + 2b^2d^2 - 4b^2a^2 - 8b^3a - 3b^4$, æquabitur d^4; & per repetitam antithesin, & per parabolismum factum ex applicatione omnium ad b^2, & omnibus diuisis per 4, prouenie æquatio $a^2 + 2ba = \frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{4}b^2$. & Hinc Porisma &c.

$$d^2 + 2ba + 3b^2$$
$$d^2 - 2ba - b^2$$
$$-b^2d^2 - 2b^3a - 3b^4$$
$$-2bd^2 - 4b^2a^2 - 6b^3a.$$
$$d^4 + 2bd^2a + 3b^2d^2$$
$$d^4 + 2b^2d^2 - 4b^2a^2 - 8b^3a - 3b^4 = d^4$$
$$d^4 + 2b^2d^2 - 3b^4 = d^4 + 4b^2a^2 + 8b^3a$$
$$2b^2d^2 - 3b^4 = 4b^2a^2 + 8b^3a$$
$$4b^2a^2 + 8b^3a = 2b^2d^2 - 3b^4$$
$$4a^2 + 8ba = 2d^2 - 3b^2$$
$$a^2 + 2ba = \frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{4}b^2.$$

SCHOLION.

Verùm tametsi æquatio hæc sit per circulum, & lineam rectam explicabilis, vt supra tradidimus, demonstratio tamen contexi non potest repetendo resolutionis vestigia nisi beneficio vnitatis, qua de re in meo Promoto Geometra; quoniam nimirum factus est ascensus ad imaginarias quantitates, ob id operæ pretium est minus salebrosam calcare viam sequentem.

Iuxta secundam Positionem secundi casus.

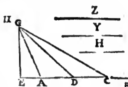
RESOLVTIO II.

$AD = b$
$DC = b$
$DG = d$
$AC = 2b$.
$AE = a$

Quadratum DE est $a^2 + 2ba + b^2$
Quadratum GE est $d^2 - 2ba - b^2 - a^2$
Quadratum GA est $d^2 - 2ba - b^2$
Quadratum CE est $a^2 + 4ba + 4b^2$
Quadratum GC est $d^2 + 2ba + 3b^2$.

Quo-

Quoniam igitur est vt $d^2 + 2ba + 3b^2$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 - 2ba - b^2$; ergo diuidendo vt $2ba + 3b^2$, ad d^2, ita $2ba + b^2$, ad $d^2 - 2ba - b^2$; ergo permutando, vt $2ba + 3b^2$, ad $2ba + b^2$, ita d^2, ad $d^2 - 2ba - b^2$; ergo diuidendo, vt $2b^2$, ad $2ba + b^2$, ita $2ba + b^2$, ad $d^2 - 2ba - b^2$; fiat autem vt b, ad d, ita d, ad r; ergo br, æquabitur d^2; ergo vt b^2, ad $2ba + b^2$, ita $2ba + b^2$, ad $br - 2ba - b^2$; ergo omnibus applicatis ad b, vt 2b, ad $2a + b$, ita $2a + b$, ad $r - 2a - b$; ergo factum sub extremis æquabitur facto sub medijs; quare $2br - 4ba - 2b^2$, æquabitur $4a^2 + 4ba + b^2$; & per antithesin $2br - 4ba - 3b^2$, æquabitur $4a^2 + ba$; ergo $2br - 3b^2 = 4a^2 + 8ba$; ergo $\frac{1}{2}br - \frac{3}{4}b^2 = a^2 + 2ba$, seu $a^2 + 2ba = \frac{1}{2}br - \frac{3}{4}b^2$. Cùm autem br æquetur d^2, idem erit $\frac{1}{2}br$, ac $\frac{1}{2}d^2$ Hinc extrahitur Radix iuxta Artis præcepta, & ea quidem erit



$\sqrt{(b^2 + \frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{4}b^2)} - b = a$. seu erunt proportionalia

$a + 2b$. $\sqrt{(\frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{4}b^2)}$. a.

Hinc.

PORISMA.

Ad quadratum dimidiæ coefficientis addatur comparationis homogeneum, & residui latus multetur ipso dimidio; hoc est ad quadratum dimidiæ baseos addatur differentia inter dimidium quadratum rectæ data à puncto externo ad bissectionis punctum baseos, & tres quartas partes quadrati dimidij eiusdem baseos; huius enim aggregati latus multatum dimidio baseos, quæsitam Radicem exhibebit. Seu

Sumatur recta, quæ possit internallum, inter dimidium quadratum rectæ à vertice, ad baseos bissectionis punctum, & tres quartas partes quadrati è dimidio baseos. & hoc, tanquàm rectangulo sub lateribus, & basi, tanquàm differentia laterum è tribus proportionalibus; reperiantur extrema; nam minus ex his ignotam quantitatem exhibebit.

COMPOSITIO.

Recta quæ à vertice trianguli ad baseos bissectionis punctum data, sit Y, factumque sit vt A D ad Y, ita Y ad Z, ita vt rectangulum sub Z, & A D æquale sit quadrato Y; mox autem fiat H, quæ possit differentiam inter dimidium quadratum ipsius Y, hoc est inter dimidiũ rectangulũ ex Z in A D, & tres quartas partes quadrati ipsius A D; quadrato autem H, tanquàm rectangulo sub extremis, & A C differentia extremorum è tribus lateribus proportionalibus, reperiantur extrema latera A E, A B; ex E, excitetur recta perpendicularis in infinitum, & inter hanc, & E D aptetur D G æqualis Y: agantur A G, C G; Dico C G, D G, A G, esse continuè proportionales.

Quoniam enim A C est differentia laterum E A, A B; ergo E A æquabitur G B; ergo rectangulum E A B æquabitur rectangulo A E C, sed rectangulum E A B æquale est quadrato H; ergo rectangulum A E C æquabitur quadrato H; sed quadratum H æquale est dimidio rectangulo ex A D in Z, minus tribus quartis partibus quadrati A D; ergo rectangulum A E C, hoc est quadratum E A plus rectangulo E A C æquabitur dimidio rectangulo ex A D in Z, minus tribus quartis partibus quadrati A D; seu quod idem est dimidium rectangulum ex A D in Z, minus tribus quartis partibus quadrati A D, æquabitur quadrato E A, plus rectangulo E A C; omnibus autem quadruplatis, duplum rectangulum ex A D in Z, minus triplo quadrato A D, æquabitur quadruplo quadrato E A, plus octuplo rectangulo E A D; & per antithesin duplum rectangulum ex A D in Z, minus quadruplo rectangulo E A D minus triplo quadrato A D, æquabitur quadruplo quadrato E A, plus rectangulo E A D; ergo duplum rectangulum ex A D in Z, minus quadruplo rectangulo E A D, minus duplo quadrato A D, æquabitur quadruplo quadrato E A, plus quadruplo rectangulo E A D, plus quadrato A D; ergo reuocata æqualitate in proportionem, erit, vt dupla A D, ad duplam E A, plus A D, ita dupla E A, plus A D ad Z, minus dupla E A, minus A D; omnibus autem ductis in A D, erit vt duplum quadratum A D ad duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D, ita duplum rectangulum E A D, plus

quadrato A D ad rectangulũ ex A D in Z, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; Et quoniam factum est vt A D ad Y, ita Y, ad Z, ac propterea rectangulum ex A D in Z, æquale est quadrato Y; loco igitur rectanguli ex A D in Z substituatur quadratum Y; ergo vt duplum quadratum A D ad duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D, ita duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D, ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; ergo componendo vt duplum rectangulum E A D plus triplo quadrato A D, ad duplum rectangulum E A D plus quadrato A D, ita quadratum Y, ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; ergo permutando vt duplum rectangulum E A D, plus triplo quadrato A D, ad quadratum Y, ita duplum rectangulum E A D, plus quadrato A D ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; ergo componendo vt quadratum Y, plus duplo rectangulo E A D, plus triplo quadrato A D, ad quadratum Y, ita quadratum Y, ad quadratum Y, minus duplo rectangulo E A D, minus quadrato A D; Sed quadratum Y plus duplo rectangulo E A D, siue simplo E A C, plus triplo quadrato A D, idem est quod quadratum G C, & quadratum Y minus duplo rectangulo E A D, seu simplo E A C, minus quadrato A D, idem est quod quadratum G A; & quadratum Y est idem, quod quadratum G D; ergo vt quadratum G C ad quadratum G D, ita quadratum G D, ad quadratum G A; ergo & eorum latera proportionalia erunt; quare vt G C, ad G D, ita G D, ad G A.

Est enim G D facta æqualis Y.

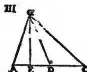
Iuxta secundam Positionem, tertij Casus.

RESOLVTIO I.

Quadratum G E = $d^2 - a^2$	$GD = d$
Quadratum A E = $b^2 - 2ba + a^2$	$AD = b$
Quadratum G A = $d^2 + b^2 - 2ba$	$AC = 2b$.
Quadratum C E = $b^2 - 2ba + a^2$	$ED = a$
Quadratum G C = $d^2 + b^2 + 2ba$; ergo	$AE = b - a$

Vt $d^2 + b^2 + 2ba$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 + b^2 - 2ba$

$$d^2 + b^2 - 2ba$$
$$d^2 + b^2 + 2ba$$
$$+ bd^2a + 2b^3a - 4b^2a^2$$
$$+ b^2d^2 + b^4 - 2b^3a$$
$$d^4 + b^2d^2 - 2bd^2a$$
$$d^4 + 2b^2d^2 + b^4 - 4b^2a^2 = d^4$$
$$d^4 + 2b^2d^2 + b^4 = d^4 + 4b^2a^2$$
$$2b^2d^2 + b^4 = 4b^2a^2$$
$$4b^2a^2 = 2b^2d^2 + b^4$$
$$4a^2 = 2d^2 + b^2$$
$$a^2 = \tfrac{1}{2}d^2 + \tfrac{1}{4}b^2.$$



Hinc.

PORISMA.

Sumatur dimidium quadrati rectæ à vertice ad punctum bisectionis, cui addatur ¼ quadrati à dimidio datæ rectæ. Huius enim aggregati latus, quæsitam radicem repræsentabit.

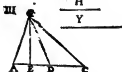
Iuxtà

Iuxta secundam Positionem tertij casus.

RESOLVTIO II.

Quadratum G E $= d^2 - a^2$
Quadratum A E $= b^2 - 2ba + a^2$
Quadratum G A $= d^2 + b^2 - 2ba$
Quadratum C E $= b^2 + 2ba + a^2$
Quadratum G C $= d^2 + b^2 + 2ba$.

G D $= d$
A D $= b$
A G $= 2b$
E D $= a$
A E $= b - a$



Quoniam igitur est vt $d^2 + b^2 + 2ba$, ad d^2, ita d^2, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; ergo diuidendo vt $b^2 + 2ba$ ad d^2, ita $2ba - b^2$, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; & permutando vt $b^2 + 2ba$, ad $2ba - b^2$, ita d^2, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; & diuidendo vt $2b^2$, ad $2ba - b^2$, ita $2ba - b^2$, ad $d^2 + b^2 - 2ba$; fiat vt b, ad d, ita d, ad r; ergo $br = d^2$; ergo vt $2b^2$, ad $2ba - b^2$, ita $2ba - b^2$, ad $br + b^2 - 2ba$; omnibus applicatis ad b; ergo vt $2b$, ad $2a - b$, ita $2a - b$ ad $r + b - 2a$; ergo factum sub medijs æquabitur facto sub extremis; quare $2br + 2b^2 - 4ba = 4a^2 - 4ba + b^2$, ergo $2br + b^2 - 4ba = 4a^2 - 4ba$; ergo $2br + b^2 = 4a^2$; ergo $\frac{1}{2}br + \frac{1}{4}b^2 = a^2$. Hinc Porisma &c.

COMPOSITIO.

DAta sit A C trianguli basis, circulique diameter & Y recta quidem à vertice ad bisectionis punctum ipsius baseos diuisæ bifariam in D, & vt A D ad Y, ita Y fiat ad H; erit autem rectangulum ex A D in H æquale quadrato Y; sumatur autem dimidium rectanguli ex A D in H, eique addatur quarta pars quadrati A D, aggregati sumatur latus, hoc enim erit quod quæritur, nimirum E D. Ex puncto igitur E excitetur perpendicularis inter quam & E D aptetur G D æqualis Y: ducantur G A, G C. Dico esse vt G C ad G D, ita G D, ad G A.

Quoniam igitur E D æqualis est rectæ quæ potest dimidium rectanguli ex A D in H, plus quarta parte quadrati A D; ergo dimidium rectanguli ex AD in H, plus quarta parte quadrati A D æquabitur quadrato E D; ergo omnibus quadruplatis duplum rectangulum ex A D in H plus quadrato AD æquabitur quadruplo quadrato E D; vtrinque subtracto quadruplo rectangulo ex A D in E D, duplum rectangulum ex A D in H, plus quadrato A D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D, æquabitur quadruplo quadrato E D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D; vtrinque addito quadrato A D; ergo duplum rectangulum ex A D in H, plus duplo quadrato A D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D æquabitur quadruplo quadrato E D, minus quadruplo rectangulo ex A D in E D plus quadrato A D; ergo vt dupla A D ad duplam E D minus A D, ita dupla E D minus A D, ad H plus A D, minus dupla E D; omnibus autem ductis in A D; ergo vt duplum quadratum A D ad duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ita duplum rectangulum ex A D in E D, minus quad. AD ad rectangulū ex A D in H, plus quad. A D, minus duplo rectangulo ex A D in E D. Et quoniam factum est vt A D ad Y, ita Y ad H, atque adeo rectangulum ex A D in H æquale est quadrato Y; substituatur Y quadratum loco rectanguli ex A D in H; ergo vt duplum quadratum A D, ad duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ita duplum rectangulum ex A D in E D minus quadrato A D ad quadratum Y, plus quadrato A D, minus duplo rectangulo ex A D in E D; ergo componendo vt duplum quadratum A D, plus duplo rectangulo ex A D in E D ad duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ita quadratum Y, ad Y quadratum, plus quadrato A D, minus duplo rectangulo ex A D in E D; & permutando vt quadratum A D, plus duplo rectangulo ex A D in E D ad quadratum Y, ita duplum rectangulum ex A D in E D, minus quadrato A D, ad quadratum Y, plus quadrato A D minus duplo rectangulo ex A D in E D; ergo componendo vt quadratum Y, plus quad. A D, plus duplo rectangulo ex A D in E D, ad quadratum Y, ita

quadratum Y ad quadratum Y plus quadrato A D minus duplo rectangulo ex A D in E D.

Est autem quadratum Y idem quod G D quadratum, cùm G D facta sit æqualis Y; ergo vt G D quadratum, plus A D quad. plus duplo rectangulo ex A D in E D ad G D quadratum, ita G D quadratum ad G D quadratum, plus A D quadrato, minus duplo rectangulo ex A D in E D; ergo & eorum latera proportionalia erunt; est autem ipsius G D quadrati, plus A D quadrato, plus duplo rectangulo ex A D in E D, latus quidem G C, ipsius vero G D quadrati latus est G D, at ipsius G D quadrati, plus A D quadrato, minus duplo rectangulo ex A D in E D, latus est G A; ergo vt G C ad G D, ita G D, ad G A.

PROBLEMA.

Exemplum XXII. *Datum latus ita secare, vt differentia quadratorum partium ad rectangulum sub partibus datam habeat rationem.*

RESOLVTIO.

Datum sit latus diuidendum b; at verò data sit proportio vt r ad s, seu vt b ad d, & oporteat facere, quod imperatum est.

Differentia partium esto a, vt summa partium sit b. quamobrem $b + a$ erit duplum maioris, & $b - a$ erit duplum minoris, quapropter ipsæ partes erunt $\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} a$. & $\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} a$; differentia proinde quadratorum ab ipsis partibus erit $b a$; at verò rectangulum sub ipsis partibus est $\frac{b^2 - a^2}{4}$ & est æquale quadrato medij, proinde $b a$; ad $\frac{b^2 - a^2}{4}$ esse debet vt b ad d in ratione data; quamobrem $b d a$ æquabitur $\frac{b^3 - b a^2}{4}$, atque adeo $4 b d a$; æquabitur $b^3 - b a^2$; omnibus autem applicatis ad b. Fiet $4 d a = b^2 - a^2$, & per antithesin $4 d a + a^2$ æquabitur b^2, quæ quidem æquatio si explicetur $\sqrt{(4 d^2 + b^2)} - 2 d$, æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Quadruplum quadratum termini posterioris addatur quadrato prioris, huius enim summæ radix mulctata duplo termini posterioris, partium differentiam exhibebit existente earundem summa priori termino datæ rationis.

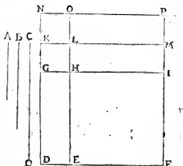
COMPOSITIO.

Datum sit latus diuidendum A B; & ratio vt r ad s, seu vt A B ad B C; coniungantur ad rectos angulos, & producatur B C vsque ad D, itaut C D, B C sint æquales, centro autem D, interuallo D B, describatur circulus; connectatur A D, quæ protrahatur ad peripheriam in F, itaut recta A F, secet peripheriam in duobus punctis E, F, & factum erit quod Porismà iubet; quandoquidem B D, dupla est ipsius B C; ob id quadratum B D quadruplum erit quadrati B C; at verò quadratum B D additur quadrato A B; sitque quadratum A D à cuius latere A D subtrahitur E D; hoc est dupla B C & remanet A E, Dico ipsam A E differentiam esse partium quæsitarum; habita verò differentia partium, & earundem A B aggregato, partes ipsæ non latebunt, subtracta enim AE seu A G ex A B, residuum G B diuidi debet bifariam in H, nam H B vna ex ipsis erit pars minor, & eadem plus ipsa A E, nempe reliqua A H erit pars maior.

Quoniam enim A B perpendicularis est ad B D, circulum tangit; ob id quadratum ipsius est æquale rectangulo F A E; seu quadrato A E; plus rectangulo A E F; hoc est plus quadruplo rectangulo sub A E, B C; sed quadratum idem A B, æquale est quadrato ex

to ex A E, tanquam differentia partium, quarum summa sit A B; plus quadruplo rectangulo sub ipsis partibus, ergo quadruplum rectangulum sub A E, B C, æquale erit quadruplo rectangulo sub ipsis partibus, ergo simplum rectangulum sub A E, B C, æquabitur rectangulo sub ipsis partibus; sed ob communem altitudinem A E, vt A B, ad B C, ita rectangulum B A E, ad rectangulum sub A E, B C rectangulum verò sub B A, aggregato partium, & A E differentia earundem, æquale est interuallo quadratorum ipsarum partium, vt mox constabit; ergo vt A B ad B C, ita interuallum quadratorum ipsarum partium, ad rectangulum sub partibus, hoc est ita rectangulum B A G, seu tinteruallum quadratorum partium A H, H B, ad rectangulum A H B sub ipsis partibus. Diuisimus igitur datum latus A B &c. Quod facere oportebat.

Lemma.



Quod autem superiùs assumpsimus, nimirum rectangulum sub A E differentia partium, & B A earundem summa æquetur interuallo quadratorum ab ipsis partibus facilè quidem ostendemus, si per partes nos intelligamus extremas lineas ex tribus in continua ratione, quarum media sit differentia earundem. Sint A, B, C quatuor latera proportionalia, & K D, æqualis C, at K N æqualis A, aggregatum sit D N, secta K D, in G vt G K, sit æqualis K N. erit G D differentia partium, constituto rectangulo L N P F sub aggregato D N; & D F, latere maiori, per K agatur K M parallela ipsi D F vel N P secta N P in O, quæ sit æqualis K N, per O agatur O E parallela ipsi D N vel P F, secans K M in L & per G agatur G I parallela &c. secans O E in H; rectangulum E P. continetur sub aggregato extremorum atque adeo sub aggregato partium, & sub E F differentia earundem partium, æquale est quadrato E I plus rectangulo H M vna cum recta ngulo L P seu D H, constat autem quadratum E I plus rectangulo H M vna cum rectangulo D H, esse interuallum quadratorum D M, G L, seu K O, scilicet à partibus.

SCHOLION.

Elegantius ita alicui videbitur.

Propositum sit latus diuidendum b; & ratio, quam habere debet rectan gulum sub partibus, ad differentiam quadrat. ex ijsdem sit vt r ad t. Sit tam factum adeo vt pars vna sit a, alia erit b − a; rectangulum sub partibus est ba − a²; differentia verò quadratorum à partibus est b² − 2 ba; quoniam autem est vt r ad t ita ba − a² ad b² − 2 ba, est autem vt r ad t ita r² ad s²; si nã media sit inter r & t; ergo vt r² ad s²; ita ba − a² ad b² − 2 ba; quare vt r ad s, ita ℞ *(ba − a²) ad* ℞ *(b² − 2 ba) fiat autem r media proportionalis interduas magnitudines k & l adeo tamen vt quadratum ex k superet quadratum ex l hoc internallo nimirum s² quadrato ex s sed rem non absoluit.*

b.

a b − a

PROBLEMA.

Datum latus A B bifariam diuisum in C, sit iniunctum iterum illud diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B D, ad rectangulum A D C, plus rectangulo ex A B, in C D, sit in ratione data. Exemplum XXIII.

Data quidem sit ratio A B ad X.

RESO-

RESOLVTIO I.

X

A C D B

VVlgus Algebristarum hunc in modum propositi Problematis Analysin institueret; recta A B sit $2b$, ita vt tam A C quam B C sit b; at verò C D sit a, vnde D B sit $b - a$, & A D sit $b + a$; rectangulum A B D erit $2b^2 - 2ba$, rectangulum A D C erit $ba + a^2$ & rectangulum ex A B in C D erit $2ba$; atque adeo horum aggregatum erit $3ba + a^2$; si itaque X dicatur r, erit vt $2b$ ad r, ita $2b^2 - 2ba$, ad $3ba + a^2$; Itaque multiplicatis extremis ac medijs $2b^2r - 2bra$ æquabitur $6b^2a + 2ba^2$; & per antithesin $2ba^2 + 6b^2a + 2bra$, æquabitur $2b^3r$. Instituto parabolismo per applicationem omnium ad d, & rursus omnibus diuisis per 2, peruenitur ad æquationem, cuius radix extrahitur secundum Artem.

Hæc autem resolutionis ratio in Geometricis quidem nimis onerosa est, & Arithmeticis potius, quàm Geometricis, accomodata; siquidem non licet inhærere vestigijs Analyseos in componendo, nisi quispiam adsciscat vel vnitatem in Geometria, vel demonstrationem contexere per comparationem solidorum velit; itaque longè quidem elegantius Problema resoluetur & componetur ad eum, qui sequitur modum.

RESOLVTIO II.

X

A C D B

REcta A B sit $2b$, adeo vt tam A B, quam A C sit b; at verò C D esto a: vnde D B erit $b - a$, vt A D erit $b + a$; rectangulum A B D erit $2b^2 - 2ba$; at verò rectangulum A D C erit $ba + a^2$, cui quidem addito rectangulo ex A B in C D, nempe $2ba$, fiet aggregatum $3ba + a^2$, ad quod $2b^2 - 2ba$, nempe rectangulum A B D debeat esse vt $2b$, ad r.

Quoniam igitur est vt $2b$ ad r, ita $2b^2 - 2ba$, ad $3ba + a^2$, sed $3ba + a^2$ æquale est rectangulo ex $3b + a$, in a; ergo, vt $2b$, ad r, ita $2b^2 - 2ba$, ad rectangulum ex $3b + a$, in a; & subduplatis antecedentibus erit vt b, ad r, ita $b^2 - ba$, ad rectangulum ex $3b + a$, in a; sed vt b, ad r, ita est $b^2 - ba$, ad $br - ra$; ergo rectangulum ex $3b + a$, in a, æquabitur rectangulo $br - ra$; quamobrem erit vt $3b + a$, ad r, ita $b - a$, ad a, ergo componendo erit vt $3b + r + a$, ad r, ita b, ad a.

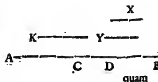
Eo autem deducta res est, vt dato rb rectangulo sub lateribus, & $3b + r$, differentia extremorum, reperiantur extrema latera. Hinc,

PORISMA.

Reperiatur recta sexquialtera ad lineam diuidendam, cui addatur terminus alter rationis, & hoc aggregato tanquam differentia extremorum data, datoque rectangulo sub dimidio lineæ diuidendæ, & altero rationis extremo, reperiantur extrema, minus enim extremum quæsitam radicem repræsentabit.

Vides enim in resolutione, extremarum differentiam esse $3b + r$ datam, at rectangulum sub r & b notum esse.

COMPOSITIO.



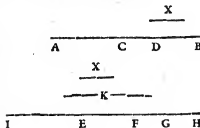
SIt data recta A B diuisa bifariam in C oporteat illam iterum diuidere in D, ita vt rectangulum A B D ad aggregatum rectangulorum, quorum vnum A D C, aliud verò ex A B in C D, rationem habeat, vt A B ad X. Fiat recta K potens rectangulum sub A C, vel C B, & X, & hac tan-

quam

quam media trium proportionalium, quarum extremæ differant per triplam A C, plus X, reperiantur extremæ, quarum minor sit Y; maior enim erit tripla A C plus X, plus Y. Fiat C D in segmento A B æqualis Y.

Quoniam igitur est vt tripla A C plus X, plus Y, ad K, ita K ad Y; at verò K potest ex constructione rectangulum sub A C, & X; ergo erit vt tripla A C plus X, plus Y ad X, ita A C ad Y; ergo diuidendo erit vt tripla A C plus Y, ad X, ita A C minus Y, ad Y; ergo factum sub extremis æquabitur facto sub medijs; quamobrem rectangulum sub tripla A C, plus Y, & Y, æquabitur rectangulo sub A C, minus Y, & X; sed vt A C ad X, ita est A C quadratum minus rectangulo sub A C, & Y, ad rectangulum sub A C, & X, minus rectangulo sub X, & Y; ergo vt A C ad X, ita erit A C quadratum minus rectangulo sub A C, & Y, ad rectangulum sub tripla A C, & Y, in eandem Y; & duplatis antecedentibus erit vt dupla A C ad X, ita duplum quadratum A C, minus duplo rectangulo ex A C in Y, ad rectangulum ex tripla A C, plus Y, in Y; sed rectangulum ex tripla A C in Y, plus quadrato ipsius Y, idem est quod rectangulum sub tripla A C, plus Y, in Y; ergo erit, vt dupla A C ad X, ita duplum quadratum A C, minus duplo rectangulo ex A C in Y, ad triplum rectangulum ex A C in Y, minus quadrato eiusdem Y, hoc est vt A B ad X, ita rectangulum A B D, ad aggregatum rectangulorum, quorum vnum est A D C, aliud verò rectangulum ex A B in C D; duplum enim quadratum A C, minus duplo rectangulo ex A C in Y, idem est quod rectangulum A B D; rectangulum verò ex A C in Y plus quadrato ipsius Y idem est quod rectangulum A D C, & rectangulum duplum ex A C in Y, idem est quod rectangulum sub A B, & C D: vnde prædictum rectangulorum aggregatum erit idem quòd rectangulum A D C, plus rectangulo ex A B in C D. Vel clariùs sic.

Sit exposita E F æqualis A C, & protrahatur ad partes E, in I, ita vt I F, sit tripla ipsius E F; mox verò protrahatur I F ad partes F, ita vt F G sit æqualis ipsi X: deinde reperiatur K, quæ possit rectangulum sub E F, & X: mox autem recta K tanquam media, & I G tanquam differentia extremarum reperiantur extremæ I H, G H. In recta verò A B, secetur C D æqualis ipsi G H, quæ minor est, quàm C B. Dico A B sectam esse in D, vt Problema requirit ita vt rectangulum A B D ad rectangulum ex A B in C D, plus rectangulo A D C, sit vt A B, ad X. *Clarior demonstratio.*



Quoniã igitur est vt I H ad K ita K ad GH; est autem rectangulum ex E F & X per constructionem æquale quadrato K; propterea erit rectangulum I H G æquale rectangulo ex X, in E F; ergo erit vt I H ad X, ita E F ad G H, hoc est vt tripla A C, plus X, plus C D, ad X, ita A C, vel C B, ad C D; ergo diuidendo erit, vt tripla A C, plus C D, ad X, ita A C vel C B, minus C D, hoc est D B, ad C D; ergo rectangulum ex tripla A C, plus C D, in C D, æquabitur rectangulo ex A C, vel C B in X, minus rectangulo ex C D in X, hoc est rectangulo ex B D in X; sed vt A C vel C B, ad X, ita est C B quadratum, minus rectangulo B C D, hoc est rectangulum C B D, ad rectangulum ex C B in X, minus rectangulo ex C D in X; hoc est ad rectangulum ex D B in X; ergo vt C B ad X, ita C B quadratum minus rectangulo B C D, hoc est rectangulum C B D, ad rectangulum ex tripla A C, plus C D in C D; ergo duplatis antecedentibus, vt dupla C B, hoc est A B ad X, ita duplum quadratum C B, minus duplo rectangulo B C D, hoc est duplum rectangulum C B D, hoc est simplum rectangulum A B D, ad rectangulum ex tripla A C, plus C D in C D; sed triplum rectangulum B C D, plus quadrato C D, hoc est rectangulum sub A B in C D, vnà cum rectangulo A D C, æquale est rectangulo ex tripla A C plus C D, in C D; ergo vt A B ad X, ita rectangulum A B D, ad rectangulum ex A B, in C D, vna cum rectangulo A D C.

Quoniam

Quoniam verò infinities contingit, vt resolutiones modo iam dicto per proportionalia procedētes non declinēt à solidis, vel plano planis; propterea coacti sumus Artem adinuenire, qua etiamsi resolutio ascenderit ad altiores gradus, demonstrationem Geometricam expeditè contexere valeamus; de quo in sequenti Capite.

Auctoris Noua, eaque Methodus Absolutissima, qua demonstrantur omnium Problematum effectiones ex ijs deducta Resolutionibus, quarum vestigia, vel non licet, vel non placet in componendo repetere; vbi quod Algebricum est ad Geometricam φράσιν traducitur. Caput X.

VT nihil est quod magis Analystarum ingenia torserit, quàm Analysi quidem ad finem perducta, etsi ad altiores gradus ascenderit, Effectionem à Porismate præscriptam Geometricè demonstrare, ijs neglectis vestigijs, quæ nos in resoluendo impressimus; ita sanè nil magis expetendum videtur quàm artificium quoddam, quo id facile præstare valeamus; Et certè hucusque tam Veteres, quàm Recentiores Analystæ quamuis effectiones industriosè, & methodicè comparauerint, firmam tamen, ac stabilē differendi rationem ad illas demonstrandas, videntur ignorasse, cùm casu potius in earum demonstrationibus processerint; Multum enim differt, quod Porisma præscripsit artificiosè demonstrandum suscipere, vel non ita, sed id casu præstare; Illud est opus Artis, hoc autem Fortunæ.

Quid maximè vexauerit Analystarum ingenia.

Iuuat igitur in hoc præsenti Capite viam hanc aperire, per quam si quispiam incesserit fiet voti compos; de hoc tamen monitum Lectorem volumus quòd duobus modis explicari possunt ea, quæ in Porismatibus occurrunt, vel Arithemetico more dicendo videlicet; planum diuidi per latus, vel solidum per latus, aut planum; vel magis Geometricè dicendo, quòd planum applicetur lateri, vel solidum lateri; Aut plano factis applicationibus per analogismos, vt si planum fuerit quadratum dicendo; fiat vt latus, ad quod applicatur quadratum, ad quadrati latus, ita hoc ad aliud; quod enim prouenit erit magnitudo ex applicatione ortiua, & si planum fuerit altera parte longius, vt est latus ad quod fit applicatio, ad latus vnum rectanguli, ita latus alterum ad aliud; quod enim prouenit erit ex applicatione magnitudo ortiua.

Admonitio ad Lectorem.

Illud idem de solidis suo modo intelligendum. Vt si cubus sit applicandus lateri proposito; fiat vt huiusmodi latus, ad cubi latus, ita eiusdem basis ad aliud planum; quod enim prouenit erit magnitudo ex applicatione ortiua; sic si fuerit parallelepipedum &c. ab his enim hic supersedendum, quonim iterum fusiori calamo scribendum de his erit in posterum, cùm de vsu Veteris Algebræ ad Geometricè Problemata resoluenda tractauerimus. Præmonuisse tamen hæc non fuit abs re, quoniam in proximis resolutionibus dum fractiones occurrunt resoluendæ ad integras magnitudines, hæc præcognouisse oportet.

Totum autem Artificium in eo positum est, vt cùm nos non possumus sistere intra planorum fines in resoluendo, sed cogimur ad solida, vel plano plana &c. ascendere, neque Analysis suppeditat nobis vestigia, per quæ intra planorum fines regrediendo, demonstrationes, Analyseos vestigijs insistendo, contexere valeamus, quod passim contingit, & mentem Artificis vexat; Artificium, inquam, in eo positum est, vt quod Porisma præscripsit, tanquam Theorema demonstrandum suscipiamus, ad eum prorsus modum, quo id fieri debere de Theorematum resolutionibus tractantes, explicuimus.

In quo consistat artificiū de quo differitur.

Plerunque verò quod Porisma docet, est tantummodò generale quoddam Theorema; tunc autem vel deductione ad incommodum, illud ostendi potest, quod erit Geometricam effectionem demonstrasse, vel directè beneficio Analyseos idem ostendere; siue id Antiqua, siue Noua Methodo perficiatur; hæc tamen omnia idoneis exemplis paulò infra nos explicare tentabimus.

Proble-

PROBLEMA.

Datum latus ita diuidere, vt quadratum vnius partis datum planum assumens ad rectangulum sub toto & altera parte sibi, itidem datum planum adsciscens, propositam rationem obtineat. Exemplum 2.

Aduertendum porrò nihil referre, num assumendum planum sit idem vtrobique; vtro enim modo se habeat, eadem perpetuo sequitur Resolutio.

RESOLVTIO.

Sit iam factum, & quidem datum latus diuidendum A B sit b, ita vt quadratum vnius partis, ipsius, plus quadrato datæ rectæ C, quæ sit q, ad rectangulum sub toto & altera parte, plus quadrato datæ rectæ P, quæ sit n, datam habeat rationem, vt r, ad s, siue ex constructione vt A B, ad E, seu vt b, ad d. Pars vna esto a: altera erit $b - a$; quadratum illius est a^2, cui addito q^2, fiet $a^2 + q^2$. Deinde rectangulum sub tota b, & altera parte $b - a$, est $b^2 - ba$, cui addito n^2, fit $b^2 - ba + n^2$; vt autem est b, ad d, ita quidem esse debet $a^2 + q^2$, ad $b^2 - ba + n^2$; multiplicatis extremis & medijs inter se, fit $da^2 + dq^2 = b^3 - b^2a + bn^2$; & per antithesin $da^2 = b^3 - b^2a + bn^2 - dq^2$; & rursus $da^2 + b^2a = b^3 + bn^2 - dq^2$; omnibusque applicatis ad d; $a^2 + \frac{b^2a}{d}$ æquabitur $\frac{b^3+bn^2}{d} - q^2$. Fiat vt d, ad b, ita b, ad f, & erit $a^2 + fa = \frac{b^3+bn^2}{d} - q^2$; fiat vt d ad b, ita $b^2 + n^2$, ad g^2, & $a^2 + fa$, æquabitur $g^2 - q^2$. Hinc radix ℞Q$(\frac{1}{4}f^2 + g^2 - q^2) - \frac{1}{2}f$. Hinc.

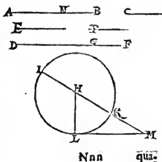
PORISMA.

Fiat vt r, ad s, ita b latus diuidendum ad aliam magnitudinem d; mox vt d, ad b, ita $b^2 + n^2$, ad g^2, & vt d ad b, ita b, ad f. Deinde ad quartam partem quadrati ipsius f addatur $g^2 - q^2$; aggregati autem latus multetur dimidio ipsius f; residuum enim quæsitæ radicis valorem exhibebit, seu

Fiat vt r, ad s, ita A B ad E; mox vt E ad A B, ita A B quadratum, plus quadrato P, ad aliud quadratum D F, & vt E, ad A B, ita A B, ad I K. Deinde ad quartam partem quadrati ipsius I K, addatur D F quadratum, minus quadrato C, aggregati autem latus multetur dimidio ipsius I K, residuum enim quæsitæ quantitatis valorem exhibebit. Vnde. *Vide schema subsequens.*

Effectio Geometrica.

Data sit recta A B diuidenda in puncto, vt quadratum partis, vnà cum quadrato datæ rectæ C, ad rectangulum sub tota nimirum & altera parte, vnà cum quadrato datæ rectæ P, sit vt A B, ad datam E.



Aduertendum est autem, quod hic A B respondet b in resolutione, & A N respondet ipsi a; & recta C respondet ipsi q, & recta P respondet rectæ n; insuper E respondet in resolutione ipsi d.

Fiat autem vt E ad A B, ita quadratum rectæ A B, vnà cum quadrato datæ rectæ P, ad quadratum rectæ D F ex eius quadrato auferatur

quadratum datæ rectæ C, vt reliquum fit quadratum segmenti D G. Deinde fiat vt E ad A B, ita A B, ad I K, cuius dimidium H K, vel H I, sit semidiameter circuli H I L K; sitque recta L M, quæ circulum tangat in puncto L, æqualis facta ipsi D G, & per centrum H, agatur M I, occurrens circuli circumferentiæ in K; secetur A B, in N, ita vt A N, sit æqualis N K. Dico quadratum A N, plus quadrato C, ad rectangulum A B N, plus quadrato P, esse vt A B ad E. Ducatur H L.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Porisma dictat, num quadratum A N plus quadrato C ad rectangulum A B N, plus quadrato P sit in ratione A B ad E, inquirere.

RESOLVTIO.

EAdem retenta positione vt supra, A B sit b; E sit d; C sit q. P sit n; D F sit g, & I K sit f; insuper M K, siue A N, sit a.

Quoniam igitur est vt d ad b, ita b ad f, & vt b ad f, ita b a ad f a, ergo vt d, ad b, ita b a, ad f a; sed vt d ad b, ex constructione, ita $b^2 + n^2$, ad g^2; ergo vt $b^2 + n^2$, ad g^2, ita b a, ad f a; & permutando vt $b^2 + n^2$, ad b a, ita g^2, ad f a; & per conuersionẽ rationis vt $b^2 + n^2$, ad $b^2 + n^2 - ba$, ita g^2, ad $g^2 - fa$, & permutando, vt $b^2 + n^2$ ad g^2, ita $b^2 + n^2 - ba$, ad $g^2 - fa$; sed erat ex constructione vt d ad b, ita $b^2 + n^2$ ad g^2; ergo vt d ad b, ita $b^2 + n^2 - ba$, ad $g^2 - fa$; est autem $g^2 - fa = a^2 + q^2$, vt mox ostendam; ergo vt d, ad b, ita $b^2 + n^2 - ba$, ad $a^2 + q^2$; & conuertendo vt b, ad d, ita $a^2 + q^2$, ad $b^2 + n^2 - ba$.

Quod autem $g^2 - fa$, æquale sit $a^2 + q^2$, constat. Est enim $a^2 + fa = g^2 - q^2$; ergo $a^2 + q^2$ æquabitur $g^2 - fa$. Hinc.

THEOREMA.

Data sit recta A B, ita vt E ad A B sit vt quadratum rectæ A B, plus quadrato P, ad quadratum rectæ D F, ex quo ablatum sit quadratum rectæ C, vt reliquum sit factum quadratum segmenti D G. Deinde sit factum vt E ad A B, ita A B ad I K, cuius dimidium H I, vel H K sit semidiameter circuli I L K, quem tangat recta quidem L M æqualis ipsi D G; sitque per centrum H ducta M I, occurrens peripheriæ in K; factaque sit A N æqualis M K. Dico eam esse rationem quadrati A N, plus quadrato C, ad rectangulum A B N plus quadrato P, vt A B ad E.

COMPOSITIO.

QVoniam igitur; vt E ad A B, ita A B ad I K ex constructione; & vt A B ad I K, ita rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I; ergo vt E ad A B, ita rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I; sed vt E ad A B, ita quadratum A B plus quadrato P, ad quadratum D F; ergo vt rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I, ita quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum D F, seu vt quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum D F, ita rectangulum ex M K in A B, ad rectangulum M K I; & permutando vt quadratum A B plus quadrato P, ad rectangulum ex M K in A B, ita quadratum D F, ad rectangulum M K I; & per conuersionem rationis vt quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum A B, plus quadrato P, minus rectangulo ex M K in A B, ita quadratum D F, ad quadratum D F, minus rectangulo M K I; & permutando vt quadratum A B plus quadrato P, ad quadratum D F, ita quadratum A B plus quadrato P, minus rectangulo ex M K in A B, ad quadratum D F minus rectangulo M K I. Sed ex constructione vt E ad A B, ita est quadratum A B, plus quadrato P, ad quadratum D F; ergo vt E ad A B, ita quadratum A B, plus quadrato P, minus rectangulo ex M K in A B, ad quadratum D F, minus rectangulo M K I; hoc est ita quadratum A B, plus quadrato P, minus rectangulo B A N (fecimus enim A N æqualem ipsi M K) seu quod idem est, ita rectangulum A B N (quadratum enim A B minus rectangulo B A N, idem est quod rectangulum A B N) plus quadrato P, ad quadratum D F, minus rectan-

rectangulo M K I; Est autem quadratum D F, minus rectangulo M K I æquale quadrato M K, seu quadrato A N, plus quadrato C, vt mox constabit; ergo vt E ad A B, ita erit rectangulum A B N plus quadrato P, ad quadratum A N plus quadrato C, & conuertendo vt A B ad E, hoc est vt r, ad s, ita quadratum A N, plus quadrato C, ad rectangulum A B N, plus quadrato P.

Quod autem quadratum M K, plus quadrato C, æquetur quadrato D F, minus rectangulo M K I, sic ostenditur. Quadratum M K æquatur quadrato M H, minus rectangulo M K I, minus quadrato H I; hoc est quadratum M K æquatur quadrato L M, minus rectangulo M K I; hoc est quadrato D F minus quadrato C, minus rectangulo M K I, vtrinque addito quadrato C; ergo quadratum M K, plus quadrato C, æquabitur quadrato D F, minus rectangulo M K I. Datum igitur latus ita diuisimus, vt quadratum vnius partis datum planum assumens &c. Quod facere oportebat.

Valde refert, quo nam pacto concipiatur Problema, & pro eius solutione hæc, vel illa instituatur positio; hinc enim pendet in primis Resolutionis ratio, itaut facilis admodum futura sit, si opportunè supradicta tractentur: quod vt clarius fiat, sit in exemplum. *Aduertenda quædam.*

P R O B L E M A.

Propositum latus ita producere, vt quadratum compositi ex dato cum producto, sit ad excessum ipsius supra quadratum dati in præscripta ratione. Exemplum I I.

Nisi quis paulò diligentius rem introspexerit, statim sequentem resolutionem instituet: Datum sit latus b; & ratio data sit vt r, ad s, pro qua substituatur b, ad d; at verò pars adiungenda esto a; ergo totum aggregatum erit $b + a$, cuius quadratum est $b^2 + 2ba + a^2$, excessus huius supra b^2, nempe supra quadratum lateris dati est $2ba + a^2$; vt igitur b, ad d, ita debet esse $b^2 + 2ba + a^2$, ad $2ba + a^2$; multiplicatis extremis & medijs $2ba + ba^2$ æquabitur $db^2 + 2dba + da^2$; & per antithesin $ba^2 - da^2 + 2ba - 2dba$; æquabitur db^2; omnibus applicatis ad $b - d$, & $a^2 + 2ba$ æquabitur $\frac{db^2}{b-d}$, tollatur fractio, nempe fiat ut $b - d$, ad d, ita b, ad aliud, & inter b, & hoc inuentum, exempligratia, k media reperiatur proportionalis z, & $a^2 + 2ba$ æquabitur z^2, cuius radix erui potest iuxta Artis præcepta, & inde etiam deducitur Porisma, Problematis effectionem dictans.

Verum enim uerò, ad Compositionem instituendam, atque adeò effectionem demonstrandam, opus erit Porisma ipsum per modum Theorematis assumere demonstrandum Arte iam explicata, quod exigui laboris non est.

Sed si Problema aliter concipiatur, res facilius eueniet in idem recidens: Vnde,

Problema.

Latus adinuenire, cuius quadratum ad excessum, quo idem superat dati lateris quadratum, sit in ratione data.

R E S O L V T I O.

Datum sit latus b, & quæratur latus, cuius quadratum ad excessum quo hoc idem quadratum superat quadratum dati lateris b, sit in ratione data ut r, ad s. Oportet autem rationem datam esse maioris ad minus.

Quæsitum latus esto a, cuius quadratum est a^2; huius autem excessus supra b^2 est $a^2 - b^2$; ut igitur est r, ad s, ita debet esse a^2, ad $a^2 - b^2$.

Quoniam igitur est ut r, ad s, ita a^2, ad $a^2 - b^2$; ergo per conuersionem rationis erit ut r, ad $r - s$, ita a^2, ad b^2, & conuertendo, ut $r - s$ ad r, ita b^2, ad a^2; sed si fiat ut r ad $r - s$ ita b ad f conuertendo etiam erit ut $r - s$, ad r ita f ad b, sed ut $r - s$, ad r ita erat b^2, ad a^2, ergo ut f, ad b, ita b^2 ad a^2; ergo si fiat d, media proportionalis inter f, & b, erit ut d ad b ita b ad a, Hinc, [illegible]

PORISMA.

Fiat vt terminus maior datæ rationis, ad excessum, quo is superat minorem, ità latus datum ad aliud, & inter hoc latusque datum medium reperiatur proportionale; deinde fiat vt hoc proportionale medium inuentum ad latus datum, ita hoc ad aliud; hoc enim erit latus quæsitum, cuius quadratum ad excessum, quo superat quadratum dati lateris erit in ratione data.

COMPOSITIO.

A B C
F E
D
G
H

Datum sit latus A B, ratioque data sit ut D E ad E F, & oporteat reperire latus, cuius quadratum ad excessum, quo huiusmodi quadratum superat quadratum A B, sit in ratione vt D E, ad E F.

Fiat vt D E ad D F, ita A B ad G, & inter A B, & G, media reperiatur proportionalis H; mox uerò ut H, ad A B, ita A B fiat ad A C; hæc enim Porisma iubet. Dico A C esse latus quæsitum, ita vt quadratum A C ad excessum, quo idem quadratum superat quadratum A B, sit in ratione vt D E ad E F.

Quoniam enim est vt G, ad H, ita H ad A B; ergo vt G, ad A B, ita quadratum H ad quad. A B; sed vt D E ad DF, ita A B, ad G; & conuertendo vt D F ad D E, ita G, ad A B; ergo etiam vt D F ad D E, ita quadratum H ad quadratum A B; quoniam verò est vt H ad A B, ita A B, ad A C, erit etiam vt quadratum H ad quadratum A B, ita quadratum A B, ad quadratum A C; ergo etiam vt D F ad D E, ita quadratum A B, ad quadratum A C; ergo conuertendo vt D E ad D F, ita quadratum A C ad quadratum A B, & per conuersionem rationis vt D E ad E F, ita quadratum A C ad quadratum A C, minus quadrato A B, hoc est ad excessum, quo idem quadratum A C superat quadratum A B. Inuenimus igitur latus &c. quod erat operæ pretium efficere.

Vides igitur ex allato exemplo quanti momenti sit Problematis formam vno, vel alio modo concipere, & vno vel alio modo positionem instituere; secundum enim priorem formam fuisset opus assumere Porisma tanquam theorema demonstrandum, vt præscripta constructio Geometricè confirmaretur, nullaque suppeteret via repetitis Analyseos vestigijs ad Compositionem perficiendam, secus autem per hanc, quam attulimus.

Problema.

Exemplum III. *Datum latus A B vtcunque diuisum in C, diuidere illud iterum in D, vt rectangulum B A D ad rectangulum D C B, datam habeat rationem.*

RESOLVTIO.

b + d
A a D b − a C B
s b d

Propositi lateris diuidendi segmentum A C sit b, segmentum alterum C B sit d, totum itaque latus erit b + d; segmentum A D esto a; reliquum igitur D C erit b − a; rectangulum B A D erit b a + d a; rectangulum vero D C B, erit b d − d a; Vt autem est s, ad d, ita debet esse rectangulum B A D, nempe b a + d a ad rectangulum D C B, scilicet b d − d a; quamobrem multiplicatis extremis & medijs b d a + d² a æquabitur s b d − s d a: ac proinde per antithesin b d a + d² a + s d a æquabitur s b d; omnibus autem applicatis ad d, & b a + d a + s a æquabitur s b; quamobrem proportionales erunt magnitudines vt b + d + s, ad s, ita b, ad a. Hinc.

PORIS-

PORISMA.

Vt est aggregatum ex omnibus notis quantitatibus ad terminum antecedentem ita segmentum diuidendum ad aliam quantitatem, hæc enim quæsitam ignotam quantitatem repræsentabit.

Si quis regrediatur per Analyseos filum, demonstrationem contexet per solidorum comparationem, à qua, si placet abstinere, potest alio modo perfici demonstratio.

COMPOSITIO.



Sit recta A B diuisa in C vtcunque, & oporteat eam iterum diuidere in D, vt Problema iubet. Data autem sit ratio, vt H, ad C B; Fiat igitur vt aggregatum ex A B, & H ad H, ita A C, ad aliam, quæ sit A D. Dico rectangulum B A D, ad rectangulum D C B esse, vt H, ad C B.

Quoniam enim factum est vt A B, plus H, ad H, hoc est vt A C, plus C B, plus H, ad H, ita A C, ad A D; ergo rectangulum sub A C, & A D, plus rectangulo sub C B, & A D, vnà cum rectangulo ex H, & A D, æquabitur rectangulo sub A C, & H; vtrinque subtracto rectangulo sub A D, & H, remanebit rectangulum sub A C, & A D, plus rectangulo sub C B, & A D, quod æquabitur rectangulo sub A C, & H; minus rectangulo sub A D, & H; ergo eadem erit ratio rectanguli sub A C, & H, minus rectangulo sub A D, & H, ad rectangulum sub A C, & C B, minus rectangulo sub C B, & A D, quæ est rectanguli sub A C, & A D, plus rectangulo sub C B, & A D, ad rectangulum sub A C, & B C, minus rectangulo sub C B, & A D. Sed rectangulum sub A C, & H, minus rectangulo sub A D, & H, ad rectangulum sub A C, & C B, minus rectangulo sub A D, & C B est vt H ad C B; ergo etiam vt H ad C B, ita erit rectangulum sub A C, & A D, plus rectangulo sub C B, & A D, hoc est rectangulum B A D, ad rectangulum sub A C, & C B, minus rectangulo sub C B, & A D, hoc est ad rectangulum D C B.

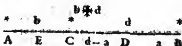
Problema.

Propositum latus A B, vtcunque sectum in C, iterum diuidere in D inter C, B, vt rectangulum A D C, ad quadratum D B, constitutam habeat rationem. Exemplum IV.

Ratio vel est æqualitatis, vel maioris, vel minoris inæqualitatis. Si primum; perinde erit ac dicere quod rectangulum A D C sit æquale quadrato D B.

RESOLVTIO.

Primi Casus.



TVnc eque sic procedendum segmentum A C sit b; at C B sit d: segmentum D B esto a; segmentum C D erit d – a; itaque rectangulum A D C, erit $b\,d + d^2 - b\,a - 2\,d\,a + a^2$; quadratum vero D B erit a^2; itaque $d\,b + d^2 - b\,a - 2\,d\,a + a^2$, æquabitur a^2; & per antithesin $b\,d + d^2$ æquabitur $b\,a + 2\,d\,a$; ergo vt $b + 2\,d$, ad R$(b\,d + d^2)$ ita hæc ad a. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt totum latus diuidendum plus parte in qua debet cadere noua diuisio ad rectam, quæ potest rectangulum sub toto latere diuidendo, & parte iam dicta, ita hæc eadem recta ad aliam magnitudinem; hæc enim ignotam quantitatem de qua quæritur, exhibebit.

RE

RESOLVTIO

Secundi Casus.

*	b		*	b ✠ d	d		*
A	E r	C	d — a		D	a	B

SI proportio maioris inæqualitatis extiterit, eaque sit vt A C ad C E, ipsaque C E dicatur r; atque adeo ratio data sit vt b, ad r, sic procedendum.

Quoniam igitur est vt b, ad r, ita $bd + d^2 - ba - 2da + a^2$, ad a^2; multiplicatis extremis & medijs ba^2 æquabitur $rbd + rd^2 - rba - 2rda + ra^2$; & per antithesin $ba^2 - ra^2 + rba + 2rda$ æquabitur $rbd + rd^2$; omnibusque applicatis ad $b - r$, & $a^2 + \frac{rb + 2rd}{b - r} a$, æquabitur $\frac{rbd + rd^2}{b - r}$; ad tollendas fractiones, fiat vt $b - r$, ad r, ita $b + 2d$, ad κ; eritque k idem quod $\frac{rb + 2rd}{b - r}$. Deinde fiat g media proportionalis inter $b + d$, & d; mox autem vt $b - r$, ad r, ita fiat g, ad f, & inter g, & f, media sit proportionalis z, erit enim z^2 idem quod $\frac{rbd + rd^2}{b - r}$; hoc autem perinde est ac si fieret vt $b - r$ ad r, ita $bd + d^2$, ad aliud; illud enim foret z^2; æquatio igitur illa $a^2 + \frac{rb + 2rd}{b - r} a = \frac{rbd + rd^2}{b - r}$, ad hanc reuocabitur $a^2 + \kappa a = z^2$, cuius æquationis radix est ℞ $(\frac{1}{4} k^2 + z^2) - \frac{1}{2} k$. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt b — r ad r seu AC minus CE, hoc est AE ad EC, ita b † d seu AC plus dupla CB, hoc est AB plus CB ad K. Deinde fiat g media proport. inter b † d & d seu AC, plus CB, hoc est AB & CB; mox autem vt b — r ad r seu AE ad EC, ita fiat g, ad f, inter g, & f, media sit proport. z; deinde verò sumatur dimidium ipsius K, & ad eius quadratum addatur quadratum z; aggregati latus multetur eodem dimidio K, residuum enim quæsitam quantitatem exhibebit. Vel

Iisdem peractis rectâ K tanquam differentia extremorum è tribus lateribus proportionalibus, & quadrato z tanquam rectangulo sub lateribus reperiantur extrema latera, minus enim quæsitam quantitatem exhibebit.

RESOLVTIO.

Tertij Casus.

	*	b	*	b ✠ d		d	*
E	A		C	a	D	d — a	B
*	s		*		*		*

RAtio data sit minoris ad maius vt A C, ad C E, segmentum A C sit b: & C B sit d: segmentum autem C D esto a; vnde D B erit $d - a$; at verò E C sit s; vt igitur b, ad s, ita debet esse rectangulum A D C nempe $ba + a^2$, ad quadratum D B, scilicet $d^2 - 2da + a^2$; multiplicatis extremis & medijs, $sba + sa^2$ æquabitur $bd^2 - 2bda + ba^2$; & per antithesin $sba + 2bda + sa^2 - ba^2$, æquabitur bd^2; omnibus applicatis ad $s - b$, & $\frac{sb + 2bd}{s - b} a + a^2$, æquabitur $\frac{bd^2}{s - b}$; ad tollendas fractiones, fiat vt $s - b$, ad b, ita 2 d, ad K, & vt $s - b$, ad b, ita s, ad l, itaq: $k + l$ idem erit quod $\frac{sb + 2bd}{s - b}$, & ad confusionem tollendam loco ipsius $K + l$, substituatur p; itaque pa idem erit quod $\frac{sb + 2bd}{s - b} a$; Deinde fiat vt $s - b$, ad b, ita d^2, ad aliud, nempè z^2, seu quod idem est fiat vt $s - b$, ad b, ita d, ad f, & inter b, f, media reperiatur z; erit enim z^2 idem quod $\frac{bd^2}{s - b}$; Æquatio igitur illa $\frac{sb + 2bd}{s - b} a + a^2 = \frac{bd^2}{s - b}$, reuocabitur ad hanc $pa + a^2 = z^2$, cuius æquationis radix erit ℞ $(\frac{1}{4} p^2$ ✠ $z^2) - \frac{1}{2} p$. Hinc.

PORISMA.

Fiat vt s — b, ad b, hoc est E A ad A C, ita 2 d ad K, hoc est dupla C B ad K, & vt s — b ad b, ita s ad l, hoc est E A ad E C, ita A C ad A; deinde fiat vt s — b, ad b, ita d, ad f, hoc est vt E A ad A C, ita C B ad f; & inter d, & f, hoc est C B, & f, media reperiatur z; mox autem K plus l, tanquàm differentia extremorum è tribus lateribus proportionalibus, & z² tanquàm

quàm

quàm rectangulo sub lateribus extrema reperiantur latera; ex his enim minus proposito satisfaciet.

COMPOSITIO.

Primi Casus.

Data sit recta A B vtcunque diuisa in C, oporteat iterum illam diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A C B æquale sit quadrato D B. Fiat quod Porisma iubet, nempe vt A C plus dupla C B, seu vt A B plus B C ad rectam, quæ possit rectangulum A C B plus quadrato C B, seu rectangulum A B C, ita hæc ad aliam, cui fiat æqualis D B. Dico rectangulum A D C æquale esse quadrato D B.

Quoniam igitur est vt A B, plus C B hoc est A C, plus dupla C B, ad rectam quæ potest rectangulum A C B, plus quadrato C B, ita hæc recta ad D B; ergo rectangulum ex A C in D B, plus duplo rectangulo C B D æquabitur rectangulo A B C; hoc est rectangulo A C B plus quadrato C B; vtrinque addito quadrato D B, rectangulum A C B, plus quadrato C B, plus quadrato D B æquabitur rectangulo ex A C in D B, plus duplo rectangulo C B D, vna cum quadrato D B; & per Antithesin rectangulum A B C, seu rectangulum A C B plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in B D, minus duplo rectangulo C B D, plus quadrato D B, æquabitur quadrato D B; Est autem rectangulum A C B, plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in D B, minus duplo rectangulo C B D, vna cum quadrato D B, idem quod rectangulum A D C, factum scilicet ex A D, in C D; ergo diuisa est A D, iterum in D, inter C B, vt rectangulum A D C æquale sit quadrato D B.

A C D B

Secundi Casus affectio Geometrica.

Data sit recta A B vtcunque secta in C iterum eam diuidere in D inter C, B, vt rectangulum A D C, sit ad quadratum D B, in ratione maioris inæqualitatis A C, ad C E.

M
N
L

A E C D B F G

Fiat vt A C minus C E, hoc est A E, ad E C, ita A C plus dupla C B, hoc est A B plus C B, ad aliam B G sibi in directum. Deinde fiat L, media proportionalis inter A B, & C B; mox vt A E ad E C, ita L ad M; at inter L, & M, fiat media proportionalis N, & ad quadratum ex dimidio B G addatur quadratum N, aggregati latus multetur dimidio ipsius B G, nempe sit illud D F, vnde residuum fiat D B. Dico rectam A B, sectam in C, esse nunc diuisam in D inter C, B, quemadmodum Problema requirit. Infra verò constabit punctum D cadere deberet inter C, B.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Porisma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

Quoniam igitur quadratum B F plus quadrato N, hoc est $\frac{1}{4} K^2 + z^2$ æquale est quadrato D F (est enim D F facta æqualis rectæ quæ potest quadratum B F, plus quadrato N) propterea quadratum D F erit $\frac{1}{4} K^2 + z^2$; sed quadratum D F æquale est quadrato D B, plus quadrato B F, plus duplo rectangulo D B F, seu simplo D B G; ergo necessariò consequitur, quod $\frac{1}{4} K^2 + z^2$ æquetur quadrato D B, plus quadrato B F, plus rectangulo D B G, hoc est $a^2 + \frac{1}{4} k^2 + K a$; vtrinque subtracto $\frac{1}{4} K^2$; ergo z^2, seu g f (fecimus enim z, mediam proportionalem inter g, & f), æquabitur $a^2 + K a$; Et quoniam fecimus vt b — r, ad r, ita g, ad f, & vt g ad f, ita g^2 ad g f, ob communem altitudinem g; estque g^2 æquale ex constructione ipsi $b d + d^2$ (fecimus enim g mediam proportio-

portionalem inter b † d, & d) & g ostendimus æquari a^2 † K a; estque vt b — r, ad r; ita b † 2 d, ad K, vtque b † 2 d, ad K, sumpta communi altitudine a, ita est b a † 2 d a, ad k a, hoc est ita est b a, vnà cum 2 d a, ad K a; ergo vt b d † d^2 ad a^2 † K a, ita b a † 2 d a, ad K a. Cum itaque sit vt totum ad totum, nempe b d † d^2, ad a^2 † K a, sic ablatum ad ablatum, nimirum b a † 2 d a, ad K a; ergo vt totum ad totum, nempe b d † d^2, ad a^2 † K a; sic reliquum ad reliquum, scilicet b d † d^2 — b a — 2 d a, ad a^2; sed vt b d † d^2, ad a^2 † k a, ita erat b — r, ad r; ergo vt b — r, ad r, sic b d † d^2 — b a — 2 d a; hoc est excessus quo b d † d^2 superat b a † 2 d a, ad a^2; ergo componendo vt b, ad r, sic prædictus excessus, nimirum b d † d^2 — b a — 2 d a, vnà cum a^2, ad a^2; sed prædictus excessus b d † d^2 — b a — 2 d a, vnà cum a^2, nempe b d † d^2 — b a — 2 d a † a^2 idem est quod rectangulum ex b † d — a in d — a; est enim huiusmodi rectangulum b d † d^2 — b a — 2 d a † a^2; ergo vt b, ad r, ita b d † d^2 — b a — 2 d a † a^2, ad a^2. Hinc.

THEOREMA.

Si sit vt A E ad E C, ita A B, plus C B, ad B G, sitque L media proportionalis inter A B, & B C; & vt A E ad E C, ita L ad M; & inter L, M media sit proportionalis N; sitque B G bissecta in F; & ad quadratum B F additum sit quadratum N, aggregati latus sit D F. Dico rectangulum A D C ad quadratum D B esse, vt A C ad C E.

COMPOSITIO.

M———
N————
L—————
A E C D B F G

Quoniam igitur ex constructione quadratum B F plus quadrato N æquale est quadrato D F, sed quadratum DF æquale est quadrato DB plus quadrato B F, vna cum duplo rectangulo D B F, seu simplo D B G; ergo quadratum B F plus quadrato N quabitur quadrato D B plus quadrato B F, plus rectangulo D B G; utrinque subtracto quadrato B F; ergo quadratum N, seu rectangulum sub L & M illi æquale (facta est enim N media proportionalis inter L & M) æquabitur quadrato D B plus rectangulo D B G; factum est autem supra ut A E ad E C, sic L ad M, & ut L ad M, sic quadratum L, ad ractangulum sub L & M; est q: quadratum L ex constructione æquale rectangulo A B C; rectangulum uerò sub L & M ostensum est æquale quadrato D B, plus rectangulo D B G ergo ut A E ad E C, ità rectangulum A B C, ad quadratum D B plus rectangulo D B G; Est autem ex constructione ut A E ad E C, ita A B plus B C ad B G; ut uerò A B, plus B C ad B G, sumpta communi altitudine B D, sic rectangulum ex A B plus B C, in D B, ad rectangulum D B G; estque rectangulum ex A B plus B C, in B D constans rectangulo duplici C B D, & rectangulo ex A C in B D; ergo ut rectangulum A B C ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, ita rectangulum ex A C in D B, plus duplici rectangulo C B D, ad rectangulum D B G. Cùm igitur sit vt totum ad totum, nempe rectangulum A B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, sic ablatum ad ablatum, nimirum rectangulum ex A C in D B, cum duplici rectangulo C B D ad rectangulum D B G; ergo vt totum ad totum scilicet rectangulum A B C ad quadratum D B plus rectangulo D B G, sic reliquum ad reliquum, nempe rectangulum A B C, minus rectangulo ex A C in D B, minus duplici rectangulo C B D, excessus quo rectangulum AC B plus quadrato C B seu rectangulum A B C superat rectangulum A C D B plus duplici rectangulo C B D, ad quadratum D B; sed totum ad totum, nempe rectangulum A C B plus quadrato C B seu rectangulum A B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, erat vt A E, ad E C; ergo vt A E ad E C, ita erit reliquum ad reliquum, nempe rectangulum A C B plus quadrato C B seu rectangulum A B C minus rectangulo ex A C, in B D, minus duplici rectangulo C B D ad quadratum D B; ergo componendo vt A C ad E C, ita prædictus excessus rectangulum A C A, plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in B D minus duplici rectangulo C B D, vna cum quadrato D B, ad quadratum D B; sed prædictus excessus, vna cum quadrato D B idem est quod rectangulum A D C (rectangulum

gulum enim A D C fit ex A C, plus C D in C D, ex quorum ductu fit etiam rectangulum A C B, plus quadrato C B, minus rectangulo ex A C in D B, minus duplici rectangulo C B D, vnà cum quadrato D B) ergo vt A C ad E C, fic rectangulum A D C, ad quadratum D B.

Quod autem punctum D, cadat inter C, B, fic fiet manifestum. Non enim cadere poteft in C; Oftenfum eft enim vt A E ad E C, fic rectangulum A B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B G, feu rectangulum G D B, & ex hypothefi ad rectangulum G C B; cùmque fit vt rectangulum A B C, ad rectangulum G C B, ita A B ad G C, erit vt A E ad E C, ita A B, ad C G; eft autem factum vt A E ad E C, ita A B, plus B C, ad B G; ergo deberet effe vt A B ad C G, ita A B, plus B C, ad B G minorem, quàm C G; quod eft inconueniens; maius fequeretur incommodum, fi punctum D, caderet vltra C; non igitur in C, non vltra ergo inter C B.

Tertij Cafus effectio Geometrica.

Data fit recta A B diuifa vtcunque in C, oporteat &c. Data fit ratio A C ad E C; fiat vt E A ad A C, ita dupla C B ad B G, & ita etiam E C ad G M; deinde fiat vt E A, ad A C, ita C B, ad B H; erit autem B H dimidia ipfius B G, quoniam C B dimidia eft duplæ C B; at verò inter C B, & B H media reperiatur proportionalis P: mox autem B M, tanquàm differentia extremorum laterum è tribus proportionalibus, & quadrato P, tanquàm rectangulo fub lateribus, reperiantur extrema latera, quorum minus fit D B, cui fiat æqualis C F. Dico rectam A B diuifam vtcunque in C, iterum effe diuifam in F, inter C, B, vt rectangulum A F C ad quadratum F B, fit in ratione A C, ad E C.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Porifma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO:

QVoniam igitur $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$ æquale eft z^2; fed z^2 æquale eft d f; facta eft enim z media proportionalis inter d, & f; ergo d f æquabitur $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$; & quoniam eft factum vt s − b ad b, ita 2 d, ad K, & ut s − b, ad b, ita d ad f, vtque d, ad f, ita d^2 ad f d, feu ad $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$, cùm hoc illi fit æquale; vtrunque enim eft æquale z^2; vt vidimus; ergo vt s − b, ad b, ita d^2 ad $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$.

Deinde quoniam factum eft vt s − b, ad b, ita s, ad l, & ita 2 d, ad k; ergo vt s − b, ad b, ita ambo antecedentia ad ambo confequentia, nempe, ita s † 2 d ad K † l; fed vt s † 2 d, ad K † l, fumpta communi altitudine a, ita s a † 2 d a, ad $\overline{K \dagger l}\, a$; ergo vt d^2 ad $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$, ita s a † 2 d a, ad $\overline{K \dagger l}\, a$.

Quoniam igitur eft ut totum ad totum fcilicet d^2, ad $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$, ita ablatum ad ablatum, nimirum s a † 2 d a, ad $\overline{K \dagger l}\, a$; ergo reliquum ad reliquum, nempe d^2 − s a − 2 d a ad a^2, erit vt totum ad totum, videlicet vt d^2, ad $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$; fed vt totum ad totum, fcilicet d^2, ad $a^2 \divideontimes \overline{K \dagger l}\, a$, ita erat s − b, ad b; ergo vt s − b, ad b, ita erit d^2 − s a − 2 d a, ad a^2; ergo componendo vt s, ad b, ita d^2 − s a − 2 d a $\divideontimes a^2$, ad a^2; & conuertendo vt b, ad s, ita a^2, ad d^2 − s a − 2 d a † a^2; fed vt b, ad s, ita b a, ad s a; ergo vt b, ad s, ita ambo antecedentia ad ambo confequentia, nempe b a $\divideontimes a^2$, ad d^2 − 2 d a $\divideontimes a^2$. Hinc.

THEOREMA;

Si fuerit vt E A, ad A C, ita dupla C B ad B G, & ita E C ad G M; deinde fit vt E A ad A C, ita C B ad B H, & inter C B, B H, media proportionalis P, fitque B M differentia extremorum laterum, fub quibus contineatur rectangulum æquale quadrato P, minufque extremum fit D B, cui æquetur C F. Dico rectam A B, vtcunque diuifam in C, iterum effe diuifam in F inter C, B, vt rectangulum A F C, ad quadratum F B, fit in ratione A C ad E C.

COMPOSITIO.

P

E A C F D B H G M

QVoniam enim rectangulum M D B, seu, quod idem est, quadratum D B, plus rectangulo D B M æquale est quadrato P; sed quadratum P est æquale rectangulo C B H; fecimus enim P mediam inter C B & B H; ergo rectangulum C B H æquabitur quadrato D B, vnà cum rectangulo D B M.

Et quoniam factum est, vt E A, ad A C, sic dupla C B, ad B G, seu simpla B C ad B H; vt autem B C ad B H, ita quadratum C B, ad rectangulum C B H, seu ad quadratum D B, plus rectangulo D B M, illi æquale; ergo vt E A ad A C, ita quadratum B C ad quadratum B D, plus rectangulo D B M.

Deinde quoniam factum est supra, vt E A, ad A C, ita E C ad G M, & dupla B C ad B G; ergo erit vt E A ad A C, ita ambo antecedentia ad ambo consequentia, nimirum E C, plus dupla C B ad totam B M; sed vt E C, plus dupla B C ad B M, sumpta communi quidem altitudine D B, ita rectangulum sub E C in D B, plus duplo rectangulo C B D, ad rectangulum D B M; ergo vt quadratum B C, ad quadratum D B, plus rectangulo D B M, ita rectangulum ex E C in D B, plus duplo rectangulo C B D, ad rectangulum D B M.

Quoniam igitur est ut totum ad totum, nempè quadratum C B, ad quadratum D B, plus rectangulo D B M, ita ablatum ad ablatum, nempè rectangulum ex E C in D B, plus duplo rectangulo C B D ad rectangulum D B M; ergo ita reliquum ad reliquum, nempè quadratum C B, minus rectangulo ex E C in D B, minus duplo rectangulo C B D, ad quadratum D B; sed vt totum ad totum, ita erat E A ad A C, ergo vt E A, ad A C, ita quadratum C B, minus rectangulo ex E C, in D B, minus duplo rectangulo C B D, ad quadratum B D; ergo componendo erit, vt E C, ad A C, ita quadratum C B, minus rectangulo ex E C, in D B, minus duplo rectangulo C B D, plus quad. D B, ad quadratum D B; & conuertendo vt A C, ad E C, ita quadratum D B, ad quadratum C B, minus rectangulo ex E C in D B, minus duplo rectangulo C B D, plus quadrato D B; sed vt A C ad E C, ita rectangulum ex A C in D B, ad rectangulum ex E C in D B; ergo vt A C ad E C, ita ambo antecedentia ad ambo consequentia; nempè rectangulum ex A C in D B, hoc est rectangulum A C F, plus quadrato D B, seu quadrato C F, hoc est rectangulum A F C, ad quadratum C B, minus duplo rectangulo C B D, plus quadrato D B, hoc est minus duplo rectangulo B C F, plus quadrato C F; sed quadratum C B, minus duplo rectangulo B C F, plus quadrato C F, æquale est quadrato F B; ergo vt A C ad E C, ita erit rectangulum A F C, ad quadratum F B.

Datum igitur latus A B utcunque diuisum in C, diuisimus iterum in F inter C, B, &c. Quod facere oportebat.

Solum ostendendum superest punctum D, necessariò debere cadere inter C, B; quod sic planum fiet. Non enim punctum D cadere potest in C; ostendimus enim esse vt E A ad A C, ita quadratum C B, ad rectangulum M D B; & quidem in huiusmodi casu ad rectangulum M C B, cumque vt quadratum B C, ad rectangulum M C B, ita B C ad M C; foret vt E A ad A C, ita C B ad C M, quod est inconueniens; factum est enim supra vt E A ad A C ita C B ad solam BH. Multoque maius foret absurdum, si diceretur punctum D, cadere vltra punctum C; ergo necessariò cadet inter C, D. Quod &c.

Multum sanè refert, num ratio data in proposito aliquo Problemate sit multiplex, vel submultiplex, an verò quæcunque comprehendens etiam rationem ineffabilem; longè siquidem facilius est Problemati satisfacere, cùm ratio data fuerit multiplex; quod ex adiecto Problemate perspicuum fiet.

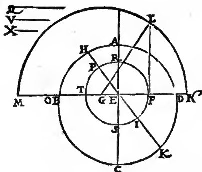
Nota Aduerte, quod C F, hic respondet in resolutione ipsi C D, & F B respondet ipsi D B.

PROBLEMA.

Exemplum V. *Datis duobus circulis circa diametrum eandem, quorum vnus intra alium existat, siue se tangant, siue non, per minoris centrum aptare rectam in maiori, vt inter circulorum peri-*

peripherias interceptum segmentum vnum ad aliud sit in data ratione multiplici.

RESOLVTIO.



CVm igitur data fuerit ratio multiplex sit propositus circulus A B C D, cuius diameter A C, circa quam circulus alter R T S F, cuius centrum E, siue eum tangat siue non: oporteat autem per E ducere H K occurrens circumferentiæ R T S F in punctis P, & I, ita vt interceptum segmentum K I duplum sit intercepti P H; ducatur B N, per E, faciens in E cum recta A C angulos rectos; atque E I sit b: E D sit K, & I K esto a: itaque E K erit $b + a$; at verò P H erit dimidium ipsius I K; atque adeo erit $\frac{1}{2} a$. Cumque P E sit b, & ipsa quidem E H erit $b + \frac{1}{2} a$. quoniam verò rectangulum K E H ex circuli natura æquale est rectangulo B E D, atque adeo quadrato E D, cùm B E, & E D sint æquales; propterea ducatur $b + a$, in $b + \frac{1}{2} a$, nam productum $b^2 + 1\frac{1}{2} b a + \frac{1}{2} a^2$, æquabitur k^2; & per antithesin $1\frac{1}{2} b a + \frac{1}{2} a^2$ æquabitur $k^2 - b^2$; omnibusque duplatis, vt potestas integra remaneat $3 b a + a^2$ æquabitur $2 k^2 - 2 b^2$; ac proinde si placet æquationem sic explicare per analogismum; erit ut $3 b + a$, ad $\sqrt{2 k^2 - 2 b^2}$ ita $\sqrt{2 k^2 - 2 b^2}$ ad a. Vnde.

PORISMA.

Sumatur duplum quadratum ipsius E D, ex quo subtrahatur duplum quadratum rectæ E I, seu E F, & hac differentia, quam possit, exempligratia X, tanquam rectangulo sub extremis & tripla E I, seu E F tanquam differentia extremorum, tria reperiantur latera proportionalia; ex his enim minus erit I K, cuius dimidium erit P H.

Fiat igitur ut Porisma præscribit.

Quoniam enim fecimus ut tripla E I, plus I K, ad rectam X, quæ potest differentiam inter duplum quadratum E D, & duplum quad. E I, seu E F; ita X ad IK, ergo triplum rectangulum E I K plus quadrato I K, æquabitur duplo quadrato E D, minus duplo quadrato E I; ergo omnibus dimidiatis $1\frac{1}{2}$ rectanguli E I K plus $\frac{1}{2}$ quadrati I K æquabitur quadrato E D, minus quadrato E I; ergo per antithesin quadratum E I plus $1\frac{1}{2}$ rectanguli E I K, plus $\frac{1}{2}$ quadrati I K æquabitur quadrato E D; est autem quadratum E I, plus $1\frac{1}{2}$ rectanguli E I K plus $\frac{1}{2}$ quadrati I K factum ex E I plus I K, in E P plus $\frac{1}{2}$ I K; ergo rectangulum ex E I plus I K in E P plus $\frac{1}{2}$ I K æquabitur quadrato E D; sed quadrato E D æquale est rectangulum H E K; ergo rectangulum sub E I plus I K in E P plus $\frac{1}{2}$ I K æquabitur rectangulo H E K; sed E I plus I K æquatur E K; ergo E P plus $\frac{1}{2}$ I K æquabitur E H; sed E P est utrique communis; ergo P H æquabitur $\frac{1}{2}$ I K.

Quod propositum erat efficere.

Problema.

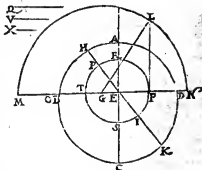
Datis duobus circulis circa diametrum eandem, quorum vnus intra alium existat, per minoris centrum aptare rectam in maiori, vt intercepta segmenta inter circulorum peripherias datam inter se rationem obtineant. Exemplum VI.

Datus sit circulus A B C D, cuius diameter A C, circa quam sit circulus alter R T S F, cuius centrum E, per quod sit iniunctum ducere H K occurrentem circuli peripheriæ in

punctis P, & I, ut interceptum segmentum I K, ad interceptum P H, sit in ratione, quam habet E S, uel E I, vel E F &c. ad X.

Aut circuli sunt concentrici, aut eccentrici; in illis non admittitur nisi æqualitatis ratio, cùm omnis linea ducta per centrum Problemati satisfaciat; intercepta siquidem segmenta semper obtinent æqualitatis rationem. Si uerò fuerint eccentrici, uel se intus tangunt, uel non; utcunque se res habeat, idem est Resolutionis modus.

RESOLVTIO.



Sit iam factum, & semidiameter minoris circuli exempligratia EF sit b; at uerò X, dicatur d, intelligatur ducta per E recta BD ad rectos angulos in E; eritque BE æqualis ED, alterutra ipsarum dicatur K; segmentum IK esto a; ergo EK erit $b + a$. Sed quoniam IK, ad PH debet esse ut b, ad d, proinde fiet ut b, ad d, ita a, ad $\frac{da}{b}$; quare PH erit $\frac{da}{b}$; quamobrem EH erit $b + \frac{da}{b}$. Quia uerò ex circuli natura rectangulum KEH æquale est rectangulo BED, seu quadrato ED; proinde ducatur $b + \frac{da}{b}$ in $b + a$, & fiet productum $b^2 + ba + da + \frac{da^2}{b}$, quod æquabitur k^2; omnibus ductis in b, fiet $b^3 + b^2 a + bda + da^2 = bk^2$; & per antithesin $b^2 a + bda + da^2$, æquabitur $bk^2 - b^3$; omnibus applicatis ad d, & $\frac{b^2}{d} a + ba + a^2$, æquabitur $\frac{bk^2 - b^3}{d}$. Ad tollendas fractiones fiat, ut d ad b, ita b, ad r, & erit r idem quod $\frac{b^2}{d}$: unde r a, erit idem quod $\frac{b^2}{d} a$. Deinde fiat ut d, ad b, ita differentia k^2 & b^2, quæ appelletur q^2, ad aliud; uel quod in idem recidit ex hypothesi quod q^2 sit differentia inter k^2, & b^2, fiat ut d ad b, ita q, ad aliam s, & inter q, & s media reperiatur z; nam z^2 idem erit quod $\frac{bk^2 - b^3}{d}$: unde æquatio illa ad hanc erit reuocata $r a \dagger b a \dagger a^2 = z^2$; loco autem ipsius $r \dagger b$, ad confusionem tollendam substituatur p; eritque $p a \dagger a^2 = z^2$, cuius æquationis radix est $\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)} - \frac{1}{2} p$. Hinc.

PORISMA.

Tollantur fractiones vt dictum est, nempe fiat vt d ad b, ita b, ad r, deinde fiat vt d, ad b, ita q, ad s, & inter q & s, media sit z: modo aggregatum ex r, & b, nempe p sumatur, ad cuius quadrati quartam partem addatur quadratum ex z; aggregati autem latus multetur dimidio ipsius p; nam residuum, quæsitam quantitatem exhibebit.

Non licet autem Analyseos vestigia repetere, nisi quis velit per comparationem solidorum incedere, vel vnitatem in Geometriam inuehere; propterea iuuat Porisma tanquam Theorema suscipere demonstrandum.

Effectio Geometrica.

Sit circulus ABCD, cuius diameter AC, circa quam sit circulus alter RTSF, cuius centrum E, per quod BD ducta sit ad rectos angulos in E, factumque sit vt X ad ES, ita ES, ad EO, atque OF diuisa sit bifariam in G; factumque etiam sit vt X ad E S, ita Q potens differentiam quadratorum ED, E F, ad aliam V; media autem inuenta inter Q, & V, sit ea, cui æqualis est F L perpendicularis facta in puncto F. Ex G ducta GL, centro G, interuallo G L, descripto circulo MLN, cui occurrat recta BD vtrinque protracta, & centro E, interuallo EN, descripto arcu NK, occurrente circuli peripheriæ ABCD, in K; & per K & E ducta KH, occurrente peripheriæ circuli in punctis I, & P, factum erit quod oportet. Vel clarius.

Sit

Sit circulus A B C D, cuius diameter A C, circa quam sit circulus alter R T S F, cuius centrum E, sit autem iniunctum ducere per E, rectam K H, occurrentem peripheriæ minoris circuli in punctis I, & P, ita vt interceptum segmentum K I ad interceptum P H, sit in ratione semidiametri minoris circuli, puta E S, vel E I &c. ad X. Per punctum E transeat ad rectos angulos cum A C recta B D, secans circumferentiam circuli minoris in punctis T, & F; mox verò exponatur recta Q, quæ possit differentiam quadratorum E F, E D, ita vt Q quadratum æquale sit quadrato E D, minus quadrato E F; id enim Porisma iubet. Deinde fiat vt X, ad E S, ita Q quadratum ad aliud, vel, quod in idem recidit, ex hypothesi quod Q possit differentiam quadratorum E D, E F, fiat vt X ad E S, ita Q ad V, & inter Q & V media reperiatur proportionalis F L, quæ ad rectos angulos est excitanda ex puncto F; fiat autem vt X, ad E S, ita E S, ad O E; bissecetur autem O F in puncto G, iunctaque G L, centro G, interuallo G L, describatur circulus M L N; deinde centro E, interuallo E N describatur arcus N K occurrens (occurret autem, vt facilè constabit) circuli A B C D peripheriæ in puncto K; ex K, per E agatur K H occurrens circuli peripheriæ in punctis I, & P. Et factum erit, quod oportet.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Porisma dictat; num ea sit ratio intercepti segmenti K I, ad interceptum P H, relata ad semidiametrum circuli T S F, nempè quæ E S, vel E I, &c. ad X, inquirere.

RESOLVTIO.

Iisdem suppositis characteribus ad easdẽ quantitates designãdas, nempe E F, vel E I, &c. sit b, & X sit d, F N, uel I K esto a; & P H erit $\frac{da}{b}$; O E erit r; F L erit z; insuper E D erit k; O F erit p, nempe aggregatum ex b, & r.

Quoniam igitur $pa + a^2$ æquale est z^2; sed z^2 æquale est ex constructione q s; ergo $pa + a^2$ æquabitur q s quoniam verò p, æquatur $b + r$, propterea $ra + ba + a^2$, æquabitur q s. fecimus autem vt d ad b, ita q, ad s, & vt q, ad s, sumpta communi altitudine q, ita est q^2 ad q s; erat autem q s æquale $ra + ba + a^2$; ergo vt d ad b, ita q^2, ad $ra + ba + a^2$.

Rursus cum factum sit vt d, ad b, ita b, ad r; vtque b, ad r, sumpta communi altitudine a, ita est b a, ad r a; ergo vt d, ad b, ita b a. ad ra; sed vt d. ad b, ita erat q^2, ad $ra + ba + a^2$; ergo vt q^2, ad $ra + ba + a^2$, ita b a ad r a.

Quoniam igitur est vt totum q^2, ad totum $ra + ba + a^2$, ita ablatum b a, ad ablatum r a; erit etiam ut totum q^2 ad totum $ra + ba + a^2$, ita reliquum $q^2 - ba$, ad reliquum $ba + a^2$; sed vt q^2, ad $ra + ba + a^2$, ita d, ad b; ergo vt d ad b, ita $q^2 - ba$, ad $ba + a^2$; sed q^2 est æquale $k^2 - b^2$; ergo vt d, ad b, ita $k^2 - b^2 - ba$, ad $ba + a^2$; sed k^2 æquale est $b^2 + ba + da + \frac{da}{b}$; atque adeo $k^2 - b^2 - ba$ æquale est $b^2 + ba + da + \frac{da}{b} - b^2 - ba$, nimirum æquale est ipsi $da + \frac{da}{b}$; ergo vt d, ad b, ita erit $da + \frac{da}{b}$ ad $ba + a^2$; sed vt $da + \frac{da}{b}$ ad $ba + a^2$, ob communem altitudinem $b + a$, ita est $\frac{da}{b}$ ad a; ergo vt d, ad b, ita $\frac{da}{b}$ ad a; & conuertendo vt b, ad d, ita a, ad $\frac{da}{b}$. Hinc.

THEOREMA.

Sit circulus A B C D, cuius diameter A C; circa quam sit circulus alter R T S F; cuius centrum E per quod B D, ducta sit ad rectos angulos in E; factumq; sit vt X ad E S, ita E S, ad E O; atque O F, diuisa sit bifariam in G, factumque etiam sit vt X ad E S ita Q potens differentiam quadratorum E D, E F, ad aliam V, media autem inuenta inter Q, & V, sit ea, cui æqualis est F L, perpendicularis facta in puncto F, ex G ducta G L, centro G, interuallo G L descripto semicirculo M L N, cui occurrat recta B D, vtrinque protracta, & centro E, interuallo E N, descripto arcu N K, occurrente circuli peripheriæ A B C D, in K, & per K & E, ducta H K, occurrente circuli peripheria in punctis I, & P. Dico interceptum segmentum K I, ad interceptum P H, esse vt E S ad X.

Quo-

COMPOSITIO.

Quoniam enim O G æqualis eſt G F, & M G æqualis eſt G N; ergo reliqua M O æquabitur reliquæ F N, ergo rectangulum M F N æquabitur rectangulo O N F; ſed rectangulum M F N æquale eſt quadrato F L; ergo rectangulum O N F æquabitur quadrato F L; ſed ex conſtructione quadratum F L æquale eſt rectangulo ſub Q, & V; ergo rectangulum Q N F, æquabitur rectangulo ſub Q, & V; fecimus autem vt X ad E S, ita Q ad V, & vt Q ad V, ſumpta communi altitudine Q, ita eſt quadratum ex Q, ad rectangulum ſub Q, & V, & erat rectangulum ſub Q & V æquale rectangulo O N F; ergo erit vt X ad E S, ita quadratum ex Q ad rectangulum O N F.

Rurſus quoniam factum fuit vt X ad E S, ita E S ad O E, vtque E S ad O E, ſumpta communi altitudine F N, ita eſt rectangulum ſub E S, ſeu E F, & F N, hoc eſt rectangulum E F N, ad rectangulum ſub O E, & F N; ergo vt X, ad E S, ita rectangulum E F N, ad rectangulum ſub O E, & F N; erat autem vt X ad E S, ita quadratum ex Q, ad rectangulum O N F; ergo erit vt quadratum ex Q, ad rectangulum O N F, ita rectangulum E F N, ad rectangulum ſub O E, & F N.

Cùm itaque ſit vt totum quadratum ex Q, ad totum rectangulum O N F, hoc eſt rectangulum ex O E, & F N, plus rectangulo ex E F, & F N, vna cùm quadrato F N, quemadmodum ablatum rectangulum E F N, ad ablatum ex O E in F N; ergo reliquum nempè quadratum ex Q, minus rectangulo E F N, ad reliquum ſcilicet rectangulum E F N, plus quadrato F N, hoc eſt ad rectangulum E N F, erit vt totum ſcilicet quadratum ex Q, ad totum nempe rectangulum ſub O E, & F N plus rectangulo ſub E F, & F N, vna cum quadrato F N. Sed quadratum ex Q ad rectangulum ex O E in F N, plus rectangulo ex E F in F N, vna cum quadrato F N, erat vt X ad E S; ergo erit ut X ad E S, ita quadratum ex Q, minus rectangulo E F N, ad rectangulum E F N, plus quadrato F N, hoc eſt ad rectangulum E N F. Eſt autem quadratum ex Q idem quod quadratum E D, minus quadrato E F; ergo erit vt X ad E S, ita quadratum E D, minus quadrato E F, minus rectangulo E F N, ad rectangulum E F N, plus quadrato F N. Sed quadratum E D æquale eſt rectangulo K E H, hoc eſt quadrato E I plus rectangulo E I K plus rectangulo ſub E I & H P, plus rectangulo ſub I K & H P, atque adeo pro E F, F N, (deinceps ſubſtituantur E I, I K) quadratum E D minus quadrato E I, minus rectangulo E I K æqualibus hinc inde ſubtractis æquabitur rectangulo ſub E I & H P, plus rectangulo ſub I K & H P, ergo vt X ad E I ita erit rectangulum ſub E I & H P plus rectangulo ſub I K & H P ad rectangulum E K I; ſed vt rectangulum ſub E I & H P plus rectangulo ſub I K, & H P, ad rectangulum E K I, ob communem altitudinem E K ita eſt H P ad I K, ergo vt X ad E I ita H P ad I k, & conuertendo vt E I ad X ita I K ad H P.

Aduerte rectangulum ex EI in HP æquari rectāgulo ex X in I k quod in reſolutione reſpondet d a, & rectangulum ex I K in H P reſpōdet in reſolutione ipſi $\frac{4\,aa}{b}$

Quod verò F N, & I K ſint æquales patet; nam E N, & E k ſunt æquales velut ab eodem centro ad eandem circumferentiam, quemadmodum E F, & E I æquales ſunt, ob id F N, I K erunt æquales.

Datis igitur duobus circulis circa diametrum eandem, quorum vnus intra alium exiſtat per minoris centrum aptauimus rectam &c. Quod facere oportebat.

Quanto ſit operoſior reſolutio, cum de terminis proportionalibus generatim ſecundum quamcumque rationem, quàm ſi proponatur iuxta terminos rationis multiplicis; facile ex hactenus dictis deprehendes.

Problema.

Exemplum VII.

Propoſito lateri latus adiungere vt quadratum dati, plus duplo rectangulo ſub dato, & adiuncto, ad quadratum adiuncti datam habeat rationem.

* b * d *

* a *

Datum ſit latus b, cui oporteat latus addere ut quadratum ipſius b, plus duplo rectangulo ſub eodem b, & adiuncto, ad quadratum adiuncti, rationem habeat vt b, ad d.

Vulgaris Reſolutio ſe haberet ut ſequitur.

RESOLVTIO I.

Latus addendum esto a, rectangulum autem sub dato & adiuncto erit b a, cuius duplum 2 b a, aggregatum ex hoc, & quadrato dati erit $b^2 + 2\,b\,a$ quadratum adiuncti erit a^2; ergo erit vt b, ad d, ita $b^2 + 2\,b\,a$, ad a^2; quamobrem multiplicatis extremis & medijs $b\,a^2$ æquabitur $b^2 d + 2\,b\,d\,a$; & per antithesin $b\,a^2 - 2\,b\,d\,a$ æquabitur $b^2 d$; omnibus applicatis ad b, & $a^2 - 2\,d\,a$ æquabitur b d, & media repecta proportionali inter b, & d quæ sit z, erit vt a − d, ad z, ita z, ad a. Hinc.

PORISMA.

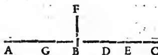
Dato rectangulo sub extremis, quod scilicet continetur sub terminis datæ rationis; dataque differentia extremorum è tribus proportionalibus, quæ sit consequens rationis datæ, extrema reperiantur &c.

Effectio Geometrica.

Datũ sit latus A B, quod oporteat taliter producere in C, vt quadratum A B plus duplo rectangulo A B C, sit ad quadratum B C, in ratione A B ad B D; Super diametrum A D, describatur semicirculus, factaque sit B E dupla ipsius B D, ex B excitetur perpendicularis B F; vsque ad circumferentiã in F, iunctaque D F, centro D, interuallo D F, describatur semicirculus secans B E productam in C; & A B in G; erit enim B C latus adiungendum.

COMPOSITIO.

Cvm hæc Resolutio processerit per solidorum comparationem, haud licebit regressum facere componendo repetitis Analyseos vestigijs, nisi in componendo solidis vti velimus; propterea iuuabit assumere demonstrandum Porisma tanquam Theorema, ad eum qui sequitur modum.



PROPOSITIO.

Suppositis ijs, quæ Porisma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

Qvoniam igitur est vt a − 2 d, ad z, ita z ad a; ergo $a^2 - 2\,d\,a$ æquabitur z^2; sed z^2 æquatur b d ex constructione; ergo $a^2 - 2\,d\,a$ æquabitur b d; communi addito 2 d a; ergo a^2 æquabitur $b\,d + 2\,d\,a$.

Deinde quoniam est vt b ad d, sumpta communi altitudine b, ita b^2 ad b d, & vt b ad d, sumpta communi altitudine a, ita b a, ad d a atque vnum ad vnum seu vt simplum ad simplum ita duo ad duo, seu ita duplum ad duplum; atque adeo vt b, ad d, ita 2 b a, ad 2 d a; erat autem vt b ad d, ita b^2, ad b d modo verò vt b ad d, ita b a, ad 2 d a; ergo erit vt vnum antecedens ad vnum consequens, nempe vt b^2 ad b d, vel vt 2 b a, ad 2 d a ita ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe $b^2 + 2\,b\,a$, ad $b\,d + 2\,d\,a$; sed vnum antecedens ad vnum consequens erat vt b ad d; ergo vt b, ad d, ita $b^2 + 2\,b\,a$, ad $b\,d + 2\,d\,a$; erat autem a^2 æquale; $b\,d + 2\,d\,a$; ergo ut b, ad d, ita $b^2 + 2\,b\,a$, ad a^2. Hinc.

THEOREMA.

Si sit latus A D diuisum in B super A D descripto semicirculo, sitque B F erecta perpendicularis &c. vt duplum B D, nempe B E tanquam differentia extremorum, & B F tanquam medio reperta sint extrema latera G B, B C. Dico esse vt A B ad B D, ita quadratum A B plus duplo rectangulo A B C ad quadratum B C.

COM-

COMPOSITIO.

F

A G B D E C

QVoniam igitur G D est æqualis D C, & B D æqualis D E; ergo G B æquabitur E C; ergo rectangulum G B C æquabitur rectangulo B C E; sed rectangulum G B C æquale est quadrato B F; ergo rectangulum B C E, æquabitur quadrato B F; sed quadrato B F æquale est rectangulum A B D; ergo rectangulum B C E æquabitur rectangulo A B D; sed rectangulum B C E æquale est quadrato B C, minus rectangulo C B E; ergo quadratum B C, minus rectangulo C B E æquabitur rectangulo A B D; communi addito rectangulo C B E; ergo rectangulum A B D, plus rectangulo C B E æquabitur quadrato B C.

Deinde quoniam est, ut A B, ad B D, sumpta communi altitudine A B, ita quadratum A B ad rectangulum A B D; & ut A B ad B D, sumpta communi altitudine B C, ita rectangulum A B C ad rectangulum C B D; ergo ut quadratum A B ad ractangulum A B D, ita rectangulum A B C ad rectangulum C B D; & vt unum ad unum, ita duo ad duo; ergo ut A B ad BD, ita duplum rectangulum A B C, ad duplum rectangulum C B D, seu ad simplum C B E. Erat autem ut A B, ad B D, ita quadratum A B ad rectangulum A B D; modò autem vt A B, ad B D, ita duplum rectangulum A B C ad rectangulum C B E; ergo vt unum antecedens ad unum consequens, A B quadratum, ad rectangulum A B D, vel duplum rectangulum A B C ad rectangulum C B E, ita ambo antecedentia ad ambo consequentia; nempè quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad rectangulum A B D, plus rectangulo C B E; Sed vnum antecedens ad vnum consequens erat, ut A B, ad B D; ergo ut A B ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad rectangulum A B D, plus rectangulo C B E; Sed quadratum B C erat æquale rectangulo A B D, plus duplo rectangulo C B D, siue simplo C B E; ergo vt A B, ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C ad quadratum B C.

Propositio igitur lateri latus adinuenimus &c. Quod facere oportebat.

Elegantiùs tamen hunc in modum instituetur Resolutio.

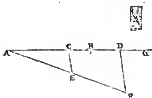
RESOLVTIO II.

IIsdem positis; quoniam igitur est ut b, ad d, ita b^2 † 2 b a, ad a^2; ergo componendo erit ut b † d, ad d, ita b^2 † 2 b a † a^2, ad a^2; inter b † d, & d, media sit proportionalis s: ergo ut quadratum ex b † d, ad quadratum ex s, ita b^2 † 2 b a † a^2, ad a^2; ergo eorum latera proportionalia erunt; quare vt b † d, ad s, ita b † a, ad a; ergo diuidendo vt b ✠ d -- s, ad s, ita b, ad a; sit z media proportionalis inter s, & b, erit ut b ✠ d -- s, ad z, ita z, ad a. Hinc.

PORISMA.

Inter aggregatum terminorum datæ rationis, & terminum consequentem eiusdem sumatur medium; deinde fiat vt aggreg terminorum prædictum, minus medio proportionali adinuento, ad hoc idem medium, ita terminus antecedens rationis datæ ad aliud; seu quod idem est, inter medium iam dictum proportionale, & terminum antecedentem datæ rationis media quædam exhibeatur proportionalis, & fiat ut aggregatum iam dictum minus priori medio proportionali, ita hæc ad aliud &c.

COMPOSITIO.



DAtum sit latus A B, cui fieri debet additio ita vt quadratum ipsius plus duplo rectangulo sub eodem, & adiuncto, ad quadratum adiuncti rationem habeat ut A B ad B D; inter A D aggregatum ex A B, B D, & ipsam B D, media reperiatur proportionalis C D; mox autem hac subtracta ex A D, remaneat A C; vt autem A C ad C D, ita fiat A B, ad aliam, quæ sit B G; nimirùm aptetur A F in quocunque angulo cum A D, & in ipsa secetur A E æqualis A B; agatur C E, cui fiat parallela D F, ipsi E F fiat æqualis B G. Quoniam igitur est vt A C ad C D, ita A E ad E F; ergo componendo erit vt A D ad C D, ita A F ad E F; ergo vt quadratum A D ad quadratum C D, ita quadratum A F, ad quadratum E F; est autem vt quadratum A D ad quadratum C D, ita A D ad B D, cùm C D facta sit media proportionalis inter A D, B D; ergo erit vt A D ad B D, ita quadratum A F ad quadratum E F; ergo diuidendo erit vt A B ad B D, ita quadratum A F, minus quadrato E F, hoc est quadratum A E plus duplo rectangulo A E F, ad quadratum E F; sed A E est æqualis A B, & E F est æqualis B G ex constructione; ergo vt A B ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B G ad quadratum B G, Idem igitur elegantiùs præstitimus. Quod facere oportebat.

PROBLEMA.

Data ratione interualli quadratorum à medio & minori ad aggregatum quadratorum à medio & maiori, tria latera proportionalia adinuenire. Exemplum VIII.

RESOLVTIO.

DAta sit ratio vt r ad s, extremum autem maius esto a: sumptoque r priori termino datæ rationis pro extremo minori sic procedendum. Ducatur hoc, nimirum r, in a, extremum maius, vt fiat r a, quod æquabitur quadrato ex medio.

Quoniam autem rectang. sub extremis minus quad. minoris extremi æquale est differentiæ quadratorum medij & minoris; propterea differentia quadratorum medij & minoris erit $r\,a - r^2$; at verò aggregatum quadratorum medii & maioris erit $r\,a + a^2$; igitur vt r, ad s, ita debebit esse $r\,a - r^2$, ad $r\,a + a^2$; vnde productum sub extremis æquabitur producto sub medijs; ac propterea $r\,s\,a - r^2 s$, æquabitur $r^2 a + r\,a^2$, & per antithesin $r\,s\,a - r^2 a - r\,a^2$ æquabitur $r^2 s$; omnibus autem applicatis ad r, erit $\overline{r - s}\,a - a^2$ æquale $r\,s$. Hinc.

PORISMA.

Ex quadrato è dimidia differentia duorum terminorum datæ rationis auferatur productum sub ijsdem terminis, residui namque latus quadratum detractum supradicto dimidio, vel eidem additum exhibebit maius extremum priori termino rationis datæ existente minori, è tribus lateribus proportionalibus.

Effectio Geometrica.

D
K
A B G E F C

DAta sit ratio A B ad A C: recta verò potens rectangulum C A B sit D, & hac tanquàm medio è tribus lateribus proportionalibus, & differentia terminorum datæ rationis tanquam extremorum aggregato, reperiantur latera: nempè B C diuidatur bifariam in F, & ex quadrato B F subtracto quadrato rectæ D, quæ potest rectangulum C A B, residuiq; latus sit E F, quo addito ad F C, fit E C, & subtracto abs B F æquali ipsi F C, remaneat B E, eritque tam B E, quàm E C quantitas quæsita, ita vt si reperiatur K media proportionalis inter A B, & B E, tria sint latera proportionalia A B; K; B E, sintque latera, quæ proposito satisfaciant &c.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Porisma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

SVppositis ijsdem, quod nimirum A C sit s, & A B sit r, erit B C idem quod s − r; at B E, vel E C erit a; sed recta D potens rectangulum C A B, erit z; at inter A B, & B E, sit media proportionalis k.

Quoniam igitur r s] (ita enim hic ratiocinandum) æquale est z^2; sed z^2 æquale est s a − r a − a^2; ergo s a − r a − a^2 æquabitur r s; ergo reciproce erit, vt tota s, ad totam a, ita ablata s − r − a, ad ablatam r; ergo vt reliqua r + a, ad reliquam a − r, erit vt tota s, ad totam a; ergo permutando erit vt r + a, ad s, ita a − r, ad a & inuertendo vt s ad r + a, ita a, ad a − r; sed s ad r; accepta r + a tanquam intermedia rationem habet compositam ex s, ad r + a, & ex r + a, ad r; erat autem vt s, ad r + a, ita a, ad a − r; ergo ratio s, ad r, erit quoque composita ex ratione a, ad a − r, & ex ratione r + a, ad r; sed ratio r a + a^2, ad r a − r^2, composita quoque est ex ijsdem rationibus, nimirum a, ad a − r, & r + a ad r; ergo vt s, ad r, ita erit r a + a^2, ad r a − r^2 sed r a + a^2 æquale est a^2 + k^2, nempè quadrato maioris extremis plus quadrato medij, & r a − r^2 est differentia quadratorum medij & minoris extremi; ergo aggregatum quadratorum medij & maioris extremi ad differentiam quadratorum medij & minori extremi è tribus proportionalibus r, k, a, minori existente r, est in ratione data ut s, ad r; & conuertendo &c. Hinc.

THEOREMA.

Si fuerit quadratum è dimidia differentia duorum terminorum datæ rationis multatum rectangulo sub ijsdem terminis, residui verò latus additum sit prædicto dimidio, vel ab eodem subtractum. Dico aggregatum vel residuum esse maius è tribus proportionalibus extremum, ita vt interuallum quadratorum medij, & minoris, ad aggregatum quadratorum medij & maioris sit in ratione data.

COMPOSITIO.

D
K
A B G E F C

SIt ratio data, quæ AB ad AC, vt supra, sitque D recta quæ possit rectang. CAB; bissecta autem B C in F, & ex quad. BF ablatũ sit quadr. D, & remaneat quadratũ cuius latus E F. Dico B E, vel E C proposito satisfacere, ita vt si K media fuerit proportionalis inter A B, & B E, differentia quadratorum ex A B, & k, ad aggregatum quadratorum ex K, & B E sit in ratione vt A B ad AC. Non dissimiliter de E C &c. secetur B G æqualis A B.

Quo-

Quoniam enim quadratum D æquale est rectangulo C A B; sed quadratum D æquale est rectangulo sub A C, & B E, minus rectangulo A B E, minus quadrato B E; ergo rectangulum sub A B, & A C, æquabitur rectangulo sub A C, & B E, minus rectangulo A BE, minus quadrato BE: ergo reciprocè vt tota AC, ad totam BE, sic ablata AC, minus AB, minus B E, ad ablatã BG, seu A B; ergo reliqua A B, plus B E, hoc est A E, ad reliquam B E, minus AB hoc est ad GE erit vt tota AC ad totam BE, & permutando vt AE ad AC, ita BE, minus A B, hoc est ita G E, ad B E; & inuertendo vt A C, ad A B, plus B E, hoc est ad A E, ita B E, ad B E, minus B G, hoc est ad G E; sed A C ad A B, sumpta intermedia A B, plus B E, seu A E, rationem habet compositam ex ratione A C, ad A B, plus B E, seu ad A E, & ex ratione huius ad A B; Erat autem vt AC ad A B, plus BE, seu ad AE, ita BE ad B E, minus A B, seu ad G E; ergo ratio A C ad A B, composita erit ex ratione B E ad B E, minus A B, hoc est ad G E, & ex ratione A B, plus B E, hoc est A E ad A B; Sed rectangulum A B E, plus quadrato B E nempè rectangulum A E B, ad rectangulum A B E, minus quadrato A B, rationem habet compositam ex iisdem rationibus; ergo rectangulum A B E, plus quadrato B E, ad rectangulum A B E, minus quadrato A B, erit vt A C ad A B, sed rectangulum A B E æquale est ex constructione quadrato K; vnde rectangulum A B E, plus quadrato B E, idem erit quod quadratum B E, plus quadrato K, quod minori existente A B, & K, media inter A B, B E erit aggregatum quadratorum medij, & maioris extremi, & rectangulum A B E, minus quadrato A B, est differentia quadratorum medij, & minoris extremi, ergo A B, K, & B E, sunt tria latera continuè proportionalia, ita vt aggregatum quadratorum medij & maioris extremi, ad differentiam quadratorum medij & minoris extremi, sit vt A C ad A B; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita differentia quadratorum medij & minoris extremi ad aggregatum quadratorum medij, & maioris extremi.

Data igitur ratione interualli, seu differentiæ quadratorum mediæ, & minoris extremi, ad aggregatum &c, tria latera proportionalia nos adinuenimus. Quod facere oportebat.

Contingit aliquando vt etiamsi in resoluendo non sit factus ascensus supra plana, expediat nihilominus Porisma per modum Theorematis assumere demonstrandum. Esto exemplum,

Problema,

Quantitatem adinuenire, cui si addantur, & detrahantur data quantitates, summa ad residuum datam habeat rationem. Exemplum VIV.

Duæ datæ sint quantitates b, & c, & oporteat adinuenire quantitatem cui si addideris b, atque detraxeris c, summa ad residuum sit in ratione vt r, ad s, Quoniam vero r, s, & b, sunt magnitudines datæ nihil prohibet fieri vt r, ad s, ita b, ad aliam, quæ vocetur d; idque facilitatis gratia, ratioque sit data vt b, ad d, quia tamen posset fieri æquiuocatio in colligendo Porismate præstat ob id prædictos terminos retinere. Quæsita sit quantitas a; ergo iuxta tenorem Problematis erit vt a + b, ad a − c, ita r, ad s; multiplicatis autem extremis, & medijs s a + b s, æquabitur r a − r c; & per repetitam antithesin r a − s a, æquabitur s b + r c vnde $\frac{sb + rc}{r - s}$ æquabitur a, vel erunt proportionales r − s; ℞ (s b + r c); a. Hinc,

PORISMA.

Quantitas addenda ducatur in posteriorem terminum data rationis, item & terminus antecedens in quantitatem auferendam; aggregatum autem productorum applicetur ad differentiam terminorum data rationis; magnitudo enim ortina erit quantitas quæsita.

COMPOSITIO.

Y———
Z——

A H B C D E

SIt recta quidem A B, quæ addenda fit quæsitæ quantitati, & B C fit auferenda ab eadem, ita vt aggregatum ad residuum fit in ratione Y, ad Z.

Fiat vt Y ad Z, ita A B ad A H; mox verò ipsi B C addatur C D, quæ fit æqualis A H; & vt H B differentia terminorum ad A B quantitatem addendam, ter minumq; maiorem, ita fiat B D ad B E. Dico B E satisfacere.

Manifestum est autem factum esse, quod Porisma iubet; factum est enim vt Y ad Z, ita A B ad A H, seu C D; vnde rectangulum sub A B, & A H erit quod continetur, nempe sub quantitate addenda, & minori termino datæ rationis; est enim ob analogismum rectangulum, quemadmodum nunc nos dicebamus; rectangulum verò sub A B, & B D, erit quod continetur sub A B maiori termino, & sub B C quantitate auferenda, vnà cum rectangulo ex A H minori termino in ipsam A B, quantitatem addendam; quæ quidem satis de se manifesta, atque conspicua sunt. Vnde cum factum sit vt H B, id est differentia inter A B; & A H ad A B, ita B D ad B E, applicuimus aggregatum rectangulorum prædictorum, nempe rectangulum A B D, ad A B minus A H, quæ Porisma dictabat.

Quoniam igitur est vt H B, hoc est vt A B, minus A H, ad A B, ita B D, hoc est B C, plus C D, ad B E; ergo rectangulum A B E, minus rectangulo sub A H, & B E, æquabitur rectangulo A B C plus rectangulo B A H; & per antithesin rectangulum ex A H in B E plus rectangulo B A H, vnà cum rectangulo A B C, æquabitur rectangulo A B E; & rursus rectangulum ex A H in B E, plus rectangulo B A H, æquabitur rectangulo A B E, minus rectangulo A B C; æqualitate autem ad proportionem reuocata erit, vt A B, plus B E, hoc est A E, ad B E, minus B C, hoc est ad C E, ita A B ad A H; seu vt Y ad Z.

Elegantiùs tamen hunc in modum.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Porisma dictauit veritatem inquirere.

Recta A B sit b & B C sit c; cumque vt Y ad Z ita sit r, ad s, factumque sit vt Y ad Z ita A B ad AH, seu C D quæ sit d; vnde sit vt r ad s ita b ad d & quia factum est, vt H B ad A B ita B D ad B E, ipsa B E sit a vnde sit vt r -- s ad r, ita c † d ad a. Est enim factum vt Y ad Z, seu vt r, ad s, ita A B, ad A H vnde erit A B minus A H, hoc est H B, ad A B, vt r -- s ad r; quare, vt H B ad A B ita B D ad B E non dissimiliter, ut r -- s ad r ita c † d ad a.

RESOLVTIO.

QVoniam igitur est vt r -- s, ad r, ita c † d, ad a; ergo inuertendo erit vt r, ad r -- s, ita a, ad c † d; & per conuersionem rationis, vt r, ad s, ita a, ad a -- c - d; sed ex constructione est vt r, ad s, ita b ad d; ergo vt b, ad d, ita a, ad a -- c -- d, & permutando vt b, ad a, ita d, ad a -- c -- d; & componendo vt b † a, ad a, ita a -- c, ad a -- c -- d; & permutando vt a † b, ad a -- c, ita a, ad a -- c -- d; erat autem vt a, ad a -- c -- d, ita b, ad d, & vt b, ad d, ita r, ad s; ergo vt r ad s, ita a † b, ad a -- c. Hinc.

THEOREMA.

Si quantitas addenda ducta fuerit in posteriorem terminorum datæ rationis, & terminus antecedens in quantitatem auferendam, productorum aggregatum applicatum fuerit ad differentiam terminorum datæ rationis. Dico magnitudinem ortiuam, Problemati satisfacere.

Fiat vt Y ad Z, ita A B, ad AH, seu C D; & vt Y, minus Z, ad Y, seu vt A B, minus A H ad A B, ita B D ad B E.

COM-

COMPOSITIO.

Quoniam igitur est vt Y minus Z, ad Y, ita B D, ad B E; ergo inuertendo erit vt Y ad Y minus Z, ita B E, ad B D, & per conuersionem rationis vt Y ad Z, ita B E ad D E; sed ex constructione est vt Y ad Z, ita A B, ad CD; ergo vt A B ad C D, ita B E ad DE; & permutando vt A B ad B E, ita C D ad D E; & componendo vt A E, ad B E, ita C E ad D E; & permutando vt A E ad C E, ita B E ad D E; erat autem vt B E ad D E, ita A B ad C D, & vt A B, ad C D, ita Y, ad Z; ergo vt Y ad Z, ita erit A B ad C E.

Y——————
Z————

A B C D E

Iam superiori libro Deductionem, quam Graeci dicunt Ἐπαγωγὴν explicuimus, & quatenus ea vtitur Veterum Analystarum Ars patefecimus; nunc non pigebit quaedam subijcere in gratiam nouae Artis resolutricis; demonstrabimus autem Analystam de hoc valdè sollicitum esse debere, quoniam Problema alioquin implicatum deductionis praesidio facilè resoluet. Sit igitur. Deductio quid, & eius vsus.

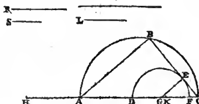
De Deductione, quam Graeci Ἐπαγωγὴν appellant. Caput XI.

PROBLEMA.

Semicirculo positione dato A B C, & dato puncto D; describere per D, semicirculum, qualis est D E F, ita vt si ducatur contingens B C, fiat A D, ipsi B E aequalis.

Proponit Pappus hoc Problema Prop. 85. lib. 7. quod vt ipse ait deducitur ad determinatam sectionem, Alijs autem modis; idem proponi poterit, vt inferiùs manifestum fiet. Interim, deducemus cum eodem Auctore Problema ipsum; & postea, sectionem perficiemus beneficio Analyseos. Ipse autem, hunc ferè in modum ratiocinatur. Problema ex Pappo lib. 7. Prop. 85.

Resolutio iuxta Veteres.



Sit iam factum. Quoniam A D, est aequalis B E; erit vt B E ad E C; ita A D, ad E C; sed vt B E, ad E C, ita A G ad G C; ergo vt A G, ad G C, ita A D, ad E C.

Quare vt quadratum A G ad quadratum G C; ita quadratum A D, ad quadratum E C, seu ad quad. G C, minus quadrato G E, seu D G; facta sit H A aequalis A D & D C, bifariam in K diuisa. Vt igitur totum ad totum, sic ablatum ad ablatum; hoc est totum quadratum A G, ad totum quadratum G C, ita ablatum quadratum A D, ad ablatum quadratum E C; erit reliquum rectangulum H G D ad reliquum quadratum D G, vt totum quadratum A G, ad totum quadratum G C; & ob id, vt ablatum quadratum A D, ad ablatum excessum E C, hoc est ad excessum quadrati G C, supra quadratum D G, ergo, vt H G, ad D G, ita quadratum A D, ad excessum praedictum. Loco autem quadrati A D, intelligatur duplum rectangulum D C, L; loco verò excessus, intelligatur rectangulum D C F; seu duplum rectangulum D C in G K, ergo vt H G ad D G, ita duplum rectangulum D C in L ad duplum rectangulum D C, in G K; atque adeò vt simplum, ad simplum; ob id vt basis, ad basim, cum sint eiusdem altitudinis D C; nempè vt L ad G K. Quare sunt quatuor proportionales H G, D G, L, & G k.

Sunt-

Suntque datæ tres lineæ H D, D K, L; ergo deductum est ad determinatam sectionem. Reliquum igitur est; vt illud soluamus.

Problema deductum.

Datum latus H K, diuisum quidem in D; Oporteat iterum in G illud diuidere inter D, K; ea lege, vt rectangulum comprehensum sub H G, G K, æquale sit rectangulo comprehenso sub intermedia sectione D G, & quouis dato latere L.

RESOLVTIO.

PArs H D, dicatur b; at verò D K, dicatur d. Pars autem G K, esto a; ergo D G, erit d − a. Quare rectangulum H G K; erit $b\,a + d\,a - a^2$ rectangulum verò sub D G & L, erit $l\,d - l\,a$. Proinde erit æquatio $l\,d - l\,a = b\,a + d\,a - a^2$ & per antithesin fiet $b\,a + l\,a + d\,a - a^2 = l\,d$ seu $\overline{b + l + d}\,a - a^2 = l\,d$. Claritatis gratia loco $b + l + d$ intelligatur K, & erit $K\,a - a^2 = l\,d$. Huius autem æquationis radix est $\frac{1}{2}K - R(\frac{1}{4}K^2 - l\,d)$ Hinc.

L

b d

H A D d − a G a K

$b + d - a$

a

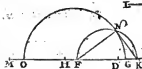
$l\,d - l\,a = b\,a + d\,a - a^2$

PORISMA.

Ab aggregatum ex H D, & L, addatur D K, aggregati sumatur dimidium, ex cuius quadrato auferatur rectangulum sub D K, & L, residui sumatur latus; hoc enim sublatum ex dimidio iam dicto, relinquit partem G K.

COMPOSITIO.

DAtum sit latus H K, diuisum in D, oporteat iterum illud diuidere in G inter D, K; vt rectangulum H G K, æquale sit rectangulo sub L, & D G. Rectæ datæ H K, addatur MH; æqualis L; aggregatum verò M K, ex M H scilicet, & ex H K, bifariam quidem diuidatur in puncto B & super dimidium F K, describatur semicirculus in quo aptetur NK, æqualis rectæ, quæ possit rectangulum sub D K, & L, agatur F N, ad interuallum F N, ex centro F, describatur circulus, cuius diameter O G. Dico factum esse, quod Problema requirit adeo vt rectangulum H G K, æquale sit rectangulo sub D G & L.



Quandoquidem rectangulum OKG, æquale est quadrato N K, rectangulum autem O K G æquale est rectangulo M G K. Et rectangulum M G K, æquale est rectangulo M K G, minus quadrato Gk. Proinde rectangulum M KG, minus quadrato GK, æquale erit quadrato N K. hoc est rectangulo sub D K, & L. Et quoniam MK, æqualis est aggregato ex H D, & M H, plus D K; Proinde rectangulum sub M H, seu L, & G K, plus rectangulo sub H D, & G K, plus rectangulo sub D K, & G K, minus quadrato G K, erit æquale rectangulo sub L, & D K, & per antithesin fiet rectangulum sub L & D K, minus rectangulo sub L, & G K, æquale rectangulo sub H D, & G k, plus rectangulo sub D K & G K, minus quadrato G k; Hoc est rectangulum sub L, & D K, minus G K, hoc est sub L. & D G, æquale erit rectangulo sub H D, & G K, plus rectangulo sub D K, & GK, minus quadrato G k, hoc est rectangulo sub H K, minus G K, & G k, hoc est rectangulo H G k. Quod oportebat &c.

Proble-

Problematis propositi Demonstratio.

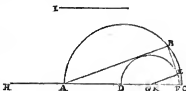
Quoniam igitur sic est diuisum propositum latus; vt rectanguli H G K, ad rectangulum sub L, & D G, ratio, sit æqualis, ad æquale; fiat quidem circa centrum G, semicirculus D E F; Dico semicirculum D E F, Problema efficere. Ducatur enim B C semicirculum contingens; erit A D, ipsi B E, æqualis. Fiat quod bis continetur sub D C & quapiam recta L, æquale quadrato A D.

Nam cum rectangulum H G K, æquale sit rectangulo ex L, & G D, vt H G ad G D, ita erit L, ad G K; Sed vt H G, ad G D, ita est rectangulum H G D, ad quadratum ex G D; Hoc est excessus quadratorum, ex G A, A D, ad quadratum G D, vt autem L ad G K, ita id quod bis continetur L & D C; ad contentum bis D C, G K, hoc est quadratum A D; factum est enim, quod bis continetur sub L & D C, æquale quadrato A D, ad excessum quadratorum G D, G C; Vt igitur quadratorum G A, A D, excessus ad quadratum G D, ita est quadratum A D, ad excessum quadratorum G D, G C; ergo vt quadratum A G, ad quadratum G C, ita quadratum A D, ad excessum quadratorum ex D G, G C; cum enim sit vt quadratum G A, minus quadrato A D, ad quadratum D G, ita quadratum A D ad quadratum G C minus quadrato G D; omnia simul antecedentia faciunt quad. G A, omnia simul consequentia faciunt quad. G C, ergo per 12. quinti vt G A, quadratum, ad quadratum G C, ita A D quadratum scilicet vnum ex antecedentibus, ad quadratum G C, minus quadrato G D, vnum ex consequentibus, hoc est ad excessum quadratorum ex C G, G E, hoc est ad quadratum ex E C; Vt igitur quadratum A G, ad quadratum G C, ita quadratum A D, ad quadratum E C, sed vt quadratum A G, ad quadratum G C, ita est quadratum B E, ad quadratum E C; ergo vt quadratum B E, ad quadratum E C, ita quadratum A D, ad id, quod ex E C quadratum. Quadratum igitur ex A D æquale est quadrato ex B E, Ideoque recta linea A D; ipsi B C, est æqualis.

Idem autem absoluere secundum rationem inæqualitatis.

Duobus modis intelligi potest ratio data inæqualitatis, vel enim est effabilis, vel non sit primùm effabilis, dataque sit dupla, quam habere debet A D, ad B E.

Resolutio iuxta Veteres.



Sit iam factum, atque adeo A D, dupla sit ipsius B E; factaque sit H A æqualis A D.

Quoniam igitur A D, dupla est ipsius B E. Proinde vt B E, ad E C; ita quidem dimidia A D, ad E C; sed vt B E, ad E C, ita A G ad G C; Proinde vt A G ad G C, ita dimidia A D, ad E C; propterea, vt quadratum A G ad quadratum G C, ita quadratum dimidij A D, hoc est $\frac{1}{4}$ quadrati A D. ad quadratum E C; sed quadratum E C est excessus, quo quadratum G C, superat quadratum G E, seu quadratum D G; ergo vt quadratum A G ad quadratum G C; ita $\frac{1}{4}$ quadrati A D, ad excessum quo quadratum G C, superat quadratum G E; Vt autem totum ad totum, sic ablatum ad ablatum, proinde, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit; Si verò ex quadrato A G, auferatur quadratum dimidij A D seu quarta pars quadrati A D, remanent rectangulum H G D plus tribus quartis partibus quadrati A D. Si autem ex quadrato G C, auferatur excessus iam dictus cuiusmodi est quadratum E C, remanebit quadratum G E seu D G, Proinde rectangulum H G D plus $\frac{3}{4}$ quadrati A D, ad quadratum D G, rationem habebit, vt quadratum A G ad quadratum G C, & vt quadratum dimidii A D, seu $\frac{1}{4}$ quadrati A D, ad prædictum excessum; loco autem $\frac{1}{4}$ quadrati A D, intelligatur rectangulum sub L, & dupla D C, loco verò ipsius excessus intelligatur rectangulum D C F, seu quod idem est duplum rectangulum sub D C & G K; (cum enim D C, sit bifariam in K diuisa, & D F, bifariam diuisa in G, erit F C, dupla ipsius G K; quare rectangulum D C F erit æquale

æquale duplo rectangulo sub D C & G K) ergo erit vt rectangulnm H G D plus $\frac{1}{4}$ quadrati A D ad quadratum D G, ita rectangulum sub dupla D C & L, ad rectangulum sub dupla D C & G K; Quare etiam ita rectangulum sub L, & simpla D C ad rectangulum sub G K & simpla D C; sed rectangulum L, D C, ad rectangulum G k, D C est vt L, ad GK; ergo erit vt rectangulum HGD plus $\frac{1}{4}$ quadrati AD, ad quadratum DG, ita L ad GK.

Deductum est igitur Problema ad determinatam sectionem. Itaut superfit soluendum illud.

Problema deductum.

Propositũ sit latus H K, diuisum in D, vtcunque & oporteat iterum secare in G, inter D, K, vt rectangulum H G D plus $\frac{1}{4}$ quadrati A D, ad quadratum D G habeat rationem, quam L ad G K.

* b * d *

H A D d--a G a K

Deducti Problematis.

RESOLVTIO.

PArs H D sit b, at D k, sit d. Pars G K, esto a, ergo reliqua D G erit $d - a$; at verò recta z possit $\frac{1}{4}$ quadrati A D, supposita ratione data, sic procedendum erit, vt l, ad a, ita debet esse $bd + d^2 - ba - 2da + a^2 + z^2$ ad $d^2 - 2da + a^2$; vnde ratione ad æquationem reuocata fiet

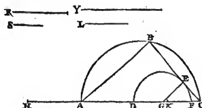
$$bda + d^2a - ba^2 - 2da^2 + a^3 + z^2a = ld^2 - 2lda + la^2$$ & per antithesin

$$\left.\begin{matrix} bda + d^2 \\ + 2ld^2 \\ + z^2 \end{matrix}\right\} a \quad \left.\begin{matrix} - b \\ - 2d \\ - l \end{matrix}\right\} a^2 + a^3 = ld^2.$$

Quod si fuerit inefabilisdata ratio, adhuc Problema soluemus.

Data sit igitur ratio vt R ad S, quam habere debet A D, ad B E,

Resolutio iuxta Veteres.



SIt iam factum.

Quoniam igitur A D ad B E, debet esse vt R ad S, recta quidem, ad quam ipsa quidem A D, sit vt R ad S rationem eandem habebit ad E C, quàm ad eandem E C habet B E erit illa æqualis B E sit autem Y, ad quam A D, sit vt R ad S. Proinde vt B E ad E C ita Y ad E C. Sed vt B E ad E C ita quidem A G ad G C: proinde vt A G ad G C ita Y ad E C, atque adeo vt quadratum A G ad quadratum G C, ita quadratum Y, ad quadratum E C, hoc est ad differentiam inter quadratum G C & G E seu D G. Vt autem totum ad totum, sic ablatum ad ablatum; erit reliquum ad reliquum vt totum ad totum, & vt ablatum; ad ablatum. Quare si Y quadratum auferatur ex A G, quadrato, remaneat Z quadratum. Si ex G C, quadrato auferatur E C quadratum remanebit quadratum G E seu D G. Proinde, vt quadratum A G, ad quadratum G C ita quadratum Z ad quadratum D G, & ita Y quadratum ad quadratum E C. Loco autem quadrat Y, substituatur duplum rectangulum sub D C, & L, & loco prædicti E C, quadrati substituatur duplum rectangulum sub D C & Gk; ergo vt Z quadratum ad D G, quadratum, ita duplum rectangulum sub D C & L, ad duplum rectangulum sub D C, & G K; ergo ita simplum, ad simplum; atque adeò vt L ad G K vt igitur L ad G k, ita Z quadratum ad D G; quadratum.

Deductum est itaque Problema ad determinatam sectionem. Superest igitur ostendendum,

Pro-

Problema deductum.

Sit latus propositum A K, diuisum in D, diuidere iterum in G inter D, K, vt quadratum illud, quod est differentia inter quadratum A D, & quadratum, ad quod quadratum A D est in ratione R ad S; quadratum, inquam, illud appellatum Z quadratum, ad quadratum D G, rationem habeat, vt L ad G K.

RESOLVTIO.

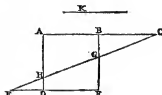
HÆc resolutio, quemadmodum ei compositio respondens, antecedentium imitatione perfici potest.

PROBLEMA.

Dato quouis parallelogrammo A B E D, datoque puncto F in D E producta; ducere F H G C occurentem B A productæ in C, vt trapetium A H G B ad triangulum C B G sit in data ratione A B, ad K.

Auctoris Methodo per implicitum datorum vsum Problema resoluitur.

RESOLVTIO.



SIt iam factum. Quoniam trapetium AHGB ad triangulum CBG, est vt AB ad K; ergo componendo trapetium AHGB, plus triangulo CBG, hoc est triangulum CAH, ad triangulum CBG, erit vt AB plus K ad K; sed vt triangulum CAH, ad triangulum CBG, ita quadratum AC ad quadratum BC; ergo vt AB, plus K, ad K, ita quadratum AC ad quadratum BC; ergo diuidendo vt AB ad K, ita quadratum AC, minus quadrato BC, ad quadratum BC. Quod fieri potest &c.

Huc igitur deducendum est, vt resoluamus.

Problema deductum.

Protrahere A B in C, vt excessus quadrati A C supra quadratum B C, hoc est vt quadratum A B, plus duplo rectangulo ABC, ad quadratum B C, sit in data ratione A B ad K.

Deducti Problematis

RESOLVTIO.

d

* b * a *
A B C

PRopositum latus AB, sit b, & ratio data sit vt b, ad d; pars BC esto a; aggregati AC quadratum erit $b^2 + 2ba + a^2$, excessus huiusmodi quadrati supra quadratum partis BC, quæ supponitur a, erit $b^2 + 2ba$; ergo vt b ad d, ita debet esse $b^2 + 2ba$ ad a^2; multiplicatis autem extremis & medijs $db^2 + 2dba$ æquabitur ba^2; & per antithesin $ba^2 - 2dba$ æquabitur db^2; omnibus ad b quidem applicatis $a^2 - 2da$ æquabitur bd; ergo $\sqrt{(d^2 + bd)} + d$ æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Ad quadratum termini consequentis addatur rectangulum sub ijsdem terminis, aggregati verò lateri terminus idem consequens addatur; huiusmodi siquidem aggregatum radicem quæsitam exhibebit.

Potuisset etiam reuocari illa æquatio $a^2 - 2da = bd$ ad proportionem vt $a - 2d$, ad b, ita d ad a, &aliud colligi Porisma, sed in idem redit.

Quamuis autem Porisma optime dictet effectionem, resolutio tamen vnde deductum est illud, non suppeditat vestigia, quæ liceat in componendo repetere; propterea ad modum Theorematis debet Porisma ipsum demonstrandum assumi.

Effectio Geometrica.

Data sit recta A B, quam oportet taliter producere in C, vt quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C sit ad quadratum B C, in ratione A B, ad B D; super diametrum A D, describatur semicirculus, & ex B excitetur perpendicularis B F, iunctaque D F, centro D, interuallo D F, describatur semicirculus secans B E protractam in C; erit enim B C, latus adiungendum.

Vide in frapositum Schema.

PROPOSITIO.

Datis ijs, quæ Porisma dictat &c. veritatem inquirere.

RESOLVTIO.

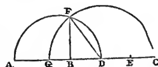
RECta quæ possit rectangulum bd sit z. Quoniam igitur est vt $a - 2d$ ad z, ita z, ad a; ergo $a^2 - 2da$ æquabitur z^2; sed z^2 æquatur bd ex constructione; ergo $a^2 - 2da$ æquabitur bd; communi addito $2da$, ergo a^2 æquabitur $bd + 2da$; Sed quoniam est vt b ad d, sumpta communi altitudine b, ita b^2 ad bd, & vt b, ad d, sumpta communi altitudine a, ita ba, ad da, vtque vnum ad vnum, hoc est vt simplum ad simplum ita duplum ad duplum; ergo vt b, ad d, ita $2ba$, ad $2da$; erat autem vt b, ad d, ita b^2 ad bd; modo vero vt b ad d, ita $2ba$, ad $2da$; ergo erit vt vnum antecedens, ad vnũ consequens nempè vt b^2 ad bd, vel vt $2ba$ ad $2da$, ita ambo antecedentia ad ambo consequentia, nimirum $b^2 + 2ba$ ad $bd + 2da$. Sed vnum antecedens ad vnum consequens erat vt b ad d; ergo vt b, ad d, ita $b^2 + 2ba$, ad $bd + 2da$; erat autem a^2 æquale $bd + 2da$; ergo vt b, ad d, ita $b^2 + 2ba$, ad a^2. Hinc.

THEOREMA.

Si sit latus A B, & ei in directum adiuncta B D, & super A D descripto semicirculo, ex B verò erecta perpendiculari B F, ductaque F D, centro D, interuallo D F, descripto semicirculo G F C secante A D protractam ad partes D in C. Dico esse vt A B ad B D, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad quadratum B C.

COMPOSITIO.

DIco igitur rectam A B esse productam in C vt quadratum A B, vna cum duplo rectangulo A B C sit ad quadratum B C, vt A B ad B D. Fiat B E dupla ipsius B D.



Quoniam enim rectangulum G B C æquale est quadrato B F, cui pariter æquale est rectangulum A B D, propterea rectangulum G B C æquabitur rect angu l est autem rectangulum G B C æquale rectangulo B C E duabus

bus G B, E C æqualibus existentibus; ergo rectangulum A B D æquabitur rectangulo B C E; vtrinque addito communi rectangulo C B E; ergo rectangulum A B D, plus rectanlo C B E, æquabitur rectangulo B C E, vnà cum rectangulo C B E; hoc est quadrato B C. Vt autem est A B, ad B D, sumpta communi altitudine A B, ita quadratum A B ad rectangulum A B D; præterea vt A B ad B D, sumpta communi altitudine BC, ita est rectangulum A B C ad rectangulum C B D; vtque simplum ad simplum, ita duplum ad duplum; ergo vt A B ad B D, ita duplum rectangulum A B C, ad duplum rectangulum C B D; hoc est ad rectangulum C B E. Ostensum est autem vt A B ad B D, ita tàm quadratum A B ad rectangulum A B D, quàm duplum rectangulum A B C, ad rectangulum C B E; ergo vt A B ad B D, ita ambo antecedentia, ad ambo consequentia; nimirùm quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C, ad rectangulum A B D, vna cum rectangulo C B E. Demonstratum est autem supra hæc æqualia esse quadrato B C; ergo vt A B ad BD, ita quadratum A B, plus duplo rectangulo A B C ad quadratum B C. Quod oportebat &c.

Problematis initio propositi Demonstratio.

Quoniam igitur est vt A B ad K, ita excessus quadrati A C supra quad. B C ad quad. B C; ergo componendo vt AB, plus K ad K, ita quad. A C ad quad. B C; sed vt quad. A C, ad quad. B C, ita triangulum AHC ad triangulum BGC; ergo vt A B, plus K ad K, ita triang. AHC, ad triang. BGC; ergo diuidendo, vt A B ad K, ita triang. A H C, minus triangulo B G C, ad triangulum B G C. Sed triangulum A H C, minus triangulo B G C, idem est quod trapetium A H G B; ergo vt A B ad K ita trapetium A H G B, ad triangulum B G C. Ex puncto igitur F duximus rectam F H G C, vt Problema requirit &c.

De Methodo depromendi Geometricas effectiones, ex Algebra veteri: siue vsus veteris Algebræ, ad Geometricè Problemata resoluenda. Caput XII.

HIc perspicuum fiet, quantum perspicere coiectura possum, quod superius insinuatum fuit; nempè parui faciendam non esse imitatione Ghetaldi veterem Logisticen. Quandoquidem ad Problemata Geometricè enodanda apprimè conducit, & vtilissima quidem est, vt videbimus. Verum antequam Methodum aperiamus nobis incumbit onus explicandi quonam pacto operationes illas quatuor, quæ quidem in numeris exercentur quantitati etiam continuæ nos accommodare possimus. Primum ergo dicendum est de arte, qua videlicet quatuor operationes nimirùm Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, atque diuisionem Geometricè perficere valeamus.

Pulcra est Methodus illa quæ ex veteri logistica depromuntur Geometricæ effectiones.

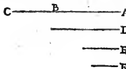
Additio quantitatum continuarum Operatio prima.

Cum opus est addere quantitatem continuam alteri quantitati continuæ aduertendum est, vt superiùs monuimus additionem fieri non posse inter quantitates heterogeneas; hoc est quantitates diuersæ naturæ; non enim longitudo puta linea potest addi plano, neque planum solido. Sed longitudo longitudini planum plano, solidum solido, addi debet.

Additio quando instituatur inter quantitates continuas.

Institui debens inter quantitates homogeneas &c.

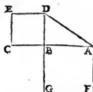
Si opus sit longitudini latitudinem addere; vt lineæ A B, sit addenda D protrahatur A B, vsque ad C, eà conditione, vt B C sit æqualis D, & factum erit quod oportet.



At verò si plures essent lineæ addendæ quàm duæ, puta D, E, F, &c. eodem pacto procedendum est; nempè connectendo illas indirectum; hoc est facta additione vnius ad alteram; huic quoque aggregato addenda est altera ex reliquis modo eodem; & ita procedendum deinceps perpetuo, atque constanti ordine, quousque superesint magnitudines addendæ; eadem semper est enim ratio, compositum verò ex illis omnibus lineis, est longitudo, siue linea consurgens ex linearum propositarum additione. Ita Vieta in libello, cui titulum fecit; Effectionum Geometricarum canonica recensio.

 Si

Quando plano opus est addere planum, qua arte sit instituenda additio, & primo quãdo plana sunt quadrata.



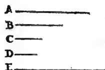
Si verò sit iniunctum plano addere planum; oportet planorum conditionem aduertere. Si namque omnia plana sint quadrata; qua arte sit instituenda additio ostendit Euclides lib. 1. Prop. 47. Vt si sint duo quadrata addenda inter se A B G F, & B C E D; constituantur sic, vt latera ipsorum puta D B, B A efficiant angulum rectum D B A, siuè, C B, B A, rectam lineam conficiant, & agatur A D, huius enim quadratum erit aggregatum ex quadratis A B G F, & B C E D; & ita deinceps non dissimili modo procedendum erit, si plura quidem extiterint quadrata, quàm duo.

Hoc autem modo, nedum quadratum possumus addere quadrato, sed etiam quamlibet recti lineam figuram, alteri addere poterimus, dummodo sint similes, similiterque descriptæ, vt ostendit Euclides lib. sex. Prop. 31. Elementorum.

Quãdo plana non sunt quadrata. Ars transmutandi figuras quascumque in quadrata alibi explicatur ab Auctore.

At verò si plana non fuerint quadrata, sed rectangula, vel triangula non similia, trapetia, &c. In huiusmodi casibus, reducendæ sunt dictæ figuræ ad quadrata, & eodem modo procedendum, vt supra. Hanc autem transmutandi artem, præter quam quod docet eam Euclides Prop. 35. lib. 1. & 17. sexti, nos explicuimus in Geometria Practica; Ita pariter, si quadrato foret circulus addendus; vel addere deberemus Ellipsim, aut Parabolam, reducendæ essent hæ figuræ in quadrata; qua de re loco citato.

Additio inter solida qua arte fiat, primo cum addendus est cubus cubo.



Si verò sit instituenda additio inter solida, hæc autem sint cubi; hunc in modum operatio perficietur. Cubo ex C, addendus sit cubus ex B; hinc inde reperiantur tertiæ proportionales A, D; ita vt ad C, B, tertia sit A; & ad B, C, tertia sit D, & A, D, addantur inter se; vt supra docuimus, & fiat aggregatum E; solidum factum sub B, C, E, erit æquale cubis ex B, & C simul sumptis. Demonstratio sic se habet. Quoniam solidum B C D, parallelepipedum rectangulum est

a 36. vndec.

a æquale cubo ex C, & solidum C B A, æquale est cubo ex B, huiusmodi autem solidis eadem est basis sub B, & C; ob id solida erunt vt altitudines. Quamobrem ex his aggregatum solidum B C E, quidem erit; atque adeò solidum B C E, æquale erit aggregato cuborum ex B, & C.

Quando sunt plures cubi quàm duo. Quando corpora non sunt cubica quid agendum. Transmutatio corporum ab Auctore alibi declaratur.

At si cubi addendi plures essent quàm duo; Non dissimili modo foret procedendum; facta namque additione vnius ad alterum huiusmodi aggregato addendus est tertius; quo facto oporteret huic aggregato addere quartum, & ita deinceps.

At verò si corpora addenda cubo, non essent cubi; oporteret prius illa in cubos transmutare, mox procedendum foret, vt supra. Huiusmodi verò transmutandi ratio in Geometria Practica explicatur.

Quot modis accidere possit subtract. inter quantitates continuas. Subtractio inter lineas quomodo fiat.

Subtractio quantitatum continuarum
Operatio secunda.

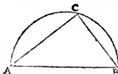
QVot in Additione, tot in Subtractione casus accidere possunt; aut enim subtractio fieri debet inter longitudines; ita vt longitudo longitudini sit subducenda, vel inter plana, vel inter solida.

Si sit à linea subducenda linea; fiat iuxta doctrinam Euclidis libr. 1. Propositione tertia; docet enim ibi, qua arte datis duabus lineis inæqualibus, possimus minorem à maiori subtrahere, quæ quidem doctrina applicari potest subtractioni, & si lineæ plures sint, quàm duæ.

Planum, à plano quo pacto subtrahatur. Quãdo plana sunt quadrata.

At-

At verò si oporteat subtrahere planum à plano; aduertere opus est, planorum conditionem, atque naturam; si plana fuerint quadrata facilè absoluetur subtractio; nimirum constituendo semicirculum supra latus maioris quadrati; & in ipso semicirculo inscribendo latus quadrati minoris; etenim ab intersecatione, cum peripheria si ad aliud extremum diametri ducatur linea, hæc erit latus quadrati, quo præstat quadratum datum maius quadrato minori. Exempligratia sit quadrato, cuius latus est A B, subtrahendum quadratum, cuius latus est B C, describatur peripheria A B C, & latus B C, inscribatur, vt vides, deinde ducta C A; Dico quadratum ex A C, esse illud per quod differt quadratum ex A B, à quadrato ex B C; quod facilè potest demonstrari ex ijs, quæ docet Euclides loco citato; eodem pacto si fuerint aliæ figuræ similes tamen, similiterque descriptæ; Ita si fuerint circuli &c. & non dissimili artificio agendum est in subtractione, cum fuerint plura quadrata, quàm duo.



Verum si plana non essent quadrata, sed alterius speciei, verbigratia, Rectangula, Rombi, Pentagona, Trapetia &c. Oportet plana hæc ad quadrata reuocare, & fiet subtractio, vt supra; hanc autem figurarum transformationem, vel permutationem docet Euclides; & ita si planorum aliqua fuerint rectilinea, aliqua curuilinea, ipsa reductione facta, nempè ad quadrata, absoluetur subtractio. 14 *sex*

Quãdo plana non sunt quadrata lib. 1. Prop. 35. & 41 & li 6. Pr. 17.

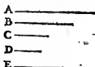
Demum si imperetur subtractionem solidorum instituere, oportet eorum naturam considerare, namque si sit subtrahendus cubus, à cubo tali modo instituetur subtractio. Sit cubus à C, subducendus à cubo ex B; hinc inde reperiantur tertiæ proportionales A, D, & subtracta D, ab A, remaneat E; Dico solidum B C E, fore differentiam cuborum.

Subtractio inter sol. qua arte sit instituenda & primo qua cubus, à cubo subtrahi debet

Etenim cubo ex C, æquale α est solidum B C D, & cubo ex B, æquale est solidum A B C, sed hæc solida habent eandem basim sub B, & C, ergo β erunt in ratione, vt altitudines; ob id solidum sub differentia altitudinum A, & D, nimirum E, & plano sub C, & B, erit differentia cuborum; Hinc patet, quid sit agendum, cum plures fuerint cubi subtrahendi ab vno; Arte enim superiùs explicata, in vnam summam colligendi sunt cubi subtrahendi; mox instituenda est subtractio inter hoc aggregatum, & cubum, à quo subductio fieri debet.

α 36 Vndec. β 32 Vndec.

Quãdo plures cubi subtrahendi sunt ab vno quomodo fiat. Si corpora proposita non sint cubi quid agẽdum.



Si proponantur corpora alterius naturæ oportet ea in cubos transmutare, & mox procedendum, vt supra.

Multiplicatio quantitatum continuarum Operatio Tertia.

HÆc multiplicatio dupliciter contingere potest; Aut enim continuam quantitatem ducere volumus in quantitatem continuam, vel in quantitatem discretam, nimirum numerum; Si hoc secundum proponatur agendum id expediemus additione; exempli gratia; Si linea quædam puta A B, deberet multiplicari per 6, protrahatur A B, vsque ad C, sic vt A C, sextupla sit ipsius A B, & factum erit, quod oportet, & hæc de numero integro.

A B C

Multiplicatio dupliciter potest accidere, vel enim quãtitas continua ducenda est in continuã, vel indiscretam.

At si quantitas continua multiplicanda sit per numerum fractum, nempè A B, duci debeat in $\frac{2}{3}$, sumenda est A C, dupla ipsius A B, prout numerator 2, indicat, & mox ipsius A C, sumere oportet trientem A D, prout indicatur à Denominatore 3, & factum erit quod oportet; & hæc intelligenda sunt etiam de alijs quantitatis speciebus.

A D B C

Rursus si indiscretam, vel innumerũ integrum, vel in fractum.

Si verò quantitatem continuam ducere debeamus in continuam, sic multiplicatio instituetur; & primò si proponatur linea, in lineam ducenda, hoc fiet erigendo ad angulos rectos

Quando ducenda est quãtitas continua in quantitatem continuã.

ctos

ctos vnam ex quantitatibus ſupra alteram, ita vt fiat quoddam parallelogrammum re-ctangulum; hoc enim eſt productum ex multiplicatione duarum linearum inter ſe.

Inuentio mediæ proportionalis ad hoc præcipuè conducit. Quomodo planum ducatur in planum.

Hoc verò nos aſſequemur elegantiùs inueniendo mediam proportionalem inter illas duas lineas, quæ inter ſe multiplicari debent; quadratum enim ipſius erit productum ex ductu illarum duarum linearum, vt patet ex Elementis, nempè 17. ſexti Elementorum Euclidis.

Vt verò planum ducamus in planum, diſponenda ſunt plana ipſa ad angulos rectos, ita vt vnum alteri perpendiculariter inſiſtat; nam ſolidum factum erit productum quæſitum, & hoc ſi conuertatur in cubum hic etiam erit id, quod producitur. Cæterum ſi ſuperficies, quæ inter ſe multiplicari debent, non ſint rectangulæ; ad rectangula reduci poſſunt, & poſtea fieri debet, vt ſupra dictum eſt. Si detur ſuperficies per lineam multiplicanda; coniungatur linea ad rectos angulos, & fiat ſolidum, illud enim erit productum; præſtat tamen ſuperficiem ad quadratum prius reducere.

Applicatio, ſeu Diuiſo quantitatum continuarum Operatio quarta.

Diuiſio quantitatis continuæ dupliciter poteſt accidere.

QVantitatis continuæ diuiſio dupliciter accidere poteſt; vel enim diuidenda eſt quantitas continua per numerum, vel per quantitatem continuam.

Diuiſio quantitatis continuæ per numerum integrũ. Diuiſio quantitatis continuæ per numerum fractum.

Diuiſio quantitatis continuæ per numerum, fit per ſubtractionem, ſi numerus fuerit integer; Vt ſi diuidenda ſit linea quædam per 4, ſumenda erit quarta pars ipſius lineæ, & factum erit quod oportet. At ſi numerus fractus extiterit, beneficio ſubtractionis, & additionis ſimul, totum id expediemus; Vt ſi diuidere deberemus lineam per $\frac{3}{2}$, primò ſumatur triplum ipſius lineæ, prout indicat numerus denominator; mox verò diuidatur in duas partes, prout indicatur à numeratore, & factum erit, quod oportebat.

Diuiſio quantitatis continuæ per quantitatem continuam.

Si verò quantitas continua diuidenda ſit per quantitatem continuam; aduertendum eſt, quod ſi ſuperficies applicetur lineæ, reſtituit lineam, & ſolidum applicatum ſuperficiei facit lineam, & applicatum lineæ facit ſuperficiem.

Sic quadratum lateri applicatum reſtituit latus; Cubus verò applicatus lateri reſtituit latus, & applicatus lateri reſtituit quadratum eiuſdem lateris; ſed de his iam ſuperius loquuti ſumus.

Quadratum diuidens, per lineam.

a 11 ſexti. Elementorum.

Si ſit iniunctum quadratum diuidere per lineam, fiat a prout linea data diuidens, ſeu partiens, nempè illa cui ſit applicatio, ad latus quadrati diuidendi, ita latus ad aliam lineam, & tertia linea inuenta erit Quotiens applicationis, ſeu diuiſionis. Cuius ratio eſt, quia per Quotientem nil aliud intelligimus, quàm illam quantitatem, quæ ducta in diuidentem facit quantitatem diuidendam, vt eſt in propoſito, nam rectangulum ſub diuidente, & inuenta, æquale eſt quadrato diuidendo.

Quando ſit diuidendum rectangulum cuius latera ſunt inæqualia circa rectam, quid agendũ quando figuræ diuidendæ fuerint Trapetia &c.

a 17. ſexti.

Cæterum rectangulum, cuius latera ſunt inæqualia circa rectum dupliciter poſſumus per quamcunque lineam diuidere. Primò illud reducendo ad quadratum deinde procedendo, vt ſupra. Secundò ſine huiuſmodi reductione, faciendo; vt linea diuidens ad latus vnum rectanguli, ita latus aliud ad aliam lineam, & quarta proportionalis inuenta erit quotiens diuiſionis inſtituta; eſt a enim rectangulum ſub extremis, æquale rectangulo ſub medijs.

Quãdo cubus diuidendum eſt, per quadratum.

Quod ſi diuidere oporteret alias figuras nempè Triangulum, Quadratum, Rombum, Circulum &c. Prius eiuſmodi figuræ reducendæ ſunt ad quadrata, & poſtea procedendum, vt prius.

ß 34. vndec. Elementorum.

Si Cubus diuidendus eſt per quadratum, fiat, vt quadratum diuidens, ad quadratum, quod eſt baſis cubi; Ita latus cubi ad aliam lineam; nam hæc inuenta linea, erit quotiens diuiſionis; Ratio eſt, quia quadratum diuidens in lineam inuentam ß facit ſolidum æquale cubo diuidendo.

Quando cubus diuidi debet per lineã.

Si verò Cubus diuidi debet per lineam, fiat, vt linea ad latus cubi; Ita quadratum, quod eſt baſis cubi ad aliud quadratum; Nam quadratum inuentum erit quotiens diuiſionis.

Si parallelepipedum diuidere libet per quadratum, vel quod libet aliud planum; fiat, vt quadratum, aut aliud planum diuidens ad baſim Parallelepipedi rectanguli; Ita eius alti-

altitudo ad aliam lineam; nam hæc erit quotiens.

Quod si parallelepipedum diuidi debeat per lineam, fiat, vt linea diuidens, ad altitudinem parallelepipedi; ita illius basis ad aliud planum; nam planum inuentum erit quotiens diuisionis. Sed de his hactenus, & ad propositum redeamus. *Quando parallele bipedum rectangulum diuidi debet per quadrata quid faciendum sit.*

Proponuntur nonnulla Problemata, quibus Geometricè sit satis Algebræ veteris præsidio.

Propositum sit:

PROBLEMA.

Datam rectam lineam in duas partes ita diuidere, vt partium quadrata, dato quadrato differant; Oportet autem dati quadrati latus minus esse data secanda. Exemplum I. *Quid agendum quum parallele bipedum diuidi debet per lineam.*

Proponatur linea secanda 18, in duas partes, vt maioris quadratum superet quadratum minoris quadrato ex 6, nempe 36.

Differentia partium esto 1 R, ergo 18 + 1 R erit dupla pars maior; Ideò simpla pars maior erit $9 + \frac{1}{2}R$, & simpla pars minor erit $9 - \frac{1}{2}R$; quadratum autem partis maioris est $81 + 9R + \frac{1}{4}Q$, & quadratum partis minoris est $81 - 9R + \frac{1}{4}Q$; horum autem differentia est 18 R, æquabitur 36, quadrato ex data differentia, nempè 6, Diuisione instituta, fit 1 R, valor 2; Hinc deducitur.

$$\begin{array}{c} 9 + \frac{1}{2}R \\ 9 + \frac{1}{2}R \\ \hline 4\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}Q \\ 81 + 4\frac{1}{2}R \\ \hline 81 + 9R + \frac{1}{4}Q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 9 - \frac{1}{2}R \\ 9 - \frac{1}{2}R \\ \hline -4\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}Q \\ 81 - 4\frac{1}{2}R \\ \hline 81 - 9R + \frac{1}{4}Q \\ \hline 81 + 9R + \frac{1}{4}Q \\ 81 - 9R + \frac{1}{4}Q \end{array}$$

PORISMA.

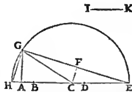
Quadratum datum pro differetia applicetur ad lineam diuidendam, nam quotiens differentiam partium exhibebit. Data autem differentia partium, & aggregato earundem dantur partes.

Recta data sit diuidenda A E, in duas partes, vt partium quadrata differant quadrato rectæ I K, erigatur perpendicularis A G, æqualis rectæ lineæ I K, & ducatur G E, quæ bifariam, secetur in F, ducatur ex puncto F, ad angulos rectos F C, super G E, secans A E in C, necessario concurret, vt alibi diximus, agatur C G deinde interuallo C E, vel C G, describatur peripheria H G E, mox verò β ab A E, abscindatur A B, segmentum æquale rectæ H A, deinde verò B E, secetur γ in D, bifariam, & factum est, quod Porisma iubet; nempè inuenta est A H, tertia proportionalis, quæ est quotiens proueniens ex diuisione quadrati rectæ A G, hoc est I K, per datam rectam diuidendam A E; & est differentia partium A D, D E; nam hæ differunt interuallo A B, quæ facta est æqualis ipsi A H; Dico quadrata partium A D, D E, differre per quadratum ex I K; Quoniam enim E A, A G, A H, sunt proportionales; erit rectangulum H A E, æquale quadrato ex A G, sed A B ex constructione æquatur ipsi A H, ergo rectangulum E A B, æquabitur quadrato ex A G; sed inter quadrata partium A D, D E, differentia est rectangulum

α 10. primi.

β 3. primi.

γ 10. primi.



sub

Ex Analysi huius Problematis. sub E A tota, & A B, differentia ipsarum partium. Ergo & eorundem quadratorum differentia erit quadratum ex A G; At quadratum ex A G est æquale quadrato datæ rectæ I K ex constructione; sunt enim æquales A G, I K; ergo quadrata partium A D, D E, differunt dato quadrato ex I K; Itaque secta est recta A E, vt Problema postulat &c.

SCHOLION.

Consideratio circa veterem Logisticam. *Vide igitur, quo pacto Diophantæa Logistice ad Problematum Geometricam solutionem conducat. Nemo enim credebat id eius præsidio fieri posse, cum numeros tractet mutationi quidem obnoxios; oppositum quisque tamen experietur. Si verò huic per Analyseos vestigia in demonstrando regredi liceret, nulla ratio suppeteret cur, ei recens præferatur. Sufficit nihilominus, vt nobis Geometricam dictet effectionem; deinde facile est ex Elementis eius demonstrationem depromere.*

Cæterum hoc idem Problema posset sic enunciari.

Data summa duorum laterum, dataque differentia quadratorum ex ipsis, distinguere latera.

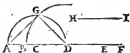
Proponatur rursus.

Exemplum II. *Data summa duorum laterum, & rectangulo sub ipsis, reperire latera.*

Duorum laterum summa data sit 12, & rectangulum sub ipsis comprehensum sit 20. Oporteat distinguere latera. Latus vnum esto 1 R, aliud erit 12 -- 1 R; rectangulum sub his est 12 R -- 1 Q, ergo necessario 12 R -- 1 Q, æquabuntur 20. Extrahatur æquationis radix, quæ duplex est; quoniam æquatio est amphibola, & radices ipsæ erunt 2, & 10. Hinc deducitur.

PORISMA.

Sume dimidium aggregati laterum, & ab eius quadrato subtrahe rectangulum datum: residui enim latus si addideris dimidio aggregati laterum, habebis partem maiorem; si verò subtraxeris, habebis minorem.



Laterum aggregatum datum sit A F; sub his rectangulum sit æquale quadrato rectæ H I; diuidatur A F, bifariam in D; & supra A D, describatur semicirculus A G D, in quo accommodetur A G, æqualis H I; ducatur D G, & centro D; ac interuallo D G, describatur peripheria G B, secans A D, in B; factumque erit, quod Porisma iubet; Diuisimus enim laterum aggregatum in duas partes æquales, & à quadrato dimidij, nempè A D, subtraximus quadratum ex A G, hoc est ex H I, & residui latus D G, addidimus ipsi D F, dimidio totius A F & facta est B F, & ab A D dimidio totius A F subtraximus idem residui latus, & facta est A B, Vel addidimus D G, ipsi A D, dimidio totius A F, & fecimus A E &c. Dico laterum aggregatum A F, sectum esse in B, vt petitur; ita vt rectangulum A B F, æquale sit quadrato ex H I.

Recta B D, duplicetur in E, erit E F, æqualis A B; Quoniam igitur recta A D, secta est vtcunque in B, erit quadratum a ex A D, æquale rectangulo bis A B D, vna cum quadratis partium A B, B D; sed quadrato ex A D, æqualia sunt quadrata ex A G, G D; ergo quadrata ex A G, G D, sunt æqualia bis rectangulo A B D, vna cum quadratis ex A B, B D; sed rectangulum bis A B D, æquatur rectangulo A B E; ergo quadrata rectarum A G, G D, æqualia sunt rectangulo A B E, vna cum quadratis, ex A B, B D; at quoniam E F, æqualis est ipsi A B, quadratum ex E F, æquabitur quadrato ex A B; ergo quadrata ex A G, G D, æquabuntur quadrato ex B D, vna cum rectangulo A B E, plus quadrato ex E F; sed rectangulo A B E, plus quadrato ex E F, est æquale rectangulum A B F; ergo quadrata ex A G, G D, æquabuntur quadrato ex B D, vna cum rectangulo A B F; vtrinque auferantur quadrata B D, D G; quadratum ex A G, æquabitur rectangulo A B F; sed quadratum ex A G, ex constructione est æquale quadrato ex H I; atque adeò dato rectangulo; ergo rectangulum A B F, est æquale dato rectangulo; itaque distinximus latera A B, B F; quorum summa data est A F, & rectangulum sub ipsis æquale est dato rectangulo. Quod facere oportebat.

a 4. secundi.

SCHO-

SCHOLION.

Hinc rursus perspicuum fit, qua arte Geometricas effectiones ex Algebra veteri deducere valeamus, & hinc etiam constat omnia Problemata, quæ beneficio veteris resolutionis possunt enodari, posse hac methodo quoque Geometricè resolui. Animaduersio circa veterem Logisticen.

Cæterum Problema etiam hoc modo poterat enunciari.

Datum latus in duas partes diuidere, ita vt rectangulum sub partibus dato plano fit æquale.

Proponatur rursus.

Dato lateri latus adiungere ea lege, vt datum cum adiuncto, ad adiunctum datam habeat rationem. Oportet autem rationem datam esse maioris ad minus. Exemplum III.

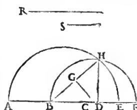
Latus, cui debet fieri additio fit 12; proportio verò maioris ad minus, vt 5, ad 1.

Latus addendū esto 1 R, totum igitur aggregatum ex dato, & addendo erit 12 + 1 R, vt autem est 5 ad 1, ita debet esse 12 + 1 R, ad 1 R; qua propter reuocata proportione ad æqualitatem 12 + 1 R, æquabuntur 5 R, vtrinque auferatur 1 R, & remanebit æquatio huiusmodi 4 R = 12. Diuisione autem instituta fit vnius radicis valor 3, & latus addendum quæsitum. Hinc deducitur.

PORISMA.

Latus, cui fieri debet additio, ducatur in terminum minorem datæ rationis; & productum ad ipsam differentiam terminorum datæ rationis applicetur; nam quotiens erit latus addendum.

Latus, cui fieri debet additio, fit A D; proportio verò fit vt R ad S; latus A D protrahatur ad E, vt D E fit æqualis minori termino datæ rationis, nimirùm S; & E B abscindatur æqualis maiori termino R. Super A E describatur semicirculus A H E, & à puncto D ipsi A E ducatur perpendicularis H D, quæ secet circumferentiam in H; ducatur deinde B H, quæ bifariam diuidatur in G, cui fiat G C perpendicularis; quæ, cum duo anguli C G B, C B G sint minores duobus rectis, rectam A E quidem secabit. Sectio verò sit punctum C, quo centro, & interuallo C B, describatur semicirculus B H F, qui necessariò transibit *a* per H, cum ducta C H sit æqualis C B, & secet B E, protractam in F; & factum erit quod Porisma iubet. Quandoquidem rectangulum sub A D, latere, cui fieri debet additio, & D E, termino minori datæ rationis, æquale est *β* quadrato ex D H; cumque ad B D, differentiam terminorum, & D H, sit adinuenta D F, tertia proportionalis; applicuimus quadratum ex D H, hoc est rectangulum A D E, ad B D, terminorum differentiam; & inuenimus quotientem D F. Dico D F esse latus addendum, ita vt A F sit ad D F, vt R ad S. Quoniam enim quadrato ex D H æquale est, *γ* tàm rectangulum A D E, quàm B D F rectangulum, erit *δ* A D, ad B D, vt est D F, ad D E; atque adeò erit *ε* A D, ad D F, vt B D, ad D E; ergo componendo erit, *ζ* vt A F, ad D F, ita B E, ad D E; sed B E, ad D E est, vt R ad S, immò sunt ipsamet R, & S; ergo erit, vt R ad S, ita A F, ad D F. Quod facere oportebat.



a 4. primi. *β* Corol. 8 sex. & 17. eiusdē. *γ* Corol. 8. sex. & 17. eiusdē. *δ* 16. sex. *ε* 16. quinti. *ζ* 17. quinti.

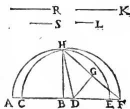
Proponatur.

Datum latus ita diuidere, vt partium quadrata datam rationem habeant. Exemplum IV.

Datum sit latus diuidendum 20, dataque sit proportio, vt 9 ad 1, sumatur quicunque numerus verbi gratia 16, & fiat vt 9, ad 1, ita 16 ad alium nempè $\frac{16}{9}$; sumantur radices quadratæ, & erunt 4, & $\frac{4}{3}$; Modo sit pars vna 1 R, altera erit 20 — 1 R, fiat vt 4 ad $\frac{4}{3}$, ita 1 R ad 20. — 1 R, & reuocata proportione ad æqualitatem $\frac{4}{3}$ R, æquabitur 80 — 4 R, & per Antithesin $\frac{16}{3}$ R æquabitur 80. Diuisis 80, per $\frac{16}{3}$ R, fiet quotiens 15, & 1 R pretium, & pars maior, alia erit 5. Hinc deducitur.

PORISMA.

Vt est terminus primus ad secundum, sic fiat quadratum aliquod ad aliud, deinde latus diuidendum ducatur in latus maioris quadrati, & productum applicetur ad aggregatum laterum ipsorum quadratorum, & orietur pars maior; vnde minor non latebit. Eodem pacto potuisset procedi indagando prius partem minorem.



Ratio data sit, vt R ad S, & vt R ad S, ita fiat quadratum, cuius latus est K, ad aliud, cuius latus est L; deinde recta diuidenda A B, protrahatur ad E, vt B E sit æqualis ipsi K, & super A E, descripto semicirculo A H E, erit recta B H, ex B, ducta perpendicularis ipsi A E, media inter A B, B E. Protrahatur etiam A E ad F, vt E F, sit æqualis ipsi L, & erit B F æqualis ipsarum K, L, aggregato; Ducatur H F, quæ secetur bifariam in G, & ipsi H F, à puncto G, ducatur perpendicularis G D, quæ secabit A F, cum anguli D F G, D G F, sint minores duobus rectis; sitque sectio in puncto D, quo centro, & interuallo D F, describatur semicirculus C H F, qui necessariò transibit per H, cum ducta D H, sit æqualis D F, & factum est quod Porisma iubet; Siquidem, vt terminus primus R, ad terminum secundum S, fecimus quadratum ex K, ad quadratum ex L, & latus diuidendum, putà A B, duximus in B E, hoc est K, latus maioris quadrati, & productũ quad. BH, applicuimus ad BF, aggregatum ipsorum laterum K, & L; Dico A B, sectam esse in C, sic, vt quadratum ex C B, ad quadratum ex A C, sit vt quadratum ex K, ad quadr. ex L, atq; adeò, vt R ad S; Quoniam enim B H, est media proportionalis inter A B, latus diuidendum, & B E, hoc est K, latus maioris quadrati; & inter CB, BF, erit tàm rectangulum A B E, quàm C B F, æquale quadrato ex B H, ergo rectangulum A B E, erit æquale rectangulo C B F; quare vt est A B, ad C B, ita erit B F, ad B E; seu vt C B, ad A B, ita B E, ad B F *, & diuidendo vt C B, ad A C, ita B E, ad E F; & vt EF, ad B E, ita erit A C, ad C B; sed E F, est ad B E, vt L, ad K; ergo vt L, ad K, erit A C, ad C B; & vt quadratum ex L, ad quadratum ex K, ita quadratum ex A C, ad quadratum ex C B; at quadratum ex L, ad quadratum ex K est, vt S, ad R, ergo vt S ad R, ita quadratum A C, ad quadratum C B; ergo vt R ad S, ita quadratum ex C B, ad quadratum ex A C. Quod faciendum erat.

* Breuius & diuidendo, vt C B ad A C, ita BE ad EF; ergo vt quadratum B E ad quadratum EF, seu quadratum K, ad quadratum L, ita quadratum CB ad quadratum A C; sed quadratum K, ad quadratum L, est vt R ad S; ergo vt R ad S, ita quadratum CB, ad quadratum A C.

Posset etiam alio modo huius Problematis resolutio institui.

Pars vna esto 1 R, alia erit 20 — 1 R, vt verò est 9 ad 1, ita debet esse 1 Q ad 400 — 40 R ✠ 1 Q, reuocetur proportio ad æqualitatem, & 1 Q æquabitur 3600 — 360 R ✠ 9 Q, factaque debita reductione 360 R — 8 Q, æquabitur 3600, omnibus diuisis per 8, fiet æquatio huiusmodi 45 R — 1 Q = 450; cuius ℞ est 15; & est vnius radicis valor, & pars maior, vnde minor non latebit. Hinc Porisma deduci potest, vt cuicunque cognoscere licet &c.

Exemplum V. *Datum latus in duas partes diuidere, vt rectangulum sub ipsis æquale sit dato plano.*

SCHOLION.

Hoc Problema non differt ab eo, quod superius resoluimus, nempè Data summa duorum laterum, & rectangulo sub ipsis, reperire latera. Placet nihilominus hic rursus idem resoluere, vt diuersam tamen demonstrationem afferamus.

Datum sit latus diuidendum 16, & planum 48. Pars vna esto 1 R, alia erit 16 — 1 R rectangulum sub his est 16 R — 1 Q, quod æquabitur 48, & explicata æquatione reperiemus partem vnam esse 4, nempè radicis valorem, & alteram esse 12, Hinc verò deducitur.

PORISMA.

A quadrato dimidij lateris diuidendi subtrahatur datum planum, residui verò radix quadrata

quadrata si auferatur à prædicto dimidio remanet 1 R pretium & pars vna; Si verò addatur eidem dimidio fit pars altera.

Latus diuidendum sit A B, linea verò potens planum sit G sumatur dimidium ipsius A B, sitque A D, supra quod constituatur semicirculus A E D, ac in ipso æqualis ipsi G, accommodetur recta A E, agatur D E, & centro D, ac interuallo D E, describatur peripheria E C F, secans A D, in C, & factum est quod Porisma iubet; etenim ex quadrato dimidij A B, nempè ipsius A D, subtractum fuit quadratum ex A E, atque adeò ex G, & residui latus quadratum, nempè D E, ablatum fuit ab ipso dimidio A D, & remansit A C. Dico A C, partem esse minorem; ita vt rectangulum A C B, sit æquale quadrato ex G; Quoniam A B secta est per æqualia in D, & per inæqualia in C, erit rectangulum A C B, vna cum quadrato ex C D, æquale quadrato ex A D, sed quadrato ex A D, æqualia sunt quadrata simul ex A E, E D, ergo rectangulum A C B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadratis ex A E, E D, quare demptis æqualibus quadratis ex E D, C D, remanebit rectangulum A C B, æquale quadrato ex A E, hoc est G, cui recta A E, est æqualis; ergo A B, secta est in C, vt Problema iubet &c.

Datum latus in duas partes diuidere, vt differentia quadratorum partium, datam habeat rationem ad rectangulum sub partibus. Exemplum VI.

Datam sit latus diuidendum 12; & proportio, quam debet habere differentia quadratorum partium ad rectangulum sub ipsis partibus, sit, vt 3, ad 2; Pars vna nempè maior esto 1 R, alia erit 12 — 1 R; Quadrata partium sunt 1 Q, & 144 — 24 R ✠ 1 Q, quorum [differen]tia est 24 R -- 144; vt verò est 3 ad 2, sic debet esse 24 R — 144, ad 12 R -- 1 Q [rectang]ulum sub partibus; Reuocetur proportio ad æqualitatem, 36 R — 3 Q, æquabun[tur 48 R] -- 288, & post debitam reductionem 3 Q ✠ 12 R, æquabuntur 288. Instituatur Para]bolismus; & 1 Q ✠ 4 R, æquabitur 96, explicetur æquatio, & reperietur 1 R, [valere 8] Hinc Porisma &c.

[Quon]iam autem ex hac Analysi deducitur prolixa effectio Geometrica, placet alio modo idem resoluere.

[Pars v]na esto 6 ✠ 1 R, alia erit 6 — 1 R quadrata partium differunt per 24 R, & re[ctangul]um sub partibus est 36 — 1 Q, vt verò est 3 ad 2, ita debent esse 24 R ad 36 -- 1 Q. [Ergo] 48 R, æquabuntur 108 -- 3 Q; vtrinque addantur 3 Q, & erit æquatio 3 Q ✠ [48 R æqualia] 108; Instituatur Parabolismus; & 1 Q ✠ 16 R, æquabitur 36; explicetur æ[quatio &] reperietur 1 R, valere 2, & est dimidia differentia partium; itaque tota diffe[rentia est] 4. Hinc,

PORISMA.

[Si dimidiu]m lateris diuidendi ducatur in terminum secundum datæ rationis, productum verò [diuidatu]r, ad terminum primum. Quotiens autem seruetur; mox quadratum dimidij lateris [diui]dendi addatur quadrato ex dimidio quotientis iam superius seruati; & ab aggregati latere hoc idem dimidium subtrahatur, nam residuum duplum erit differentia partium: vnde partes non latebunt.

Latus sit latum diuidendum A B, in tales partes, vt Problema postulat. Proportio data sit, vt Q, ad R, producatur B A, ad M, ita vt A M, sit æqualis ipsi Q, sumaturque A H, æqualis ipsi R; ad partes B, producatur A B, ad D; vt B D, sit æqualis ipsi A B, & B D, describatur peripheria H N D, agaturque perpendicularis A N, & à puncto N, ducatur N M, quæ bifariam secetur in O, & ad angulos rectos ducatur O I, & centro I, ac interuallo I M, describatur peripheria M N C,

quæ necessario transibit per N, mox verò diuidatur A C, in G, bifariam, & producatur N A, ad E, vt A E; sit æqualis ipsi A T, nempè dimidio lateris diuidendi, agaturq; E G, & centro G, interuallo G E, describatur peripheria E P, & eodem centro fiat circulus A X C, sumaturq; A L æqualis ipsi P A cuius dupla sit A k, & reliqua k B, secetur bifar. in S, & factũ est, quod Porisma iubet; latus enim A D, duplum lateris diuidendi A B, duximus in terminum secundum R, nempè H A, & productum quad. ex A N, applicauimus ad M A, atq; adeò ad terminum primum Q. Quotiens autem emergens A C, diuisus est bifariam in G, & ad eius quad. additum est quadratum ex A E, seu ex A T, dimidio lateris diuidendi, & ab aggregati latere E G, nempè P G, subtractum est dimidium illud A G, & residui dupla facta est A K, reliqua magnitudo k B, secta est bifariam in S; itaque partium A S, S B, erit differentia A K; Dico latus A B, sectum esse in S, vt Problema postulat; ita vt differentia quadratorum partium A S, S B, sit ad rectangulum sub eisdem partibus, vt Q ad R, seu, vt M A, ad H A; Quoniam G P, G E, sunt æquales, vt etiam G A, G V, erunt P A, E V, æquales; at verò A C est æqualis ipsi V X; erit proindè C A P, rectangulum, æquale rectangulo X V E, & insuper C P A, æquale erit ipsi X E V; sed rectangulum X E V, est æquale quadrato ex A E, erit itaque huic æquale rectangulum C P A; cum ergo rectangulum C P A, seu quod idem est, quadratum ex A L, plus rectangnlo C A L, sit æquale quadrato ex A E; proinde solidum factum sub M A, & quadrato ex A L, vna cum solido comprehenso sub M A, & rectangulo P A C, seu C A L, æquale erit solido facto sub M A, & quadrato ex A E; seu A T, atque adeò solidum factum sub C A L, & M A, erit æquale solido facto sub M A, & quadrato ex A T; minus solido comprehenso sub M A, & quadrato ex A L; sed eidem solido sub C A L, & M A, æquale est solidum comprehensum, sub D A L, & H A, ergo solidum comprehensum, sub M A, & quadrato ex A T, minus solido sub quadrato ex A L, & eadem M A, erit æquale solido contento sub D A L, & H A; Quamobrem, vt est M A, ad H A, ita erit D A L, seu quod idem est B A K, ad quadratum ex A T; minus quadrato ex A L; at verò rectangulum B A K, est æquale differentiæ quadratorum partium A S, S B, & quadratum ex A T, minus quadrato ex A L, æquale est rectangulo A S B, sub ipsis partibus; ergo, vt M A, ad H A, ita est differentia quadratorum ex partibus A S, S B, ad rectangulum sub eisdem partibus; Sectum est ergo latus A B in S, vt Problemata iubet. Quod faciendum erat.

apud Auctor. Li. de analysi problematum.

SCHOLION.

Animaduersio circa superiorem resolutionem.

Non me latet fore, vt aliquis hanc respuat demonstrationem, quod nimirùm per solidorum comparationem procedat, vt inuestiget, ostendatque proportionem in quatuor illis terminis; Verum hic Aristarchus aduertat in demonstratione solùm attendendam esse veritatem; licet enim in demonstrationibus claritas in minimis haberi non debeat; nihilominus subobscura, verissima tamen, parui facienda non sunt, quales profectò sunt ista, quæ comparationem solidorum innoluunt; sunt enim in Geometria minus vsitatæ quidem, cum hac scientia in planorum contemplatione sit occupata, Stereometria solidorum considerationem relinquens; non ob id ergo, quod hæ sint subobscuræ, de medio tollendæ sunt; sed potiùs cum per rationem procedant, quod caput est, non mediocriter ipsas debemus commendare &c.

Potest nihilominus eiusdem Problematis Analysis institui, cuius vestigijs repetitis Synthesis conficiatur sine processu per solidorum æqualitatem. Analysis autem ea est, quam superiùs perspecies attulimus; nunc autem altera illi consimilis, siue potius eadem numeris exhiberi posset.

Proponatur.

Exemplum VII.

Dato vno ex lateribus tranguli angulum rectum ambientibus, datoque alterno baseos segmento, reperire triangulum.

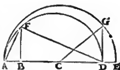
Datum sit vnum ex lateribus circa rectum 15, alterum verò baseos segmentum sit 16. Dico segmentum alterum baseos esse 1 R; tota itaque basis erit 16 ✠ 1 R; erunt autem proportionales 16 ✠ 1 R. 15. 1 R, atque adeò 16 R ✠ 1 Q æquabuntur 225; Quamobrem extrahatur huius æquationis radix, quæ reperietur 9; erit igitur segmentum alterum 9; propterea quod numerus radicum est 8, cuius quadratum 64, additum 225 numero absoluto facit 289; cuius radix quadrata est 17, à qua, si dematur 8 dimidium numeri radicum, remanet 9. Hinc.

P Q.

PORISMA.

Quadratum ex dimidio alterni baseos segmenti dati, addatur quadrato ex latere dato circa rectum; aggregati enim latus multatum dimidio ipsius segmenti dati, exhibebit segmentum alterum.

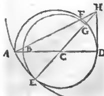
Datum sit D G, vnum ex lateribus, circa rectum; sitque B D, alternum baseos segmentum; oporteat reperire triangulum; Super B D, excitetur D G, ad rectos angulos; diuidaturque B D, bifariam in C, centro C, interuallo C G, ducta nimirum à C, ad G, describatur semicirculus A G E, secans B D, vtrinque productam in A, & E; Deinde super A D semicirculus describatur, excitetur B F, perpendicularis, & agatur A F, & ducatur F D; & factum erit quod Porisma iubet. Dico triangulum A F D, esse quod quæritur; est enim triangulum A F D, rectangulum, cum habeat angulum A F D, in semicirculo; & quia F B, perpendicularis est ad A D, erit B D, alternum segmentum ad latus A F, est autem B D, id quod datur segmentum alternum, aliud segmentum verò est A B; superest ostendendum latus A F, esse æquale dato lateri D G; Quoniam enim rectangulum A D E, æquale est quadrato D G; erunt proportionales A D, D G, D E, ita vt D G, sit media inter A D, D E; at verò rectangulum A D E, est æquale rectangulo D A B; siquidem A B, D E, sunt æquales; nam C A, C E, sunt æquales; Itemque C B, C D, ergo A B, D E, erunt æquales; eadem est autem A D, ac B E; sed rectangulum A D E, est æquale quadrato ex D G; vt & rectangulum D A B, æquale est quadrato A F, ergo quadratum ex A F, æquale erit quadrato ex D G, ergo rectæ A F, D G, erunt æquales; igitur constructum est triangulum rectangulum, in quo latus vnum circa rectum est datum D G; & datum alternum baseos segmentum B D; Quod facere oportebat.



Posset etiam institui constructio hunc in modum. Datum sit alternum segmentum G F, sitque datum vnum ex lateribus circa rectum F A; constituatur F A super G F, ad rectos angulos in puncto F; seceturque G F, bifariam in C, ducatur autem A C; & centro quidem C, interuallo C G, vel C F, describatur circulus, secans C A, in D, & productam secet in B; factum erit autem quod Porisma iubet. Super A B, describatur semicirculus B E A, & agatur D E, perpendicularis, iunganturque B E, E A, & factum erit triangulum quod quæritur, nimirum B E A. Nam angulus B E A, est rectus, quod in semicirculo fit; & quia E D, est perpendicularis, erit B D, segmentum vnum, nempè datum, aliud verò D A. Superest, vt ostendamus A E, æqualem esse rectæ F A. Quoniam enim F A, tangit circulum in F, rectangulum B A D, æquale est quadrato F A; erit F A, media inter B A, & D A, media quoque est E A; ergo F A, est æqualis E A.



Aliter etiam institui potest constructio, scilicet hunc in modum. Datum sit alternum segmentum baseos B D, sitque D H, latus vnum circa rectum; inclinetur autem D H, super B D, ad rectos angulos, ad punctum nimirum D: Diuidatur verò B D, bifariam in C, & centro C describatur circulus B G D E; agatur H E transiens per punctum C; fiat centro H, interuallo H E, arcus secans D B, protractam in A, agatur A H, & super A D, describatur semicirculus A F D, secans A H, in F. Dico triangulum A D H, esse quæsitum; angulus enim A D H, est rectus; estque D H, latus circa rectum datum: est etiam A F, segmentum alternum, cum D F, sit perpendicularis ad A H; reliquum est, vt ostendamus A F, æqualem esse ipsi B D. Quoniam E H G, est rectangulum æquale quadrato ex D H; ergo media erit D H, inter E H, H G; sed eadem



In schemate intelligatur ducta F D.

dem media est inter A H, & H F, & A H, æqualis est ex constructione ipsi H E, ergo F H, æquabitur H G, ergo A F, E G, hoc est A F, B D, æquales erunt, repertum est igitur triangulum &c. Quod facere oportebat.

Proponatur.

Exemplum VIII. *Propositum latus bis diuidere in duas partes ea lege, vt maior pars à prima diuisione, sit ad minorem è secunda in ratione data: at verò maior è secunda diuisione ad minorem è prima sit in ratione pariter data.*

Hoc supra solutum est pag. 464.

Datus sit numerus 130 diuidendus &c. sit autem maior è prima diuisione, ad minorem è secunda in ratione tripla; sed maior, è secunda, ad minorem è prima in ratione quadrupla.

Minor è secunda diuisione sit 1 R, ergo maior è prima erit 3 R; ob id minor è prima habebitur subtrahendo hanc partem à 130; & erit 130 — 3 R; ad hanc autem cum maior è secunda; debeat esse quadrupla, ob id erit 520 -- 12 R maior, è secunda; oportet autem ambas partes, è secunda diuisione conficere 130; numerum datum diuidendum; sed efficiunt 520 — 11 R, ergo 520 — 11 R, æquabuntur 130. vtrinque addatur deffectus, & fiet æquatio 520 = 130 + 11 R, vtrinque auferantur 130, && remanebit æquatio 11 R = 390; diuisione instituta fiet 1 R, pretium $35\frac{5}{11}$.

Pars posita 1 R, erit $35\frac{5}{11}$; quæ posita est 3 R, erit $106\frac{4}{11}$. at quæ ponebatur 520 -- 12 R, erit $94\frac{6}{11}$; & satisfaciunt Problemati.

Nam $106\frac{4}{11}$ maior pars è prima diuisione ad $35\frac{5}{11}$ minorem partem è secunda est in ratione tripla. At verò $94\frac{6}{11}$ maior è secunda, ad $23\frac{7}{11}$ minorem è prima est in ratione quadrupla.

Hinc,

PORISMA.

Denominator vtriusque rationis, vnitate multatus, ducatur sigillatim in datum numerum, & producti numeri diuidantur seorsim per numerum, qui fit ex mutua multiplicatione denominatorum vnitate multatum, & orientur partes minores vtriusque diuisionis.

Lemma.

Si sint quatuor termini proportionales; vt est primus ad secundum, ita differentia primi, & tertij, ad differentiam extremorum, minus differentia inter primum, & secundum &c.

Hoc supra demonstratum est. Secunda enim pars inseruit, conuertendo, &c. vt ibi &c.

Latus diuidendum sit A D; proportiones autem, vt R ad S, & vt T ad S; protrahatur A D, ad E, ita vt D E, sit æqualis differentiæ duorum terminorum S, & R; & inter A D, D E, media reperiatur D L; deinde protracta A D, ad F, vt D F, sit æqualis differentiæ duorum terminorum S & T; at verò inter A D, & D F, reperiatur media D K mox, vt

T R S A B C D E F G H I O K L M N

S, ad T, ita fiat R ad aliam D O à qua abscindatur I O, æqualis minori termino S; & ad residuum D I applicetur quadratum ex D L, & etiam ex D K; nempe ducatur L I, quæ bifariam

bifariam fecetur in N, & hinc ad rectos angulos ducatur N H; item ducatur K I, quæ bifariam fecetur in M, & hinc ad angulos rectos ducatur M G &c. & centris H, G, interuallis autem H I, G I, describantur femicirculi I L C, & I K B; qui neceffario tranfibunt per puncta L, K; vt fæpè dictum eft; & factum erit quod Porifma iubet. Dico latus A D, fectum effe in duobus punctis B, C, quemadmodum Problema requirit. Adeò vt A C, fit ad B D, vt R ad S, & A B, ad C D, vt T ad S; Quoniam enim C D I, rectangulum eft æquale quadrato ex D L; & eidem æquale eft rectangulum A D E, ergo rectangulum C D I æquabitur rectangulo A D E; ergo vt D I, ad A D, ita D E, ad C D, & permutando, vt D I, ad D E, ita A D, ad C D, & diuidendo, vt I E, ad E D, ita A C, ad C D, atque adeò a vt I E, ad D F, ita A C, ad B D, fed I E, ad D F, eft vt R ad S; ergo vt R, ad S, ita erit A C, ad B D, Non aliter oftendemus effe A B, ad C D, vt eft T, ad S. a Ex Elementis.

Quod autem I E, fit ad D F, vt R ad S, oftenditur ex eo quia, vt eft S, ad T, ita facta fuit R, ad D O; At verò differentia inter S, & D O, facta eft D I, à qua fubtracta eft D E, differentia inter R, & S, & relinquitur E I, vt fit ad D F differentiam duorum terminorum S, & T, vt R ad S; Quod docuit præmiffum Lemma; ex quo liquet etiam I F, effe ad DE, atque adeò A B, ad C D, vt T, ad S.

Datum latus in duas partes diuidere; vt fi rectangulo fub partibus addatur planum datum aggregatum ipfum æquale fit quadrato partis maioris. Oportet autem datum planum minus effe quadrato lateris diuidendi. Exemplum IX.

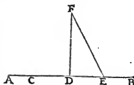
Datum fit latus diuidendum 12; ea lege, vt fi producto fub partibus addatur 80, fiat quadratum partis maioris,

Pars vna efto 1 R, nempè maior; minor autem erit 12 -- 1 R; Si ducatur 12 -- 1 R, in 1 R, fit 12 R -- 1 Q, huic autem producto fi addatur 80, fit 12 R -- 1 Q + 80, & hoc æquale debet effe quadrato partis maioris, & ordinata æquatione fiet 1 Q -- 6 R = 40. Dimidium numeri radicum eft 3, cuius quadratum fi addatur 40, fit 49 cuius radix quadrata eft 7, cui fi addatur 3, dimidium numeri radicum fit 10; Hinc,

PORISMA.

Sumatur dimidium dati plani; & ei addatur quadratum quartæ partis lateris diuidendi, mox autem, fi huius aggregati lateri addatur dimidium numeri radicum, feu quod idem eft, quarta pars lateris diuidendi habebitur pars maior; vndè minor non latebit,

Datum fit latus A B diuidendum, & recta D F, poffit dimidium dati plani &c, Diuidatur D B, bifariam in E, hoc modo E B, erit quarta pars totius A B; ad punctum D, fit excitata perpendicularis F D; agatur E F, & centro E, interuallo E F, defcribatur circulus fecans A B, in C; Et factum erit quod Porifma iubet. Dico A B fectam effe in C, prout Problema requirit nempè, vt rectangulum A C B, plus duplo quadrato ex D F, atque adeò plus dato plano, æquale fit quadrato maioris fegmenti C B; Quoniam enim D B, fecta eft bifariam in E, & ei addita eft C D, erit rectangulum B C D, vna cum quadrato ex D E, æquale quadrato ex C E, hoc eft ex F E, hoc eft quadratis ex D F, D E; ablato communi quadrato ex D E remanebit rect angulum B C D, æquale quadrato ex D F, atque adeò quadratum ex C B, minus rectangulo C B D, æquale erit quadrato ex D F, ergo duplum quadratum ex C B, minus duplo rectangulo C B D, æquabitur duplo quadrato ex D F; ac proinde dato plano, cuius dimidium poteft recta D F; quamobrem duplum quadrati ex C B, æquabitur duplo rectangulo C B D; hoc eft rectangulo A B C, plus duplo quadrato ex D F; ergo quadratum ex C B, æquabitur rectangulo A B C, plus duplo quadrato ex D F, minus quadrato ex C B; eft autem rectangulum A B C, minus quadrato ex C B, idem quod rectangulum A C B; ergo quadratum ex C B æquatur rectangulo A C B, plus duplo quadrato ex DF, feu plus dato plano. Sectum eft ergo latus A B, quemadmodum imperatur.



Datum latus in duas partes diuidere ea lege, vt quadratum vnius partis æquale fit quadrato alterius, plus dato plano. Exemplum X.

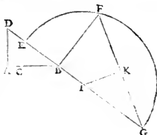
Datum

Datum sit latus diuidendum 12; ita vt quadratum partis maioris, æquale sit quadrato minoris partis, plus 96.

Pars vna esto 1 R, alia erit 12 — 1 R; quadratum illius est 1 Q; at verò quadratum alterius partis; nempè minoris 12 — 1 R, est 144 — 24 R + 1 Q, cui si addatur 96, fit 240 — 24 R + 1 Q, huic autem est æquale 1 Q, nempè quadratum partis maioris, & ordinata æquatione fiet æquatio 24 R = 240; diuisione instituta fit 1 R, pretium 10; Itaque pars vna erit 10, alia ex necessitate erit 2. Hinc.

PORISMA.

Quadrato ex latere diuidendo, addatur planum datum, & aggregatum applicetur ad duplum ipsius lateris diuidendi; sic enim orietur pars maior.



Datum sit latus diuidendum A B; sitque A D, quæ possit planum datum; Hæc porrò constituatur ad punctum A, faciens angulum rectum D A B, agaturque B D, cui quidem fiat æqualis B F, excitata ad rectos angulos in puncto B, mox autem protrahatur D B, vsque ad G; adeò vt B G sit dupla dati lateris diuidendi A B; ducatur F G, quæ bifariam secetur in K, & agatur K I, ad rectos angulos insistens ipsi F G; modo centro I, interuallo autem I G describatur circulus, qui necessariò transibit per F, & secabit B D, in E; ipsi autem B E, fiat æqualis B C. Dico A B, sectam esse in C, quemadmodum Problema requirit. Quoniam enim rectangulum G B E, æquale est quadrato ex B F, seu ex B D, hoc est quadratis ex A B, A D; vtrinque addito quadrato ex E B, seu ex C B; erit quadratum ex E B, seu ex C B, vna cum rectangulo E B G, æquale quadratis ex D A, A B, vna cum quadrato ex E B, vel C B; si verò vtrinque auferatur rectangulum E B G, erit quadratum ex C B (non est cur amplius fiat mentio de quadrato ex E B) æquale quadrato ex A D, plus quadratis ex A B, C B, minus rectangulo E B G; sed quadratum ex A B, plus quadrato ex C B, minus duplo rectangulo A B C, quod est æquale simplo E B G, cum B G, dupla sit ipsius A B, æquale est quadrato ex A C; ergo quadratum ex A C; plus quadrato ex A D, æquale est quadrato ex C B. Sectum est ergo latus datum A B in puncto, quemadmodum Problema requirit.

Secabit autem, vt facile ostendi potest.

Auctor ostendit haud bene plerosque Analystas existimasse Problemata nonnulla sub Algebram non cadere. Caput XII.

Immeritò putarunt aliqui nonnulla Problemata sub Algebram non cadere.

Problemata, quæ per angulorum comparationem demonstrantur, possunt ad genus Problematum reuocari huiusmodi, vt sub Algebram cadant.

Angulus est heterogeneus lineis, &c.

Hac de re tractandum rursus erit exquisitiùs in Problematum Analysi.

Nonnulli Analystæ credidere quædam Problemata sub Algebram non cadere, qualia sunt illa, quæ per angulorum comparationem demonstrantur; adeò vt huius artis præsidio problemata supradicta resoluere nequeamus. Decipiuntur tamen, quatenus mihi licet animo complecti; quandoquidem, etsi huiusmodi Problemata per se eo modo vsurpata, quo proferuntur, & enunciantur, nequeant resolui, neque componi noua resoluendi ratione, sed antiquam potius Analyseos, & Syntheseos methodum requirant: nihilominus si res diligentiùs perpendatur, quodcunque Problema ad talem reuocabitur naturam, quæ neque nouam Analysin, neque Synthesin respuat. Vt si detur angulus alicuius trianguli, ad angulorum comparationem euitandam recta linea substitui debet, quæ quidem eiusdem anguli vicem gerat; quandoquidem, quicquid Algebra inquirit, vt plurimum æqualitatis ope id facit; æqualitas verò inter homogenea versatur; siquidem, vt supra docuimus, non potest comparatio inter heterogenea institui, hoc est inter ea, quæ natura differunt; manifestum est autem, angulum esse lineis heterogeneum; ob id hæ magnitudines heterogeneæ debent in homogeneas conuerti. Vt quia angulus minimè in æquatione comparari potest lineæ rectæ, vtpotè heterogeneæ; proinde beneficio eiusdem anguli

repertu

reperiri debet recta linea quæ in æquatione ipsius munere fungatur eiusdemque vicemgerat. Fateor tamen multum laboris in huius generis æquationibus requiri; siquidem in his non exigua quidem ad inquirendam veritatem περιεργία est opus, huius autem generis Analysin paulò breuius explicuimus, ita vt potius videamur Analyseos πρόχειρον attulisse, quàm exactam explicationem; Verum enim verò in Problematum Analyseos doctrina omnia hæc nos accuratè tractabimus. Interim hic Lectorem monitum volumus, ne sibi persuadeat, quod alij credidere, huius generis Problemata sub Algebram non cadere; idque vt hic aliquo modo constet aliquibus exemplis confirmare tentabimus.

Igitur vt ostendamus non bene à quibusdã aliqua Problemata, in eorũ genere collocata fuisse, ad quorum solutionem Analystarum industria non conducat. Iuuabit hic Exempla, quædam in medium afferre, ex quibus facile quisque poterit intelligere nulla ratione quidem eos in hanc sententiam abijsse. Primum autem, vnum, vel alterum afferemus Problema, de quibus etiam alij, in hunc eundem finem, attulerunt.

PROBLEMA.

Datum Triangulum, per rectam à puncto extra Triangulum datum eductam; data ratione diuidere. Exemplum I.

Datum sit triangulum A B C; punctumque datum extra illud sit I. Ratio verò data sit vt A E, ad E C. Oporteat diuidere triangulum A B C, in duas partes, per rectam lineam ductam ex puncto I; ita vt sit portio A K F, ad portionem K B C F, in ratione, vt A E, ad E C. Ex puncto I ducatur I G parallela rectæ A B, Ipsa verò A B protrahatur donec in L, occurrat rectæ I L, quæ ducta sit parallela ipsi A C; protrahatur autem C A, vsque ad G, & fiat vt A L, ad A B, ita A E, ad A D; ducaturque D L.

Supponamus rectam A L, vel G I esse b; & segmentum A D esse d; at verò G A esse f.

Recta A F esto a. Si triangulum igitur A F K foret æquale triangulo A D L, vel A E B, certè foret, vt A F, ad A D, ita A L, ad A K. Hæc eadem proportio per species erit explicanda; vnde fiet Analogismus huiusmodi, vt a, ad d, ita b ad $\frac{bd}{a}$. Et quoniam est; vt G F, ad G I, ita A F, ad A K; proinde erit, vt $a + f$, ad b, ita a ad $\frac{ba}{a+f}$; quamobrem eadem A K erit $\frac{bd}{a}$, & $\frac{ba}{a+f}$; quamobrem fiet æquatio $\frac{bd}{a} = \frac{ba}{a+f}$. Instituto parabolismo fiet æquatio $\frac{d}{a} = \frac{a}{a+f}$. Reuocata autem fratione, per Isomœriam, ad integras magnitudines fiet æquatio $da + df = a^2$, & per antithesin $a^2 - da = df$; quæ quidem æquatio facile quidem explicabitur, vel per radicis extractionem, vel per analogismum.

Primo modo proueniet radicis valor $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + df)}$ & hinc deduci posset.

PORISMA.

Ad quadratum ex dimidio coefficientis addito comparationis homogeneo, fit aggregatum, cuius latus quadratum additum dimidio coefficientis, exhibet radicis pretium.

Si per analogismum. hic erit $a - d$. $\sqrt{(df)}$. a.

PORISMA.

Inter G A, & A D media quadam proportionalis inueniatur H, hac igitur habita; tanquam media proportionali & A D tanquam differentia extremarum, reperiatur A F maior extrema. Hæc enim erit radicis valor.

Operando igitur iuxta secundum Porisma; Quoniam factum est, vt A F, minus A D, ad H; ita H ad A F; erit quadratum H æquale quadrato A F, minus rectangulo sub A D, & A F. At verò quadratum H, ex constructione æquale est rectangulo G A D; ergo rectangulum G A D æquale erit quadrato A F; minus rectangulo sub A D, & A F; ergo rectangulum G A D, plus rectangulo D A F, æquale erit quadrato A F; quamobrem re-

ctangulum sub A D, & G F æquale erit quadrato A F; quare, vt G F, ad A F, ita A F, ad A D; sed vt G F, ad A F, ita G I, ad A K, ergo vt A F, ad A D, ita G I, vel A L, ad A K proinde triangulum A F K æquale erit triangulo A D L. Sed triangulum A D L æquale est triangulo A E B (fecimus enim, vt A L, ad A B, ita A E, ad A D) ergo triangulum A F K æquale erit triangulo A E B, & quia triangulum A B E, vna cum triangulo B E C æquale est triangulo A B C, & eidem triangulo A B C, æquale est triangulum A K F, vna cum trapetio K F C B, ergo triangulum A E B, plus triangulo B E C æquabitur triangulo A K F, vna cum trapetio K F C B; sed ostensum superius est triangulum A K F, æquale triangulo A B E, ergo trapetium K F C B, æquabitur triangulo B E C; sed triangulum A B E, ad triangulum B E C est vt A F ad E C; ergo triangulum A k F, ad trapetium KFCB erit vt A E ad E C, quod oportebat &c.

PROBLEMA.

Exemplum II. *Datum Triangulum per punctum intra datum, data ratione diuidere.*

Sit triangulum A B C; punctumque datum sit D, ratio data sit vt A I, ad I B, & oporteat facere vt triangulum A K L, ad trapetium L K B C, sit in ratione A I ad I B. Ducatur D G, parallela rectæ C A; & D F, parallela rectæ A G, deinde fiat, vt A F, ad A C ita A I ad A E; erit enim triangulum A E F æquale triangulo A I C; agantur C I; F E, & quidem A E, dicatur b; & A G sit f, item A F, vel G D sit d, supponamus triangulum A K L, æquale triangulo A E F, vel A I C, & A K esto a; cum sit vt A K ad A E, ita A F ad A L, erit vt a ad b ita d ad $\frac{bd}{a}$, quare A L erit $\frac{bd}{a}$ est autem vt G K ad G D, ita A K ad A L; ob id vt a — f, ad d, ita a, ad $\frac{da}{a-f}$; quare A L erit $\frac{da}{a-f}$; sed erat $\frac{bd}{a}$, ergo $\frac{bd}{a}$, æquabitur $\frac{da}{a-f}$, ergo facto parabolismo $\frac{b}{a}$ æquabitur $\frac{a}{a-f}$, & per isomoeriam b a — b f æquabitur a^2, & per antithesin b a æquabitur a^2 ✱ b f & rursus b a — a^2 æquabitur b f, ergo fiet analogismus b — a. ℞ b f. a. Hinc.

PORISMA.

Reperiatur recta media proportionalis inter A E, & A G, quæ sit H, & hac, tanquam media è tribus proportionalibus, è quibus aggregatum extremarum sit A E, reperiantur extrema, nam maior, vel extrema A K erit lateris valor, siue pretium.

Fiat H media proportionalis inter A E, A G, atque adeò quadratum H, æquale sit rectangulo E A G, deinde vt A E, minus A K ad H ita H ad A K; agatur K D L.

Quoniam igitur A E, minus A K, est ad H, vt H, ad A K; ergo rectangulum A K, in A E, minus quadrato A K, æquabitur quadrato H. Sed rectangulum ex A E in A G æquale erat quadrato H; ergo rectangulum sub A K, & A E, minus quadrato A K æquabitur rectangulo sub A E, & A G; & per antithesin rectangulum sub A K, & A E, æquabitur rectangulo sub A E, & A G, plus quadrato A K; ergo rectangulum sub A E in A K, minus rectangulo ex A E in G A, æquabitur quadrato A K; ergo rectangulum sub G K, & A E, æquabitur quadrato A K; ergo vt G K, ad A K, ita A K, ad A E; sed vt G K, ad A K, ita G D ad A L; ergo vt A K ad A E, ita G D, vel A F, ad A L; ergo triangulum A K L, æquabitur triangulo A E F; at triangulum A E F, æquale est triangulo A I C; ergo triangulum A k L æquabitur triangulo A I C. Et quia triangulum A C I, vna cum triangulo C I B æquale est triangulo A C B, & eidem triangulo A C B, æquale est triangulum A K L, plus trapetio L K B C; ergo triangulum A K L, plus trapetio L K B C æquabitur triangulo A I C, plus triangulo C I B; sed ostensum est triangulum A K L, æquale triangulo A I C; ergo trapetium L k B C, æquabitur triangulo I B C. Sed triangulum A I C, ad triangulum I B C, est vt A I, ad I B; ergo triangulum A k L, ad trapetium L K B C, erit, vt A I, ad I B. Quod oportebat &c.

PROBLEMA.

Exemplum III. *Data base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.*

Pro-

Problema istud beneficio speciosæ logistices soluit etiam Herigonius, sequenti operatione. Solutio sic se habet. Sit Triangulum iam factum N C M. Protrahatur minus latus C M, & centro C, interuallo, quod sit æquale B dimidio rectæ, quæ sit laterum aggregatum, secentur C E, C L ducaturque L E. Laterum aggregatum sit 2 b, ita vt eius dimidium sit b, erunt igitur C L, C E, b inter se æquales, cadat ex N perpendicularis N T, super L T, & insuper ex M cadat M Q perpendicularis itidem, ad L T. At ex L excitata sit L P, ductaque M P, quæ sit parallela ipsi T L. Facilè demonstrabimus N T æqualem esse Q M, & T E æqualem Q L; insuper T R æqualem R Q, & N R æqualem R M; atque T Q æqualem E L. Est autem f, vel R Q æqualis dimidio baseos E L. Recta Q M esto a. Dimidia N M sit d.

Quoniam igitur d, æqualis est dimidio ipsius N M, & propterea æqualis est R M, & est f æqualis R Q; propterea $a^2 + f^2$ æquabitur d^2. Quamobrem a^2 æquabitur $d^2 - f^2$; quare & a æquabitur ℞ $(d^2 - f^2)$ Oportet autem 2 d, non esse minorem recta E L.

Protrahatur C E fiat autem quad. L P æquale quad. D, minus quad. F, ducaturq; P M parallela ipsi E L, & fiat E N, æqualis L M, ducatur M N. Dico triangulum N C M Problemati satisfacere, adeò vt aggregatum ex N C, C M &c. Quoniã igitur E N æqualis est L M, erit N C, plus C M æqualis E C, plus C L; est autem per constructionem 2 B æqualis E C plus C L; propterea N C, plus C M, æqualis erit 2 B. Est vero Q M æqualis L P, vt & R Q æqualis F; propterea quadratum L P, vel Q M, vna cum quadrato F, vel R Q æquale erit quadrato D, sed quadratum Q M plus quadrato R Q æquale est quadrato R M; propterea quadratum R M æquabitur quadrato D, atque adeò R M æquabitur D. Quare, & N M, quæ dupla est ipsius R M æqualis erit 2 D.

Ad superiorem Analysin instituendam, quamuis operosa præparatio, commendabilis tamen est. Cæterum ostendemus Problema cadere etiam posse sub speciosæ Ligistices artificium, si præter dictum angulum ad verticem, alterum quoque angulum datum supponemus ad puncto A.

PROBLEMA.

Iisdem datis, & angulo ad A, reperire Triangulum. Exemplum IV.

Sit igitur triangulum iam factum A B C, & centro B, interuallo B C, descripto circulo; protrahatur A B, ad E ductaque D E; Dato angulo A B C, datur C B E, reliquus ad duos rectos, quare, & eius dimidium C D E, vnde, & A D E reliquus ad duos rectos.

In figura igitur resolutionis super A E laterum aggregatum datum in descripto circuli segmento, quod capiat angulum æqualem cognito angulo A D E; accomodetur, in angulo E A D, recta A D, protracta ad C, vt A C, sit basi datæ æqualis, ex C super A E cadat perpendicularis C F. Oportet diuidere A E in B, ita vt quad. segmẽti B E æquale sit quadrato intercepti segmenti B F, vna cum quadrato perpendicularis C F. Segmentum F E sit f, perpendicularis C F sit g. Segmentum B F esto a ergo B E erit $a + f$; huius quadratum est $a^2 + 2fa + f^2$, quod æquabitur $a^2 + g^2$; & per antithesin fiet æquatio huiusmodi $2fa = g^2 - f^2$. Reuocata æquatione, ad analogiam, fiet huiusmodi analogismus.

2 f ℞ $(g^2 - f^2)$ a Hinc.

PORISMA.

Vt 2 f ad latus quod potest differentiam quadratorum, quorum vnum est g^2, aliud verò f^2, ita huiusmodi latus, ad aliud hoc enim erit radicis pretium, & interceptum segmentum B F.

PROBLEMA.

Exemplum V. *Dato vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus; datoque aggregato reliqui lateris, & baseos, inuenire triangulum.*

Vel angulus verticis est rectus, vel obtusus, vel aecutus; in primo casu res facilis est: vnde primò sit obtusus.

Datum sit A B vnum è lateribus trianguli obtusum angulum verticis ambientibus; aggregatum verò ex reliquo latere, & basi sit z; angulus ad verticem datus sit C; oporteat reperire triangulum. Fiat E B æqualis z; inflectantur autem E B, A B, ita vt angulus E B A æqualis sit angulo C; protrahatur E B, ad partes B; & in protractam cadat AD, ad rectos angulos in D. Hac autem præparatione eò deducta res est, vt diuidatur E B, in puncto F, ita vt quadratum ex parte D F, vna cum quadrato perpendicularis A D, æquale sit quadrato reliquæ partis E F.

Ad instituendam Analysin recta ED sit b, perpendicularis autem AD sit d. Oportet igitur diuidere b, in duas partes, vt dictum est. Pars vna esto a; nimirùm illa, quæ basi debet esse æqualis; pars altera erit $b - a$. Quadratum istius est $b^2 - 2ba + a^2$; quadratum perpendicularis erit d^2, quadratum ipsius $b - a$ erat $b^2 - 2ba + a^2$, quo addito, ad d^2, fiet $d^2 + b^2 - 2ba + a^2$; quod æquari debet a^2; nimirùm quadrato alterius partis ipsius b; & per antithesin fiet æquatio $2ba = d^2 + b^2$. Reuocata autem æquatione ad analogiam, fiet analogismus huiusmodi, vt $2b$, ad $\mathrm{R}(d^2 + b^2)$ ita $\mathrm{R}(d^2 + b^2)$, ad a & erunt proportionalia.

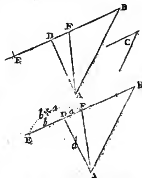
$$2b \qquad \mathrm{R}(d^2 + b^2) \qquad a$$

Hinc deducetur Porisma.

PORISMA.

Fiat vt 2 b, ad latus, quod potest aggregatum quadratorum ex d, & b, ita huiusmodi latus ad aliud; nam illud erit basis quæsita.

Si verò angulus verticis fuerit acutus, aliter procedendum est. Datum sit igitur latus A B, aggregatum verò reliqui lateris, & baseos sit B E; angulus datus, ad verticem sit æqualis C. Inflectantur A B, E B, ad punctum B, ita vt contineant angulum E B A æqualem angulo C, ex puncto A super E B cadat A D, ad rectos angulos. Diuidendum est igitur segmentum D B in puncto F, ita vt quadratum ex E F æquale sit aggregato quadratorum A D, D F.

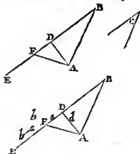


Segmentum E D, sit b, & A D sit d; excessus autem D F esto a, tota igitur E F erit $b + a$; & hæc erit Trianguli basis quæsita. Quadratum ipsius $b + a$ est $b^2 + 2ba + a^2$. Quadratum verò ex a est a^2, cui addito quadrato ex d, nempe d^2, fiet $a^2 + d^2$, cui æquabitur $b^2 + 2ba + a^2$; & per antithesin fiet æquatio $b^2 + 2ba = d^2$; & rursus $2ba = d^2 \backsim b^2$; æquatione autem ad analogiam reuocata, fiet analogismus $2b \quad \mathrm{R}(d^2 \backsim b^2) \quad a$ Hinc,

PO-

PORISMA.

Vt est 2 b, ad latus quod potest differentiam quadratorum; quorum vnum est d^2 aliud verò b^2, ita huiusmodi latus, ad aliud; quod erit excessus baseos supra segmentum notum E D.



Quod si existente angulo acuto, latus datum sit minus incognito latere, quod eueniet quando perpendicularis A D, ita cadet, in E B, vt secet partem ipsius E B partem inquam, quæ æqualis est lateri incognito. Tunc segmentum F D esto a, ergo reliqua pars E F erit $b - a$ supposito nimirum quod E D sit b.

Itidem supponamus A D esse d; itaque quadratum ex E F, seu $b - a^2$, quod est $b^2 - 2\,b\,a + a^2$ æquabitur $a^2 + d^2$, & per antithesin $2\,b\,a$ æquabitur $b^2 \sim d^2$. Reuocata æquatione ad analogiam fiet hic analogismus.

$2\,b \qquad R(b^2 \sim d^2) \qquad a$ Hinc.

PORISMA.

Vt est duplum b, ad latus quod potest differentiam quadratorum, quorum vnum est b^2 aliud verò d^2 ita huiusmodi latus, ad aliud. Hoc enim erit radicis pretium.

ADMONITIO.

Quandocunque E D fuerit minor perpendiculari A D, punctum F cadet inter B, D, si ò fuerit maior cadet inter E, D.

PROBLEMA.

Data base Trianguli differentia laterum, & angulo verticis inuenire triangulum.

Si Triangulum fuerit rectangulum, facile Problemati satisfiet. Exemplum VI.

Data sit basis b, differentia verò laterum data sit d, Oporteat reperire Triangulum rectangulum. Latus minus esto a, maius igitur erit $d + a$. Quadratum illius est a^2 istius verò est $d^2 + 2\,d\,a + a^2$. Horum aggregatum est $d^2 + 2\,d\,a + 2\,a^2$ quod æquabitur b^2, nempè quadrato baseos; & per antithesin fiet æquatio $2\,d\,a + 2\,a^2 = b^2 - d^2$; omnibusque subduplatis, fiet æquatio $d\,a + a^2 = \frac{b^2 - d^2}{2}$. Huius porrò æquationis radix elicietur facilè obseruatis Artis præceptis. Claritatis gratia, substituatur z^2 loco illius comparationis homogenei $\frac{b^2 - d^2}{2}$ vt fiat æquatio $d\,a + a^2 = z^2$. Dimidium coefficientis est $\frac{1}{2}\,d$, cuius quadratum est $\frac{1}{4}\,d^2$, quo addito, ad z^2 fiet $z^2 + \frac{1}{4}\,d^2$, cuius latus quadratum est $R(z^2 + \frac{1}{4}\,d^2)$ $\frac{1}{2}$, à quo si dempseris $\frac{1}{2}\,d$ coefficientis dimidium, remanebit $R(z^2 + \frac{1}{4}\,d^2) - \frac{1}{2}\,d$ pro radicis pretio, Hinc.

PORISMA.

Ad dimidium differentia quadratorum; quorum vnum est baseos quadratum; aliud verò quadratum data differentia, addatur quadratum dimidij ipsius differentia data, & ex aggregati latere auferatur dimidium ipsius differentia; quod enim superest, erit radicis pretium.

Potuisset etiam æquatio ad analogiam reuocari,

A:

At verò si triangulum non fuerit rectangulum. Habeat ad verticem primo Angulum obtusum.

Sit iam factum Triangulum A B C cuius angulus A B C, ad verticem datus sit obtusus, quare C B E reliquus, ad duas rectos, datus erit; atque adeo eius dimidium C B H erit datum quare, & angulus A B H datus erit.

Laterum excessus sit A F, ducta F C, cum B F, B C sint æquales, angulus E B C duplus erit anguli B F C quippequi externus æqualis est duobus æqualibus B F C, B C F, quare dimidium E B H æquale erit angulo B F C; proinde reliqus angulus A B H æqualis erit reliquo A F C.

In figura igitur resolutionis super basim datam A C describatur Circuli portio capiens angulum æqualem dato angulo A F C. Et in ea a puncto A, aptetur recta æqualis datæ differentiæ laterum A F protrahatur, ad partes F in infinitum; ex puncto verò C cadat perpendicularis C I. Superest vt diuidamus F I in duas partes, in puncto B; itaut aggregatum quadratorum B I, I C æquale sit quadrato alterius partis F B.

Intercepta F I sit b, pars autem F B esto a, reliqua igitur B I erit $b - a$; at verò perpendicularis I C sit d, quadratum ipsius a est a^2, quadratum verò reliquæ partis $b - a$ est $b^2 - 2ba + a^2$ huic si addatur d^2 fiet $d^2 + b^2 - 2ba + a^2$, quod æquabitur a^2; & per antithesin fiet æquatio $d^2 + b^2 + a^2 = a^2 + 2ba$; & rursus $2ba = d^2 + b^2$; atque adeò reuocata æquatione in analogiam, fiet analogismus hic.

$2b \quad \sqrt{(d^2 + b^2)} \quad a$ Hinc.

PORISMA.

Fiat, vt dupla b in figura resolutionis, & in alia superiori, vt dupla F I, ad latus, quod potest aggregatum quadratorum d, & b, in figura resolutionis, in superiori autem aggregatum quadratorum I C, F I, ita huiusmodi latus, ad a.

Quod si datus angulus ad verticem fuerit acutus. Sit iam factum Triangulum A B C, cuius angulus ad verticem B datus sit acutus, basis data sit A C, differentia laterum data sit A F ducta, F C, datur; angulus A B C; ergo & reliquus ad duos rectos C B E; quare & eius dimidium E B H, vel C B H; sed huic dimidio æqualis est angulus B F C, vel B C F; ergo & angulus B F C dabitur; quare, & A F C; reliquus, ad duos rectos, datus erit. In figura igitur resolutionis super basin A C describatur Circuli segmentum capiens angulum æqualem noto angulo A F C. Et in eo accomodetur recta A F æqualis datæ differentiæ laterum; protrahatur in infinitum, ad partes F; & in eam, ex puncto C cadat perpendicularis C I. Segmentum F I sit b, perpendicularis C I sit d; differentia laterum A F sit f. Insuper I B excessus quo latus minus superat segmentum *FI*; quod appellabatur b, esto a, ergo latus minus nempe F B, vel C B erit $b + a$; Latus maius erit $f + b + a$. Quadratum lateris minoris est $b^2 + 2ba + a^2$, quod æquabitur $a^2 + d^2$; nimirum aggregato quadratorum ex I B, & I C. Per antithesin autem fiet æquatio huiusmodi $2ba = d^2 - b^2$; & reuocata æquatione, ad analogiam fiet huiusmodi analogismus,

$2b \quad \sqrt{(d^2 - b^2)} \quad a$ Hinc,

PO

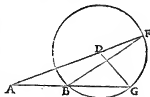
PORISMA.

Vt est duplum segmentum b ad latus, quod potest differentiam quadratorum, quorum vnum est d aliud b^2, ita huiusmodi latus, ad aliud. Hoc enim erit radicis pretium, & excessus quo latus minus superat segmentum F I notum. Is autem cognitis omnia innotescent.

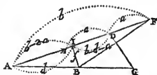
PROBLEMA.

Data differentia segmentum baseos trianguli aggregato laterum, & angulo verticis inuenire triangulum. Exemplum VII.

Sit triangulum iam factum A D G; in quo differentia segmentorum baseos sit A B centro D, interuallo D G descripto circulo qui necessario transibit per B producta A D, ad F ducta B F. Cum datus sit angulus A D G, cognitus erit G D F angulus reliquus ad duos rectos; quare & eius dimidium G B F cognitus erit; quare; & A B F reliquus ad duos rectos cognitus erit.



In figura igitur resolutionis super A F aggregato laterum describatur circuli segmentum, quod capiat angulum æqualem cognito angulo A B F; & in eo apetur recta æqualis datæ A B differentiæ segmentorum baseos. Ex B cadat B I, ad rectos angulos super A F superest, vt diuidamus A F in puncto H; ita vt si segmentum H F bifariam diuidatur in D, quadratum dimidij verbi gratia H D, æquale sit quadrato intercepti segmenti I D, vna cum quadrato perpendicularis B I.



Aggregatum A F sit b, insuper segmentum A I cognitum sit d, & segmentum H F esto, 2 a, ita vt eius dimidium H D sit a, interceptum segmentum I D sit $b - d - a$ perpendicularis B I sit f. Quadratum ex $b - d - a$ est $b^2 - 2bd + d^2 + 2da + a^2$; quadratum ex f, est f^2 aggregatum est $f^2 + b^2 - 2bd + d^2 + 2ba + 2da + a^2$, quod æquabitur a^2. Et per antithesin fiet æquatio huiusmodi $2ba - 2da = b^2 + d^2 - 2bd$ reuocata autem proportione ad analogiam fiet huiusmodi analogismus.

$2b - 2d$ $\quad$ ℞$(b^2 + d^2 - bd)$ $\quad$ a Hinc.

PORISMA.

Vt est $2b - 2d$, ad latus quod potest $b^2 + d^2$ minus duplo rectangulo b d, ita huiusmodi latus, ad aliud. Illud enim erit radicis pretium, & minus latus quæsitum.

Licet etiam hoc absoluere, vt in exemplo quarto factum est, si loco ibi anguli ad A, detur A B, differentia segmentorum baseos.

PROBLEMA.

Dato vno ex lateribus Trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & basim inuenire triangulum. Exemplum VIII.

Datum

Datum sit vnum, è lateribus trianguli A B, differentia verò inter reliquum latus, & basim sit z; angulus ad verticem datus sit æqualis angulo C oporteat reperire triangulum.

Sit triangulum A B D, cuius latus datum, est A B angulus ad verticem D A B æqualis C; intelligatur latus D A protractum vsque ad G, ita vt A G sit æqualis Z ex B, ad A G cadat perpendicularis B E, ex B itidem ducatur B G, At ex A intelligatur ducta A F parallela ipsi B G; In figura igitur resolutionis A G sit f, & A E, sit d, insuper E B sit b, at verò D A esto a, tantum etiam erit D F; cum sit æqualis D A; At vero cum F B sit æqualis A G, erit, & ipsa F B, etiam f, quare tota basis B D erit a ✱ f, cuius quadratum a^2 ✱ 2 f a ✱ f æquale esse debet quadratis ex D E, E B; at verò D E est a ✱ d, cuius quadratum est a^2 ✱ 2 d a ✱ d^2; quadratum verò ex E B est b^2; proinde erit æquatio a^2 ✱ 2 f a † f^2 = a^2 † 2 d a † d^2 † b^2, & per antithesin 2 f a † f^2 = 2 d a † d^2 † b^2; & rursus 2 f a – 2 d a = d^2 † b^2 – f^2. Quamobrem si in analogismum transmutetur æquatio; fiet huiusmodi analogismus.

2 f – 2 d   ℞ (d^2 † b^2 – f^2)   a Hinc.

PORISMA.

Fiat; vt duplum f minus duplo d ad latus, quod potest aggregatum, ex d^2 † b^2 minus f^2; ita huiusmodi latus, ad aliud; Illud enim erit latus ignotum, quo cognito basis non ignorabitur.

Quod si triangulum quæsitum foret rectangulum, vt triangulum A B C, cuius latus datum verbigratia sit A B differentia inter reliqum latus, & basim, sit B E latus datum sit b; & differentia data sit d.

Latus reliquum esto a, basis igitur erit d † a ergo rectangulum sub aggregato ex basi, & vno ex lateribus circa angulum rectum, in differentiam inter basim, & prædictum latus ignotum, cum æquale sit quadrato alterius lateris circa rectum sitque aggregatum ex basi, & latere ignoto 2 a † d, & differentia iam dicta sit d, rectangulum proinde erit 2 d a † d^2, quod æquabitur b^2, & per antithesin, 2 d a = b^2 – d^2, quamobrem erit, vt 2 d, ad ℞ (b^2 – d^2), ita ℞ (b^2 – d^2) ad, a. sunt igitur proportionales 2 d; ℞ (b^2 – d^2); a Hinc;

PORISMA.

Fiat, vt dupla differentia data, ad latus, quod potest differentiam quadratorum, quorum vnum est quadratum differentia data, aliud verò quadratum dati lateris; ita huiusmodi latus ad aliud; Hoc enim erit latus ignotum.

De

De Problematibus illis, quæ constructione operaria non egent, sed postulant tantummodo, vt quæsitum numero explicetur. Caput XIV.

EA sanè Arte, qua Problemata, de quibus hucusque loquuti sumus, quæ nimirum operariam constructionem, requirunt, etiam ea, quæ huiusmodi constructionem non exposcunt, resoluuntur; Porismata verò, quæ ex ipsis Resolutionibus deducuntur, in formam Theorematis proponuntur, & eorum demonstratio procedit per Analyseos vestigia ordine directo; & huiusmodi Theoremata, vt etiam aduertit Ghetaldus rationem fugerunt construendi ipsa Problemata, hoc est numero explicandi id, quod quæritur, ad hoc Problematum genus pertinet illud, quod etiam idem Auctor affert.

Extant nonnulla Problemata, quæ operariam nõ exigunt constitutionem. Quomodo hæc Problemata se habeant.

Quomodo Archimedes portionem argenti aureæ Coronæ permixtam inuenerit.

Declaratur hoc Probl. genus.

Idem Ghetaldus in suo opere differit de huius generis Problematibus, qua nimirùm arte resoluantur, & hanc materiam non paucis explicat, verum quia eodem prorsus modo, & artificio hæc problemata resoluuntur, quo nimirùm illa, quæ constructionem operariam requirunt, vt supra dictum est; proinde non est cur hic immoremur; aduertendum autem est præcipuè Demonstrationem eodem ordine procedere, quo procedit Analysis, sed huius generis Problemata suo loco Deo fauente non pauca resoluemus. Placet nihilominus nonnullorum resolutiones afferre.

Quidam Nauta discedens Ancona, singulis diebus conficit miliaria 30, alius autem idem ingreditur iter decimo secundo die post elapso; quæritur miliariorum numerus, quem conficere debet posterior, vt priorem itinerantem assequatur diebus viginti.

Problema primum constructionem operariam non exposcens.

Numerus miliariorum quæsitus esto 1 R; miliariorum; ergo ille prior Nauta diebus 20, conficiet 20 R, miliariorum, cum autem is singulis diebus confecerit 30, miliaria, absoluet spatio 20, dierum miliaria 600, addantur verò 360, miliaria, quæ ipse confecit diebus prioribus 12, & fit summa 960, & 20 R, æquabitur 960, diuisione instituta fit 1 R, valor 48, & tot debet miliaria conficere posterior, vt priorem assequatur diebus 20. Hæc eadem quæstio sic resoluetur per Algebram Speciosam.

Numerus miliariorum, quæ conficit prior Nauta singulis diebus sit d, & numerus dierum elapsorum sit b, numerus verò dierum, quibus debet posterior assequi priorem, sit f.

Quæsitus numerus miliariorum sit a; Ergo in spatio dierum significato per f, conficiet f a, miliariorum, cum autem singulis diebus prior conficiat miliariorum numerum significatum per d, in spatio dierum significato per f, conficiet d f, miliariorum, addatur d b, fit d f † d b, & erit æquatio inter f a & d f † d b; proindè proportionales erunt termini isti. Vt f, ad f † b, ita d ad a, & hinc deduci potest Porisma vniuersale,

Secundò proponatur,

Dic quota nunc hora est? superat tantum ecce diei.
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Problema secundum, quod operariam costructionem non requirit.

Diei horarum numerus erit b, intellecto die more antiquorum pro duodecim horis æqualibus, & vt est s ad r, sit quantitas horarum præteritarum ad horas, quæ supersunt. Numerus horarum præteritarum sit a. Ergo horæ, quæ supersunt erunt $\frac{ra}{s}$, sic enim quæstio requirit, vt est siquidem s ad r, ita est a, ad $\frac{ra}{s}$; summa ex his est $\frac{ra}{s}$ † a, & æquabitur b, omnia ducantur in s, & fiet r a † s a = b s, reuocetur æqualitas ad proportionem, & erit vt r † s, ita b ad a, hinc deduci potest Porisma,

Horæ sunt, quas Gnomonici planetarias appellant.

Tertiò proponatur,

Alexander Magnus die quodam cum Calisthene de sua ætate, suorumque amicorum Ephestionis, & Clyti, quos ipse etiam, atque etiam amabat ita loquutus est. Ego inquit meum Ephestionem duorum annorum spatio antecedo, At verò Clytus sua ætate amborum annos comprehendit, & prætereà annos quatuor; Tunc Calisthenes dixit se non mediocri affici lætitia, quod pater suus vixerit annos 96, atque adeò eius ætas comprehendit annos trium ipsorum. Quæritur qua ætate Alexander hæc dixerit, & quos annos tunc tàm Ephestio, quam Clytus habuerit.

Problema tertium.

Ttt Anno-

Annorum Ephestionis numerus esto 1 R, ob id Alexandri annorum numerus fuit 1 R † 2, Clyti verò 2 R † 6, horum summa est 4 R † 8, & erit æquatio inter 4 R † 8, & 96, & per Antithesin inter 4 R, & 88, diuisione instituta, fit 1 R valor 22; Itaque numerus annorum Ephestionis fuit 22, & Alexandri 24, Clyti autem 50.

Intelligatur b, excessus annorum Alexandri suprà Ephestionis ætatem, & d, sit excessus Clyti &c. at verò patris ipsius Clyti ætas supponatur z; Ephestionis annorum quantitas esto a; proindè Alexandri erit a † b, & Clyti 2 a † b † d, horum autem aggregatum est 4 a † 2 b † d, & erit æquatio huiusmodi 4 a † 2 b † d = z, vtrinque auferatur 2 b † d, & erit æquatio huiusmodi 4 a = z -- 2 b -- d, atque adeò $a = \frac{z - 2b - d}{4}$, & hinc Porisma.

Cæterum innumera sunt huius generis Problemata, quibus noua Algebra satisfacit, & vnusquisque poterit varia, atque diuersa exercitationis gratia, resoluere.

Qua Arte cognoscantur Problemata impossibilia. Caput XV.

Vtilis est ista tractatio, de dignoscenda impossibilitate Problematum

NOn est parui faciendus ille modus, quo deprehenditur, num Problema sit possibile, an impossibile; siquidem non raró contingit, vt Analysta incidat in æquationē aliquam impossibilem, hoc autem nisi animaduertat frustrà teret tempus in enodanda Quæstione; curandum est ergo diligenter, vt nos cognoscamus omnino num ipsa Quæstio proposita sit possibilis, an impossibilis ne cauillatoribus occasionē præbeamus, vt nos irrideant.

Problema impossibile quod nam sit.

Problema impossibile illud est, in cuius analysi incidit Analysta inaquationem impossibilem.

Aequatio impossibilis, quæ sit.

Equatio impossibilis ea est, in qua totum proponitur aquari parti; maior magnitudo minori.

Quod est absurdum; hoc autem dupliciter cognoscitur, vel nimirum apertè ex eo, quod videmus duas magnitudines inæquales, vt æquales inuicem conferri; vel cognoscitur ex eo, quia æquatio redditur inexplicabilis. Proponatur Problema resoluendum.

Problema impossibile.

Datam rectam lineam ita secare, vt si à rectangulo comprehenso sub tota, & vna ex partibus auferatur quadratum eiusdem partis remaneat quadratum totius.

Data sit recta linea b, secanda &c. Pars vna esto a, alia erit b -- a; rectangulum sub tota, & vna ex partibus erit b a, à quo si auferatur quadratum eiusdem partis a, nempè a^2, remanebit b a -- a^2, & æquabitur b^2, nempe quadrato totius. Hoc Problema dicetur impossibile, quoniam est æquatio inexplicabilis, non enim à quadrato dimidiæ coefficientis b, puta ab $\frac{1}{4}b^2$, auferri potest b^2, comparationis homogeneum, pro vt hæc æquatio Amphibola exigit, vt suo loco docuimus, licet autem non apertè cernatur inæqualitas inter b a -- a^2, & b^2, nihilominus facilè deprehendetur hoc modo; Quoniam ponitur a^2, auferri abs b a, & quod remanet æquari b^2, necessario b a, maius erit, quèm a^2, non enim maius potest à minori auferri, & si æquale ab æquali auferatur nihil potest relinquere; proinde a^2, minus erit quàm b a, & per consequens a, minor erit, quàm b, alioqui ex multiplicatione a per b, non fieret quid maius, quàm ex a in se ducta; cum autem a, sit minor, quàm b, sequitur b a minus esse quàm b^2. Sit æquatio 12 R -- 1 Q = 144, vides à 36 quadrato dimidij numeri Radicum non posse auferri 144, & eadem ob causam esset Problema impossibile.

Conuincitur impossibile, & si non apertè cernantur.

Problema impossibile.

Diuidatur latus in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alterum producatur quadratum totius.

Datum sit latus b, diuidendum &c. Pars vna esto a, alia erit b -- a, si vna ducatur in alteram fiet b a -- a^2, & æquabitur b^2, non potest autem ab $\frac{1}{4}b^2$, auferri b^2.

Secta sit A C in B, si fieri potest, vt Problema iubet &c.

A B C

Quoniam ergo rectangulum A C B, minus quadrato ex B C, æquale est quadrato totius A C, & quadratum ex A C

a 4. secundi.

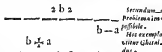
a est æquale quadratis ex A B, B C, vna cum duplo rectangulo A B C, erit idem rectangulum A C B, minus quadrato ex B C, æquale quadratis ex A B, B C, vna cum duplo rectangulo A B C, sed rectangulum A C B, minus quadrato ex B C, est æquale rectangulo A B C, ergo rectangulum A B C, erit æquale duplo rectangulo A B C, vna cum quadratis ex A B, B C, pars toti, quod est absurdum, non potest ergo latus diuidi, vt Problema postulat &c.

Datum

Datum latus in tales duas partes diuidere, vt rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadratis partium. Exemplum.

Hoc exemplo vtitur etiam Ghetaldus.

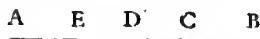
Secundum Problema impossibile. Hoc exemplo vtitur Ghetal-dus.



Datum sit latus 2 b, secandum vt Problema iubet.

Supponatur factum dimidia differentia partium esto a, ob id pars maior erit b + a pars verò minor erit b -- a, cum autem rectangulum sub b + a, & b -- a, vna cum quadrato ex 2 a, æquale sit quadratis ex b + a, & b -- a, (hoc siquidem pacto latus 2 b, supponitur sectum); proinde b² -- a² + 4 a², æquabitur 2 b² + 2 a², seu b² + 3 a², æquabitur 2 b² + 2 a²; vtrinque auferatur b², & 2 a², & a² æquabitur b², & a æquabitur b pars toti quod est absurdum.

Sit recta A B, secta in C, vt Problema iubet &c. accipiatur A E, æqualis C B, itaque partium A C, C B, differentia erit E C, secetur A B, in D, bifariam; Quoniam autem rectangulum A C B, vna cum quadrato ex E C,

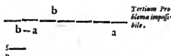


id est cum quadrato ex D C quater (sunt enim E D, & D C, æquales, ob id quadratum ex E C quadruplum est quadrati ex D C, vel E D) æquale est quadratis ex A C, C B, hoc enim pacto secta ponitur A B; rectangulum verò A C B, vna cum quadrato ex D C [α] æquale est quad. ex A D, seu quod idem est rectang. A C B, est æquale quad. ex A D, minus quad. ex D C, ergo quad. AD, minus quad. DC, plus quad. ex D C, quater, nempè quad. ex A D, vna cum quadrato ex D C ter, erit æquale quadratis ex A C, C B, nempè [β] duplo quadratorum ex A D, D C, vtrinque auferatur quadratum ex A D, & duplum quadrati ex D C; ob id reliquum quadratum ex D C, æquabitur reliquo quadrato ex A D, atque adeò D C, æquabitur A D, seu D B, pars toti, quod est inconueniens. Impossibile est itaque Problema.

[α] 5. secundi. [β] 9. secundi.

Datum latus ita diuidere, vt rectangulum sub toto, & altera parte, ad rectangulum sub partibus habeat datam rationem minoris, ad maius. Exemplum.

Tertium Problema impossibile.



Datum sit latus b, diuidendum sic, vt rectangulum sub toto, & altera parte, ad rectangulum sub partibus habeat datam rationem vt est s, ad r, minoris ad maius: Pars vna esto a, alia erit b -- a, rectangulum sub toto, & altera pars nempè a erit b a, & rectangulum sub partibus est b a -- a², vt verò est s, ad r, ita debet esse b a, ad b a -- a², reuocetur proportio, ad æqualitatem, & b r a, æquabitur b s a -- s a², omnia applicentur ad a, vt sit aliqua magnitudo, cui comparentur reliqua, & b r, æquabitur b s -- s a, vtrinque addatur s a, & b r + s a æquabitur b s, vtrinque non potest auferri b r, vt certa ab incertis separentur, siquidem maius puta b r, nequit subtrahi à minori b s. Hæc est æquatio ergo inexplicabilis, cum nò possit b r, subtrahi à b s, maius à minori, atque adeò, nequit ad analogiam reduci, siquidem ab s, non potest subduci r, terminus maior, à minori.

Recta sit A B secta &c. & ratio data vt A E ad A D.

Quoniam ergo sic est diuisa A B in C, erit solidum sub A D in A B, B C comprehensum æquale solido, quod sub A E in A B, B C, minus solido sub A E in quadratum B C, omnia applicentur ad C B, rectangulum sub A D, in A B, æquale erit rectangulo sub A E, A B, minus rectangulo sub A E, C B; vtrinque addatur rectangulum sub A E, BC, nam rectangulum sub A D, A B, plus rectangulo sub A E, B C, æquabitur rectangulo sub A B, in A E; vtrinq; auferri posse deberet rectang. sub A B, A D, quod est impossibile; maius est enim rectangulum sub A B, A D, quàm sub A B, & A E; alias ipsa A E, foret maior, quam A D pars toto, quod est absurdum; proindè longè maius erit rectangulum sub A B, A D, vna cum rectangulo sub A E, & C B, quàm sub AB, A E, &c.



SCHOLION.

Superior Resolutio per solidorum comparationem procedit, putat Ghetaldus abstinendum Analysi ab huiusmodi Analyseos methodo, siquidem in Geometricis Resolutionibus vti solidorum comparatione est veluti per impropria procedere, nihilominus est Resolutio verissima manu du-

tens ad id quod est in quaestione; quod Geometrae sufficit.

Exemplum. *Datum latus in duas partes diuidere, vt triplum rectangulum sub partibus, vna cum duplo quadrato differentiae partium, aequale sit quadrato totius, vna cum quadrato differentiae partium.*

Datum sit latus diuidendum 2 b, &c. dimidia differentia partium esto a, pars maior erit b ✠ a, alia nempè minor erit b -- a, rectangulum sub partibus est b^2 -- a^2, cuius triplum est 3 b^2 -- 3 a^2, huic si addatur duplum quadratum differentiae partium, fiet 3 b^2 -- 3 a^2 ✠ 8 a^2, & hoc aequabitur 4 b^2 ✠ 4 a^2, nempè quadrato totius vna cum quadrato differentiae partium, & facta translatione secundum Artem a^2, aequabitur b^2, atque adeò a, aequabitur b; pars toti, quod est impossibile, repetendo autem Analyseos vestigia fiet Compositio.

2 b

b ✠ a , b -- a

Sit secta A B in C, vt petitur, fiat autem ipsi C B, aequalis A E, eritque partium A C, C B, differentia E C, diuidatur A B, bifariam in D. Quoniam ergo triplum rectangulum A C B, vna cum duplo quadrato ex E C, aequale ponitur quadrato totius A B, vna cum quadrato ipsius E C, rectangulum verò A C B, vna cum quadrato ex D C aequale est a quadrato ex A D, vel D B, seu quod idem est rectangulum A C B, aequale est quadrato ex D B, minus quadrato ex D C, atque adeò triplum rectangulum A C B, aequale est triplo quadrato ex D B, minus triplo quadrato ex D C. Ergo triplum quadratum ex D B, minus triplo quadrato ex D C, vna cum duplo quadrato ex E C, seu octuplo quad. DC, aequabitur quadrato totius A B, vna cum quadrato differentiae E C, hoc est quadruplo quadrato ex D B, vna cum quadruplo quadr. ex D C; hoc est triplum quadratum D B, plus quintuplo quadrato ex D C, aequabitur quadruplo quad. DB, vna cum quadruplo quadrato D C: Vtrinque auferatur triplum quadratum ex B D, & quadruplum quadratum ex D C, & remanebit quadratum ex D C, aequale quadrato ex D B, atque adeò D C, aequabitur ipsi B D, pars toti, quod est inconueniens.

A E D C B

a 5. secundi.

SCHOLION.

Et eodem pacto reperiemus quàm plurima alia Problemata impossibilia, quae non dissimili arte dignoscentur; & eorum impossibilitas deprehendetur, sic etiam ex Problematibus in quorum analysi occurrit angulorum comparatio, reperiemus, quaedam impossibilia; vt si proponeretur, Triangulum constituere habens tres angulos aequales tribus angulis rectis.

Qua arte cognoscantur Problemata vana, & nugatoria. Caput XV.

De modo cognoscendi Problematum impossibilitatem egimus; reliquum est vt hic de Methodo, qua Problematum vanitatem deprehendere possimus verba faciamus: Problemata vana, seu nugatoria impossibilibus Problematibus ex diametro opponuntur quandoquidem illud censetur Problema impossibile, cum id, quod ipsum Problema iubet nulla ratione fieri potest. Vanum autem cum id quod fieri iubet quocunque modo fiat Problemati sit satis, vel infinitis modis ipsum Problema construi potest.

Problemata vana seu nugatoria impossibilibus opponuntur, & quid vtrunque.

Cum autem Problematis Resolutio in aliquam inutilem aequationem incidit Problema vanum est, & nugatorium.

Quando Problema nugatorium ex aequatione colligatur.

Equatio inutilis illa est, in qua eaedem magnitudines ijsdem magnitudinis aequantur; vel cum datae magnitudines datis tantum magnitudinibus expulso quaesito aequantur.

Aequatio inutilis quae.

Propterea quod nulla tunc fit comparatio dati, & quaesiti, propter quem finem aequationem institutam esse peritioribus liquet. Inutiles autem aequationes sunt veluti istae b^2 = b^2, in qua nimirùm eadem magnitudo eidem magnitudini adaequatur; insuper 2 b^2 ✠ 2 a^2 = 2 a^2 ✠ 2 b^2, in qua eaedem magnitudines ijsdem magnitudinibus adaequantur; praeterea 4 b a = 4 b a, ob eandem causam est aequatio inutilis. Sic etiam b^2 -- 2 b a ✠ a^2 = b^2 -- 2 b a ✠ a^2; inutilis est, cum ex vtraque parte eaedem magnitudines sint.

Exempla.

Si proponatur.

PROBLEMA.

Datum latus in tales duas partes diuidere, vt rectangulum sub toto, & partium differentia vna cum quadrato partis minoris æquale sit quadrato partis maioris.

Problema vanum est, & nugatorium; propterea quod, vtcunque latus datum diuidatur perpetuò reperiremus ex ea diuisione hoc proficisci, nempè id quod quæritur, vt patet ex ijs, quæ habentur in Elementis lib. 2. Prop. 5. si nimirùm illa dimidia intelligatur pars maior, intermedia verò pars minor, & reliqua differentia partium, si verò instituatur Analysis hæc in æquationem incidet inutilem, in qua ex vtraque parte eædem sunt magnitudines, si namque latus propositum supponatur b, & pars minor sit a, erit maior b – a, eritque partium differentia b – 2 a rectangulum sub toto latere, & partium differentia est $b^2 - 2\,ba$, huic si addatur quadratum partis minoris, nempè a^2, fiet $b^2 - 2\,ba + a^2$, & hoc æquale est quadrato partis maioris, nimirum $b^2 - 2\,ba + a^2$, & hæc est æquatio inutilis, in qua ex vtraque parte eædem sunt magnitudines, ex hac autem Analysi facile est demonstrationem elicere, vt facit etiam Ghetaldus, qui hoc eodem vtitur exemplo.

$$\begin{array}{r} b - a \\ b - a \\ \hline -\,ba + a^2 \\ b^2 - ba \quad\;\; \\ \hline b^2 - 2\,ba + a^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b - 2\,a \\ b \\ \hline b^2 - 2\,ba \\ a^2 \\ \hline b^2 - 2\,ba + a^2 \end{array}$$

A D C B

Recta A B, seceturque vtcunque in C, & C B, sit minor pars, cui fiat æqualis D C, & A D, erit partium A C, C B, differentia; Dico rectangulum B A D, vna cum quadrato ex C B, æquale esse quadrato ex A C; Cum enim rectangulum B A D, hoc est rectangulum sub tota, & differentia partium æquale sit quadrato totius A B, minus rectangulo A B D, hoc est minus duplo rectangulo A B C, quod illi est æquale, cum D B, sit dupla ipsius B C, addatur vtrobique quadratum ipsius B C, & rectangulum B A D, vna cum quadrato ex B C, æquale erit quadrato ex A B, vna cum quadrato ex B C, minus duplo rectangulo A B C; at verò quadratum A C, partis maioris æquale est a quadratis ex A B, B C minus duplo rectangulo A B C, ergo rectangulum B A D, vna cum quadrato ex B C, æquale erit quadrato ex A C, quod oportebat ostendere.

a ex lib. Analyseos.

Sic etiam vanum, & nugatorium Problema esset illud.

Propositum latus in duas partes diuidere ea lege, vt quadruplum rectangulum sub partibus, vna cum quadrato differentiæ partium æquale sit quadrato totius.

Vtcunque enim latus diuidatur, id euenire comperiemus, vt patet ex demonstratis ab Euclide lib. 2. Prop. 8. si tota recta intelligatur pars maior, alterum segmentorum pars minor, reliquum verò differentia partium.

FINIS.

INDEX CAPITVM
Rerumque Memorabilium.

IN PRÆFATIONE.

Exem-

Secunda

alias

De Methodo Resolutiua pro Theorematibus alijs Physico-Geometricis. Cap. V.

Occur-

De Experimentis ad Veritates Physicas indagandas. Cap. VI.

A quibus cauendum Analysta, nè delusus quodammodo videatur. Cap. VII.

De particularibus Methodis, quas hucusque Mathematicorum schola frequentauit. Deque peculiari ab Auctore exculta.
Cap. X.

Conspe-

De Auctoris Methodo peculiari, ac propria.

Per decrescentiam excessus, atque defectus in infinitum abeuntem, Particularium omnium feracissima, velut illa, qua obscurioribus Theorematibus facilè, ac expeditè fit satis; præsertim iis, quæ cùm Veteres, tùm Recentiores laboriosè demonstrarunt.

ipsius

Methodus per Indiuifibilia procedens iterum perpenditur.

Figuræ

De Deductione.

LIBRI SECVNDI.

Si ex

Cautiones, quibus indiget Analysta in Theorematis oblati Resolutione instituenda, & quid inter Antiquam, & nouam Methodum intersit.

Cap. VI.

De Problematibus resoluendis Speciosæ Algebræ beneficio. Cap. VII.

Præcepta pro resoluendis Problematibus beneficio speciosæ Algebræ varijs Exemplis illustrantur. Cap. VIII.

Resolu-

De cautionibus in cuiuslibet oblati Problematis Resolutione instituenda. Deque Subsidiaria coëfficente quantitate, *quam Auctor ad altos gradus in ipsamet Resolutione vitandos, adhibere consueuit. Cap. IX.*

Auctoris Noua, eaque Methodus Absolutissima; qua demonstrantur omnium Problematum Effectiones, ex ijs deductæ Resolutionibus; quarum vestigia, vel non licet, vel non placet, in componendo repetere: vbi quod Algebricum est ad Geometricam φράσιν traducitur. Cap. X.

De Deductione quam Græci Ἐπαγωγὴν appellant. Cap. XI.

De Methodo depromendi Geometricas effectiones, ex Algebra Veteri: Siue vsus Veteris Algebra, ad Geometricè Problemata resoluenda. Cap. XII.

Auctor ostendit, haud benè plerosque Analystas existimasse, Problemata nonnulla sub Algebram non cadere.
Cap. XIII.

De Problematibus illis, quæ constructione operaria non egent, sed postulant tantummodo, vt quæsitum numero explicetur. Cap. XIII.

Qua Arte cognoscantur Problemata Impossibilia. Cap. XIV.

Qua Arte cognoscantur Problemata Vana, & Nugatoria. Cap. XV.

FINIS.

Quæ irrepserunt errata in Tractatu de Algebra Speciosa, hæc ferè sunt obseruata, si qua alia superfint, tua beneuolentia relinquimus.

Pag. 24. l. 12. b cor. b_1. Eadem pag. l. 13. b cor. b_1 pag. 195. In Schemate loco lineæ C E ductæ parallelæ ipsi H D. intellige ex H ducta HE parallelam ipsi GC. pag. 198. 67. differentia inter triplum quadratum trientis, & planum iam dictum. cor. aggregato ex triplo quadrato trientis, & plano iam dicto. pag. 214. l. 33. b2 cor. b pl. pag. 248. Post lineam extremam adde Index.

Errata quæ in hoc Tractatu de Resolutione, & Compositione Mathematica irrepserunt, ita corrige.

Pag. 89. l. 21, & E ducta sit &c. corrige & E, & in I, & k in directum cum F. pag. 81. l. 19. & BE, cor. ad BE. pag. 142. l. 24. visam cor. visum. pag. 156. l. 40. Alystæ cor. Analystæ. pag. 199. l. penultima frumentinum cor. frumentinorum. pag. 200. l. 10. Natura cor. Naturam. pag. 200. l. 21. exercent cor. exerceat. ibid. l. 32 Cronometri cor. Chronometri. ibid. numerari cor. numerare. ibid. l. 49. liquatus cor. liquatur. ibidem l. 53. exulterantia cor. exuberantia. pag. 252. in Schematibus inter Bk in recta Bk intellige literam L. pag. 281. l. 10. quintam cor. quinta. pag. 359. l. 46. FGC cor. FCG. pag. 360. l. 5. initio lineæ B, cor. C. pag. 40. in Schemate secundo vbi legitur A - B. lege B - A. pag. 414. l. 30. Paulinu cor. Pauolino. pag. 470. l. 21. GD. cor. GA. & in primo Schemate, & in secundo, vt in alia pag. subsequente, intellige literam B. in parte superiori circumferentiæ, vt respondeat verbis Datus sit circulus A B C.

IN GEOMETRA PROMOTO.

Pag. 76. l. 52. dimidium cor. duplum. pag. 87. l. 48. lib. XIII. Elem. prop. 11. cor. lib. XIII. Elem. prop. 9.